

**Skript zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Sommersemester 2020**

Matthias Wendt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	1
Kapitel 2. Topologische Mannigfaltigkeiten: Definitionen und Beispiele	5
2.1. Grundlagen Topologie	5
2.2. Quotiententopologie und Zusammenkleben	7
2.3. Topologische Mannigfaltigkeiten	9
2.4. Beispiele	11
2.5. Topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand	15
Kapitel 3. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen	19
3.1. Partielle Ableitungen und C^∞ -Abbildungen	19
3.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	19
3.3. Glatte Abbildungen	22
3.4. Zerlegung der Eins	26
3.5. Glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand	29
3.6. Ausblick: Lie-Gruppen und Wirkungen	31
3.7. Ausblick: Flächenklassifikation	32
3.8. Ausblick: Differentialtopologie und Klassifikation von glatten Mannigfaltigkeiten	34
Kapitel 4. Tangentialvektoren und Differential	35
4.1. Wiederholung Analysis	35
4.2. Tangentialvektoren als infinitesimale Kurven	39
4.3. Tangentialvektoren als Derivationen	41
4.4. Differential für Abbildungen	43
4.5. Tangentialbündel und Vektorbündel	47
4.6. Vektorfelder und Integralkurven	51
4.7. Tangentialvektoren für Mannigfaltigkeiten mit Rand	57
Kapitel 5. Kritische Punkte und Untermannigfaltigkeiten	59
5.1. Definitionen	59
5.2. Wiederholung Analysis: Umkehrfunktion und konstanter Rang	60
5.3. Untermannigfaltigkeiten und Abbildungen von konstantem Rang	63
5.4. Satz von Morse–Sard und Transversalität	68
5.5. Einbettungen und Whitney’scher Einbettungssatz	72
5.6. Anwendungen	74
5.7. Satz von Frobenius	79
Kapitel 6. Differentialformen	83
6.1. Multilineare Algebra	83
6.2. Differentialformen	86
6.3. Äußere Ableitung	92
6.4. De-Rham-Komplex	96
Kapitel 7. Integration auf Mannigfaltigkeiten	99

7.1. Orientierung	99
7.2. Integration	102
7.3. Satz von Stokes	105
7.4. Integration und De-Rham-Kohomologie	106
Kapitel 8. Differentialformenkalkül und Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten	109
8.1. Skalarprodukte und Riemannsche Mannigfaltigkeiten	109
8.2. Hodge-Stern und Laplace-Operator	111
8.3. Klassischer Vektorkalkül	112
8.4. Klassische Integralsätze	115
8.5. Wärmeleitungsgleichung	116
8.6. Maxwell-Gleichungen des Elektromagnetismus	117
Anhang A. Grundlagen Kategorientheorie und Analysis	121
A.1. Kategorien und Funktoren	121
Literatur	123

KAPITEL 1

Einleitung

Die Vorlesung “Analysis auf Mannigfaltigkeiten” steht am Ende des Analysis-Zyklus und markiert den Übergang in globalere Fragestellungen der Topologie und Geometrie. Im Analysis-Zyklus geht es um die Differential- und Integralrechnung für Funktionen; diese können reell- oder vektorwertig sein, in einer oder mehreren Veränderlichen, sind aber eigentlich immer auf geeigneten (z.B. offenen) Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert. In der Analysis auf Mannigfaltigkeiten ändert sich die Perspektive auf die Konzepte aus dem Analysis-Zyklus: es geht nicht mehr so sehr um Funktionen und ihre Eigenschaften, sondern eher um die Frage, auf welchen Räumen die grundlegenden Konzepte der Differential- und Integralrechnung noch funktionieren, wie solche Räume aussehen und wie die Struktur dieser Räume die Eigenschaften von Funktionen oder z.B. die Lösbarkeit von Gleichungen beeinflusst.

Das erste zentrale Konzept der Vorlesung sind damit die *Mannigfaltigkeiten*. Die Grundidee der Mannigfaltigkeiten ist, Räume zu studieren, die lokal aussehen wie ein gegebener Modellraum (in unserem Fall $\mathbb{R}^n$), so dass bestimmte Konzepte (der Differential- und Integralrechnung) wohldefiniert sind. Anders gesagt, jeder Punkt in einer (glatten) Mannigfaltigkeit hat eine Umgebung, die wie eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ aussieht. Tatsächlich hat jeder Punkt viele solcher Umgebungen, und die Identifikationen als offene Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ müssen dann natürlich mit den Konzepten der Differential- und Integralrechnung, insbesondere mit Ableitungen von Funktionen, kompatibel sein.

Die Bedeutung des Konzepts der Mannigfaltigkeit bzw. allgemeiner der Idee, Räume zu betrachten, die lokal aussehen wie ein gegebener Modellraum, geht weit über die Vorlesung “Analysis auf Mannigfaltigkeiten” hinaus und ist eigentlich die Basis der meisten Gebiete der modernen Geometrie. Wir können uns zum Beispiel statt für Differenzierbarkeit von Funktionen für die Messung von Längen oder Winkeln interessieren. Räume, die lokal aussehen wie $\mathbb{R}^n$, so dass die Identifikation als offene Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ mit Längen- oder Winkelmessung kompatibel sind, sind dann die Riemannschen bzw. die konformen Mannigfaltigkeiten. Ein weiteres Beispiel sind komplexe Mannigfaltigkeiten, die lokal wie offene Teilmengen in $\mathbb{C}^n$ aussehen, und in denen die Konzepte der komplexen Analysis wohldefiniert sind. Blätterungen, symplektische oder Kontakt-Mannigfaltigkeiten sind weitere Beispiele für Räume, die lokal wie $\mathbb{R}^n$ mit einer für gewisse (z.B. physikalische) Anwendungen relevanten geometrischen Zusatzstruktur aussehen. Etwas weiter weg finden wir ähnliche Konzepte auch in der algebraischen Geometrie: algebraische Varietäten oder allgemeiner Schemata sind Räume, die lokal aussehen wie Lösungsmengen algebraischer Gleichungen, und deren Struktur dann etwas über das Lösungsverhalten polynomieller Gleichungssysteme aussagen kann.

Natürlich gibt es in der Mathematik viele Konzepte, die nur aus Spaß an der Freud definiert und untersucht werden. Es gibt allerdings wirklich gute Gründe, sich für Mannigfaltigkeiten zu interessieren, weswegen Mannigfaltigkeiten auch 170 Jahre nach der Formulierung des Konzepts¹ noch zentrale und überaus relevante

¹Habilitation Bernhard Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 10. Juni 1854.

Objekte der modernen Mathematik sind. Historisch haben Probleme insbesondere der komplexen Analysis einen wesentlichen Anteil an der Entwicklung des Begriffs der Mannigfaltigkeit. Ein Beispiel dafür ist die komplexe Logarithmusfunktion, die wegen $e^{2\pi i n} = 1$ mehrwertig ist. Solange wir den komplexen Logarithmus nur als Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ betrachten, müssen wir immer einen Zweig wählen, und dies ist auch nur auf einfach-zusammenhängenden Gebieten in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ möglich. Allerdings kann durch analytische Fortsetzung und Zusammenkleben solcher Gebiete für die verschiedenen Zweige eine Mannigfaltigkeit konstruiert werden, auf der der komplexe Logarithmus eine wohldefinierte Funktion ist. Ein weiteres Beispiel, in dem Mannigfaltigkeiten die natürliche Lösung für Probleme der Analysis liefern, sind die elliptische Integrale $\int \frac{1}{\sqrt{p(z)}} dz$, die in der Berechnung der Bogenlänge von Ellipsen und der Periodendauer des Fadenpendels auftauchen und nicht elementar lösbar sind. Auch hier ist ein Problem, dass die Wurzelfunktion mehrdeutig ist; und die Lösung ist, das elliptische Integral als Integral einer Funktion auf der Riemannschen Fläche, die durch $w^2 = p(z)$ definiert ist, zu betrachten. Durch das Studium der Fläche und der Funktionen auf dieser Fläche erhält man dann wesentliche Einsichten für das ursprüngliche Problem der elliptischen Integrale.

Über diese konkreten Beispiele hinaus liefern Mannigfaltigkeiten und die Untersuchung ihrer globalen Eigenschaften wichtige Einsichten für Fragen sowohl der Analysis als auch der Geometrie. Einer der zentralen Punkte, die die Entwicklung im Laufe des 20. Jhds beeinflusst haben, ist das Zusammenspiel zwischen der Struktur der Mannigfaltigkeit und der Analysis und insbesondere der Lösung von Differentialgleichungen auf der Mannigfaltigkeit. Natürlich ist klar, dass Wellenausbreitung oder Wärmeleitung in der Ebene $\mathbb{R}^2$ anders funktioniert als auf einer Kugeloberfläche. Der Zusammenhang geht aber viel tiefer und wird zum Beispiel in der De-Rham-Kohomologie und dem allgemeinen Satz von Stokes sichtbar. Ein weiterer Punkt ist, dass Mannigfaltigkeiten ein geeigneter Kontext sind, um mit Symmetrien von Differentialgleichungen umzugehen, dies führt schlussendlich auf die Theorie von Lie-Gruppen und ihren Wirkungen auf Mannigfaltigkeiten.

Mannigfaltigkeiten tauchen auch in verschiedensten Kontexten in natürlicher Weise auf. Auf der einen Seite natürlich als konkrete geometrische Objekte, wie z.B. die Kugeloberfläche, projektive Räume oder der zwei-dimensionale Torus. Die zentralen geometrischen Objekte zur Beschreibung der Raum-Zeit in der allgemeinen Relativitätstheorie sind vier-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Darüber hinaus gibt es aber auch viele Beispiele, in denen Mannigfaltigkeiten als Zustandsräume von Systemen auftauchen. In der klassischen Mechanik wird die Bewegung von Punktmassen durch Ort und Impuls beschrieben, und der Zustandsraum eines solchen Systems von verschiedenen Punktmassen ist eine Mannigfaltigkeit, deren Koordinaten Ort und Impuls der jeweiligen Punktmassen sind. (Die Formulierung von Erhaltungsgrößen in diesem Zusammenhang führt dann auf symplektische Mannigfaltigkeiten.) Weitere Beispiele sind Konfigurationsräume von n Punkten (geordnet oder ungeordnet) im $\mathbb{R}^m$ oder Konfigurationsräume von Gelenken. (Tatsächlich ist jede glatte kompakte Mannigfaltigkeit Konfigurationsraum eines geeigneten ebenen Gelenks.) Der Fantasie sind dabei kaum Grenzen gesetzt, so studiert die Informationsgeometrie zum Beispiel Mannigfaltigkeiten, deren Punkte Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind, und deren (in diesem Fall Riemannsche) Mannigfaltigkeitenstruktur etwas über "Information" als Abstand zwischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen aussagt.

Nach diesem Exkurs über die Bedeutung des Mannigfaltigkeitenbegriffs in der modernen Mathematik kommen wir zur konkreten Situation für die Vorlesung "Analysis auf Mannigfaltigkeiten" zurück. In der Vorlesung beschäftigen wir uns mit differenzierbaren (synonym glatten) Mannigfaltigkeiten, also Räumen, die lokal

wie $\mathbb{R}^n$ aussehen, und auf denen die Konzepte der Differential- und Integralrechnung wohldefiniert sind. Wir finden in diesem Kontext eigentlich alle Konzepte des Analysis-Zyklus in allgemeinerer Form wieder. Ableitungen (insbesondere partielle) in Form des Differentials einer glatten Abbildung, Extremwerte in Form kritischer Punkte. Tangentialvektoren werden nicht nur für Kurven oder Flächen sondern auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension definiert, und partielle Differentialgleichungen können als Teilmengen in Tangentialbündeln (für lineare pDGL) oder allgemeiner Jet-Bündeln (für höhere Ordnung) verstanden werden. Auch einen Begriff von Integral gibt es in höheren Dimensionen. Oft erhalten wir durch die Verallgemeinerung auch bessere Formulierungen, z.B. haben der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie die Integralsätze der Analysis II eine gemeinsame Verallgemeinerung im Satz von Stokes und die Operationen der Vektoranalysis eine allgemeinere Formulierung im De-Rham-Komplex.

Das zweite wichtige und neue Konzept der Vorlesung, das erlaubt, Analysis in höheren Dimensionen zu betreiben, sind die *Differentialformen*. Informell tauchen Differentialformen bereits in Analysis II auf, als infinitesimale Flächen- bzw. Volumenelemente bei Oberflächen- bzw. Raumintegralen. Vor diesem Hintergrund, in dem Integration auf infinitesimale Volumenmessung begründet wird, ist es sinnvoll, allgemein Differentialformen als alternierende Multilinearformen auf Vektorfeldern zu betrachten. Differentialformen sind die zentralen Werkzeuge, um die Konstruktionen der Vektoranalysis und verschiedene relevante Differentialgleichungen (wie z.B. die Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung oder die Maxwell-Gleichungen) in allgemeinen Dimensionen und *koordinatenunabhängig* zu formulieren. Für die Integrationstheorie sind Differentialformen genau die Objekte, die über (kompakte und orientierte) Mannigfaltigkeiten integriert werden können. Der Differentialformenkomplex von de Rham ist auch das erste Zeugnis einer tieferen Verbindung zwischen Analysis und Topologie, in der die Struktur der Mannigfaltigkeit einen Einfluss auf die Integrierbarkeit von Differentialformen hat bzw. ein Hinweis darauf, dass die Struktur und Geometrie der Mannigfaltigkeit mit Hilfe von Differentialformen untersucht werden kann.

Zum Abschluss der Einleitung noch ein speziellerer Überblick über Inhalt und Aufbau der Vorlesung. Am Beginn der Vorlesung, Kapitel 2, werden noch einmal die relevanten topologischen Grundlagen wiederholt bzw. diskutiert, dabei insbesondere der Begriff der topologischen Mannigfaltigkeiten. Dieses Kapitel enthält auch bereits die wichtigsten Beispiele für Mannigfaltigkeiten, die wir im Laufe des Semesters weiter untersuchen werden. Kapitel 3 werden dann die glatten Mannigfaltigkeiten sowie die glatten Abbildungen definiert. Diese sind die ersten zentralen Begriffe der Vorlesung, die erlauben, koordinatenunabhängig über Differenzierbarkeit zu sprechen. In Kapitel 4 befassen wir uns dann mit Tangentialvektoren bzw. dem Tangentialbündel (linearen Approximationen an Mannigfaltigkeiten) und dem Differential (lineare Approximation an glatte Abbildungen). Diese Verallgemeinerungen der ersten Ableitung einer reell-wertigen Funktion sind in der Differentialtopologie wertvolle Hilfsmittel: die Lösungstheorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungssysteme erlaubt, lineare Information in Tangentialvektoren (oder allgemeiner Vektorfeldern) zu geometrischer Information über die Mannigfaltigkeit zu integrieren. Ein wichtiges Beispiel für dieses Prinzip sind Immersionen und Submersionen, die wir in Kapitel 5 untersuchen: Immersionen induzieren injektive Abbildungen auf den Tangentialbündel, und diese lineare Information reicht aus, um zu zeigen, dass sie lokal immer wie eingebettete Untermannigfaltigkeiten aussehen. Weiter werden in Kapitel 5 kritische Punkte und der Satz von Sard sowie der Einbettungssatz von Whitney diskutiert. Der Einbettungssatz insbesondere zeigt,

dass die abstrakt definierten Mannigfaltigkeiten auch immer konkret als Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ realisiert werden können. Das zweite zentrale Konzept der Vorlesung, Differentialformen, wird in Kapitel 6 definiert und ausführlich diskutiert. Als Multilinearformen auf Vektorfeldern sind Differentialformen die richtige Verallgemeinerung der Flächen- oder Volumenformen aus dem Analysis-Zyklus und erlauben insbesondere koordinatenfreie Formulierung relevanter Differentialgleichungen. Wir diskutieren die zugrundeliegende multilineare Algebra und die relevanten Strukturen für Differentialformen: das Dachprodukt und die äußere Ableitung. Dies führt auf den De-Rham-Komplex, der für den $\mathbb{R}^3$ alle wesentlichen Aussagen der klassischen Vektoranalysis kodiert. Zuletzt definieren wir in Kapitel 7 eine Verallgemeinerung der Integrationstheorie auf kompakten und orientierten glatten Mannigfaltigkeiten und formulieren den Satz von Stokes, der die zwei- und dreidimensionalen Spezialfälle aus der Analysis-Vorlesung verallgemeinert. Der Formalismus der Differentialformen und Integralsätze wird außerdem am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung sowie der Maxwell-Gleichungen des Elektromagnetismus veranschaulicht.

Disclaimer: Wie üblich bei Vorlesungsmitschriften beruht nichts im folgenden Skript auf eigenen wissenschaftlichen Leistungen, Einsichten oder Ergebnissen. Sowohl Definitionen als auch Formulierungen und Beweise für Sätze sind meist das Produkt von ursprünglich vage formulierten Ideen, die durch vielfache Umformulierungen und Kontextveränderungen über Jahrzehnte zu den heute verwendeten Konzepten herangewachsen sind. Insofern können konkrete Zuschreibungen von Fragestellungen, Begriffen, Sätzen oder Beweistechniken üblicherweise nicht vorgenommen werden. (Außerdem stellt sich überraschend oft heraus, dass die üblicherweise mit Sätzen oder Begriffen verknüpften Namen nicht unbedingt die zentralen Entwicklungen des Begriffs reflektieren.)

Das Material des Vorlesungsskripts beruht überwiegend auf gängigen Lehrbüchern zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten bzw. zur Differentialtopologie. Hauptsächlich verwendet wurden die Bücher von Tu [Tu11], Conlon [Con01], Milnor [Mil97] und Hirsch [Hir94]. Die einzige Eigenleistung beschränkt sich daher auf Tipp-, Index-, Logik- und andere Fehler, fragwürdige Anordnung des Materials sowie falsche Schwerpunktsetzungen. (Vermutlich sind allerdings viele meiner Fehler auch von anderen Leuten bereits gemacht worden; damit kann ich leben.)

Vielen Dank an Herrn Jochen Herzhoff und Herrn René Spoerer für viele hilfreiche Korrekturvorschläge.

KAPITEL 2

Topologische Mannigfaltigkeiten: Definitionen und Beispiele

2.1. Grundlagen Topologie

DEFINITION 2.1.1 (topologischer Raum). *Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X , den sogenannten offenen Mengen, so dass*

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
- (2) für eine Menge $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \in \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$, d.h. Vereinigungen von beliebig vielen offenen Mengen sind wieder offen,
- (3) für $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$, d.h. endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.

Die Mengen der Form $X \setminus U$ für $U \in \mathcal{O}$ heißen abgeschlossene Mengen. Für einen Punkt $x \in X$ heißen die offenen Mengen $U \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ offene Umgebungen von x .

BEMERKUNG 2.1.2. (1) In der Notation wird üblicherweise $\mathcal{O}$ weggelassen.

- (2) Es gibt noch andere (aber äquivalente) Definitionen von topologischen Räumen, zum Beispiel durch Konvergenz (näher an der Analysis).

BEISPIEL 2.1.3. (1) Sei X eine Menge. Die diskrete Topologie auf X ist durch $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ definiert. Die indiskrete Topologie ist durch $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ definiert. Die kofinite Topologie auf X hat als offene Mengen genau die Komplemente der endlichen Teilmengen in X und zusätzlich mit $\emptyset$ (wenn X unendlich ist).

- (2) Für einen metrischen Raum (X, d) sind die offenen Mengen wie in der Analysis-Vorlesung definiert: eine Menge $U \subseteq X$ ist offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass die ϵ -Umgebung

$$B(x; \epsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

in U enthalten ist. Dies definiert die metrische Topologie, ein Spezialfall ist insbesondere die "normale" euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

- (3) Für eine total geordnete Menge $(X, \leq)$ ist die Ordnungstopologie auf X gegeben durch die Basis aus den Mengen

$$\begin{aligned}(a, \infty) &= \{b \in X \mid b > a\} \\ (-\infty, b) &= \{a \in X \mid a < b\} \\ (a, b) &= (a, \infty) \cap (-\infty, b)\end{aligned}$$

Für $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Anordnung stimmt die Ordnungstopologie mit der euklidischen Topologie überein.

□

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.4. (1) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass Schnitte von endlich vielen offenen Mengen in X wieder offen

sind. Geben Sie zwei Beispiele an, dass der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen nicht unbedingt offen sein muss.

- (2) Formulieren Sie eine Definition von topologischem Raum, die nur abgeschlossene Mengen benutzt und zeigen Sie, dass diese Definition äquivalent zu Definition 2.1.1 ist.

DEFINITION 2.1.5 (Unterraum). Sei $(X, \mathcal{O}(X))$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von X . Dann definiert $\mathcal{O}(Y) = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$ eine Topologie auf Y , und $(Y, \mathcal{O}(Y))$ heißt Unterraum von X . Wenn $Y \in \mathcal{O}(X)$ ist, spricht man von offenem Unterraum, wenn $X \setminus Y \in \mathcal{O}(X)$ von abgeschlossenem Unterraum.

DEFINITION 2.1.6 (stetige Abbildung). Seien $(X, \mathcal{O}(X))$ und $(Y, \mathcal{O}(Y))$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ (von Mengen) heißt stetige Abbildung, wenn für alle offenen Mengen $U \in \mathcal{O}(Y)$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$.

BEISPIEL 2.1.7. (1) Für eine Menge X ist die Abbildung

$$\text{id}_X: (X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow (X, \{\emptyset, X\})$$

stetig. Allgemeiner: für zwei Topologien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(X, \mathcal{O}_2)$ auf derselben Menge X heißt $\mathcal{O}_1$ feiner als $\mathcal{O}_2$ (bzw. $\mathcal{O}_2$ ist gröber als $\mathcal{O}_1$), wenn die Identität $\text{id}: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ stetig ist.

- (2) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räumen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann ist f stetig für die metrischen Topologien auf X bzw. Y aus Beispiel 2.1.3 (2) genau dann, wenn das aus der Analysis bekannte ϵ - δ -Kriterium erfüllt ist.

□

DEFINITION 2.1.8 (Homöomorphismus). Seien X und Y topologische Räume. Eine Bijektion $f: X \rightarrow Y$ heißt Homöomorphismus, wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Die beiden Räume X und Y heißen homöomorph, wenn es einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt.

DEFINITION 2.1.9 (Hausdorff-Raum, Trennungsaxiom T_2). Ein topologischer Raum X heißt Hausdorff-Raum, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ offene Umgebungen U_x von x und U_y von y existieren, so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

BEISPIEL 2.1.10. (1) Die kofinite Topologie auf einer Menge X ist genau dann hausdorffsch, wenn X endlich ist.

- (2) Metrische Räume mit der metrischen Topologie sind Hausdorff-Räume.
 (3) Ein Unterraum eines Hausdorff-Raums ist wieder ein Hausdorff-Raum.

□

DEFINITION 2.1.11 (Abzählbarkeitsaxiome). Sei X ein topologischer Raum.

- (1) Erstes Abzählbarkeitsaxiom: für jeden Punkt $x \in X$ existiert eine Folge von offenen Umgebungen $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass für jede offene Umgebung V von x ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, für das $U_n \subset V$ gilt.
 (2) Zweites Abzählbarkeitsaxiom: es existiert eine abzählbare Basis der Topologie auf X , d.h. es gibt eine abzählbare Menge $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von offenen Mengen in X , so dass jede offene Menge in X als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$ geschrieben werden kann.

BEMERKUNG 2.1.12. Eine erste axiomatische Definition des Begriffs topologischer Raum wurde von Felix Hausdorff in "Grundzüge der Mengenlehre" vorgenommen. Die Terminologie "Abzählbarkeitsaxiom" erinnert noch daran.

BEISPIEL 2.1.13. *Metrische Räume, die eine abzählbare dichte Teilmenge haben, erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Lokal kompakte Hausdorff-Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, sind metrisierbar.* $\square$

DEFINITION 2.1.14. *Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn es keine diskunkte Zerlegung von X in nichtleere offene Teilmengen gibt.*

DEFINITION 2.1.15 (Kompaktheit). *Ein topologischer Raum X heißt kompakt, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung existiert. Ein topologischer Raum X heißt lokal kompakt, wenn für jeden Punkt $x \in X$ eine kompakte Menge $K \subseteq X$ existiert, die eine offene Umgebung U von x enthält.*

BEISPIEL 2.1.16. *Der Satz von Heine–Borel besagt, dass die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ genau die kompakten Teilmengen sind. Insbesondere ist die Einheitskreislinie $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ kompakt, aber $\mathbb{R}^n$ nicht.* $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.17. *Sei X ein Hausdorffraum. Zeigen Sie:*

- (1) *Ist X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen, so ist A auch kompakt.*
- (2) *Ist $K \subset X$ kompakt, dann ist K abgeschlossen in X .*
- (3) *Ist $K \subset X$ kompakt und $M \subset K$, dann ist $\bar{M}$ kompakt und in K enthalten.*

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.18. *Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige surjektive Abbildung zwischen Hausdorffräumen.*

- (1) *Zeigen Sie: wenn X kompakt ist, dann ist auch Y kompakt.*
- (2) *Geben Sie ein Beispiel, in dem Y kompakt, aber X nicht kompakt ist.*

DEFINITION 2.1.19. *Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ topologischer Räume heißt eigentlich, wenn die Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.*

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.20. *Eine eigentliche stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einen lokal kompakten Hausdorff-Raum Y ist abgeschlossen, d.h. Bilder von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.*

DEFINITION 2.1.21 (Parakompaktheit). *Sei X ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ heißt lokal endlich, wenn es für jeden Punkt eine offene Umgebung $V \subseteq X$ gibt, so dass $V \cap U_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt.*

Eine Überdeckung $\{V_i\}_{i \in I}$ heißt Verfeinerung einer Überdeckung $\{U_j\}_{j \in J}$, wenn für jede Teilmenge V_i ein Index $j \in J$ existiert, so dass $V_i \subseteq U_j$.

Ein topologischer Raum X heißt parakompakt, wenn jede Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung hat.

BEISPIEL 2.1.22. *Ein Beispiel für eine nicht lokal endliche Überdeckung von $\mathbb{R}$ ist $\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \mid x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.* $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.23. *Geben Sie eine lokal endliche Verfeinerung dieser Überdeckung an.*

2.2. Quotiententopologie und Zusammenkleben

DEFINITION 2.2.1 (Quotiententopologie). *Sei X ein topologischer Raum und $\sim \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen $[x]_{\sim} = \{y \in X \mid y \sim x\}$ wird mit $X/\sim$ bezeichnet und heißt Quotientenraum; wir haben eine natürliche surjektive Abbildung $\pi: X \rightarrow X/\sim: x \mapsto [x]$. Auf $X/\sim$ wird eine Topologie, die Quotiententopologie, dadurch definiert, dass eine Menge $U \subset X/\sim$ offen ist genau dann, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist.*

BEMERKUNG 2.2.2. Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf $X/\sim$, für die die Projektion $\pi: X \rightarrow X/\sim$ stetig ist.

ÜBUNGSAUFGABE 2.2.3. Sei X ein topologischer Raum und $\sim \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X . Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, die auf den Äquivalenzklassen konstant ist. Dann ist die induzierte Abbildung $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn f stetig ist.

BEISPIEL 2.2.4. Die Kreislinie erhalten wir als Quotient $S^1 = [0, 1]/\sim$ mit der Äquivalenzrelation, die durch $0 \sim 1$ gegeben ist. Alternativ erhalten wir die Kreislinie als Quotient $S^1 = \mathbb{R}/\sim$ mit der Äquivalenzrelation

$$\sim = \{x \sim y \mid \exists n \in \mathbb{Z} : x = y + n\}.$$

□

BEISPIEL 2.2.5. Die Kugeloberfläche erhalten wir als Quotient $S^2 = [0, 1]^2/\sim$ mit der Äquivalenzrelation

$$\sim = \{x \sim y \mid x, y \in \{0, 1\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0, 1\}\}.$$

□

BEISPIEL 2.2.6. Häufig werden Quotienten in der (Differential-)Topologie eingesetzt, um topologische Räume entlang von Unterräumen zusammenzukleben. Dazu betrachten wir ein Diagramm von topologischen Räumen

$$X_1 \xleftarrow{i_1} Z \xrightarrow{i_2} X_2.$$

Wir definieren einen neuen topologischen Raum

$$X_1 \cup_Z X_2 := X_1 \sqcup X_2 / \{i_1(z) \sim i_2(z) \mid z \in Z\},$$

den wir durch Zusammenkleben von X_1 und X_2 entlang Z erhalten. Dabei sind die Abbildungen i_1 und i_2 häufig Inklusionen abgeschlossener Unterräume, das ist aber nicht notwendig und funktioniert für beliebige stetige Abbildungen. Der zusammengeklebte Raum $X_1 \cup_Z X_2$ hat eine universelle Eigenschaft, diese Konstruktion in der Kategorientheorie wird als Pushout bezeichnet. □

Im Allgemeinen ist ein Quotient eines Hausdorff-Raums nach einer Äquivalenzrelation nicht wieder ein Hausdorff-Raum.

DEFINITION 2.2.7. Wir bezeichnen eine Äquivalenzrelation als offen, wenn die Projektion $\pi: X \rightarrow X/\sim$ eine offene Abbildung ist, d.h. für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ ist das Bild $\pi(U)$ offen in $X/\sim$. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ die Vereinigung $\cup_{x \in U} [x] = \pi^{-1}(\pi(U))$ der Äquivalenzklassen von Punkten in U wieder offen ist.

PROPOSITION 2.2.8. Sei X ein topologischer Raum und $\sim \subseteq X \times X$ eine offene Äquivalenzrelation. Dann ist der Quotient $X/\sim$ genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn $\sim \subseteq X \times X$ eine abgeschlossene Menge ist. Insbesondere ist ein topologischer Raum X hausdorffsch genau dann wenn die Diagonale $X \subset X \times X$ abgeschlossen ist.

BEWEIS. Die Teilmenge $\sim$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $X \times X \setminus \sim$ offen ist. Nach Definition der Produkttopologie ist das genau dann der Fall, wenn für je zwei Punkte x, y mit $[x] \neq [y]$ offene Umgebungen U und V existieren, so dass $U \times V \cap \sim = \emptyset$.

Da $\sim$ offen ist, sind die Projektionen $\pi(U)$ und $\pi(V)$ offene Umgebungen von $[x]$ bzw. $[y]$, und aus $U \times V \cap \sim = \emptyset$ folgt, dass $\pi(U)$ und $\pi(V)$ disjunkt sind. Damit haben wir die Richtung " $\Leftarrow$ " gezeigt.

Wenn nun $X/\sim$ ein Hausdorff-Raum ist, haben wir für je zwei Äquivalenzklassen $[x] \neq [y]$ disjunkte offene Umgebungen U und V in $X/\sim$. Mit der Projektionsabbildung können wir $U = \pi(\pi^{-1}(U))$ und $V = \pi(\pi^{-1}(V))$ schreiben, und $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ sind also disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y . $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 2.2.9. Sei X ein topologischer Raum und $\sim \subseteq X \times X$ eine offene Äquivalenzrelation. Sei $\{B_i\}_{i \in I}$ eine Basis von X . Zeigen Sie, dass die Mengen $\{\pi(B_i)\}_{i \in I}$ eine Basis der Quotiententopologie auf $X/\sim$ bilden. Insbesondere ist für eine offene Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem Raum X , der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dieses Abzählbarkeitsaxiom auch wieder für den Quotienten $X/\sim$ erfüllt.

ÜBUNGSAUFGABE 2.2.10. (*) Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$, für die $x \sim y$ genau dann, wenn $x, y \in \mathbb{Z}$ oder $x = y$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}/\sim$ nicht das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

2.3. Topologische Mannigfaltigkeiten

DEFINITION 2.3.1 (lokal euklidischer Raum). Ein topologischer Raum X heißt lokal euklidisch, wenn für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U \subset X$ existiert, so dass es einen Homöomorphismus $\phi: U \xrightarrow{\cong} W$ auf eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ gibt.

ÜBUNGSAUFGABE 2.3.2. Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$ ein Homöomorphismus $B(x; \epsilon) \cong \mathbb{R}^n$ existiert. Zeigen Sie die analoge Aussage für den offenen Würfel

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1\}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.3.3. Welche der folgenden Räume sind hausdorffsch/lokal euklidisch/erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom?

- (1) offene Unterräume $U \subset \mathbb{R}^n$
- (2) $X = \mathbb{R}^n \sqcup \{*\}$, so dass eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist wenn i) $*$ $\notin U$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen oder ii) $*$ $\in U$ und $U \setminus \{*\} \subset \mathbb{R}^n$ offen.
- (3) Alexandroff-Gerade (lange Gerade): zwei Kopien der Ordnungstopologie auf $\omega_1 \times [0, 1)$ identifiziert an $(0, 0)$.
- (4) die Teilmenge $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$ mit der Unterraumtopologie.

SATZ 2.3.4 (Invarianz der Dimension). Gegeben seien offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Wenn U und V homöomorph sind, dann ist schon $n = m$.

BEMERKUNG 2.3.5. Der Satz über die Invarianz der Dimension geht um einiges über die Methoden der Vorlesung hinaus. Beweisen kann man den Satz mit den Werkzeugen aus der Vorlesung "Topologie I", insbesondere der relativen Homologie. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $x \in U$ berechnet man

$$H_k(U, U \setminus \{x\}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die relative Homologie $H_k(U, U \setminus \{x\})$ kennt also die Dimension der offenen Teilmenge U bzw. des umgebenden $\mathbb{R}^n$. Die Homöomorphie-Invarianz der Homologie impliziert dann die Invarianz der Dimension.

PROPOSITION 2.3.6. Sei X ein lokal euklidischer Raum. Dann ist die lokale Dimension eine wohldefinierte und lokal konstante Funktion $d: X \rightarrow \mathbb{N}$. Wenn X zusammenhängend ist, dann ist die lokale Dimension konstant.

BEWEIS. Für einen Punkt $x \in X$ definieren wir die lokale Dimension als $d(x) := n$, wenn ein Paar (U, ϕ) bestehend aus einer offenen Menge $U \subseteq X$ und einem Homöomorphismus $\phi: U \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert. Nach Definition von lokal euklidischen Räumen existiert mindestens ein Paar (U, ϕ) .

Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, seien $U, V \subseteq X$ offene Umgebungen von x , mit Homöomorphismen $\phi: U \rightarrow \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi: V \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^m$. Für den Schnitt $U \cap V$ sind dann auch $\phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Aus dem Satz über die Invarianz der Dimension, angewendet auf den Homöomorphismus

$$\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \xrightarrow{\cong} \phi(U \cap V),$$

folgt $n = m$. Damit ist insbesondere die lokale Dimension wohldefiniert.

Nach Definition existiert für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und ein Homöomorphismus $U \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass insbesondere die lokale Dimension auf U konstant n ist. Damit ist die lokale Dimension lokal konstant. Wenn X ein zusammenhängender Raum ist, muss die lokale Dimension bereits konstant sein. $\square$

DEFINITION 2.3.7 (Topologische Mannigfaltigkeit). *Ein topologischer Raum X heißt topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension n), wenn X Hausdorff und lokal euklidisch (von Dimension n) ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Eine Karte für die topologische Mannigfaltigkeit X ist ein Paar (U, ϕ) bestehend aus einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ und einem Homöomorphismus $\phi: U \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Atlas für X ist eine Menge von Karten $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, so dass $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Für zwei Karten (U, ϕ) und (V, ψ) heißt der dazugehörige eingeschränkte Homöomorphismus

$$\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \xrightarrow{\psi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\phi} \phi(U \cap V)$$

der Kartenwechsel.

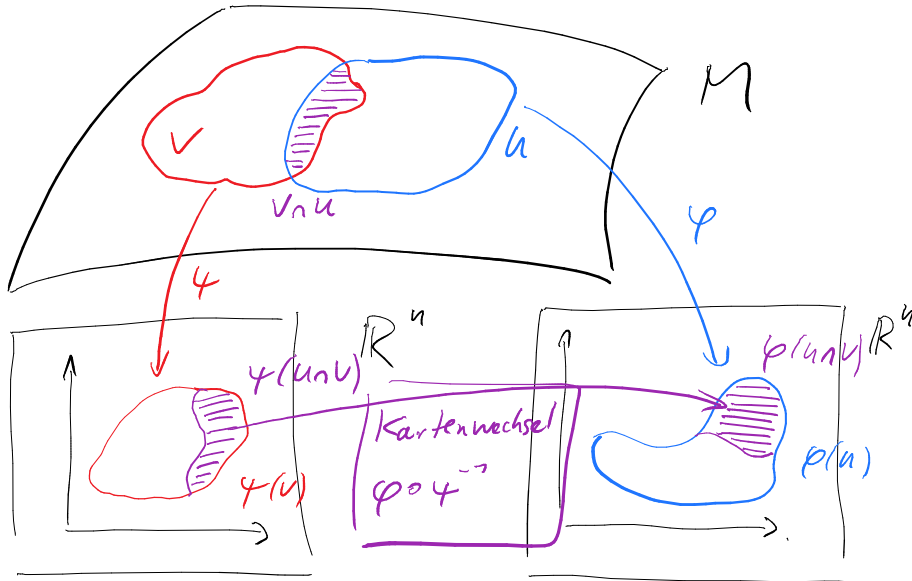


ABBILDUNG 1. Atlas und Kartenwechsel

ÜBUNGSAUFGABE 2.3.8. (*) Ist die durch $y^2 = x^3$ in $\mathbb{R}^2$ definierte Teilmenge (mit der induzierten Topologie) eine topologische Mannigfaltigkeit?

Hinweis: Zeichnen Sie ein Bild, aber lassen Sie sich dadurch nicht verwirren.

2.4. Beispiele

BEISPIEL 2.4.1. Die n -dimensionale Einheitssphäre

$$S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1\}$$

ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Topologie ist die Unterraumtopologie, die von der Einbettung in $\mathbb{R}^{n+1}$ induziert wird. Insbesondere ist S^n mit der Unterraumtopologie hausdorffsch und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Einen Atlas erhält man mit der stereographischen Projektion: für das Komplement $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ des Nordpols gibt die stereographische Projektion auf die Koordinatenebene $\{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^n$ eine Abbildung

$$S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n: (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Eine Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right).$$

Aus den Formeln ist dann direkt zu sehen, dass beide Abbildungen stetig sind; wir haben also einen Homöomorphismus $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Analog erhält man eine Abbildung $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vom Komplement des Südpols, indem die Nenner in der obigen Formel durch $1 + x_{n+1}$ ersetzt; für die Umkehrfunktion muss nur der letzte Term mit -1 multipliziert werden.

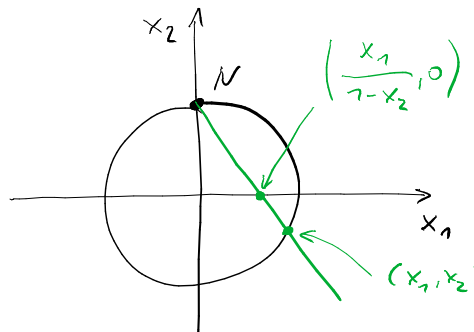


ABBILDUNG 2. Stereographische Projektion

Damit haben wir also einen Atlas, der zeigt, dass S^n eine topologische Mannigfaltigkeit ist. $\square$

BEMERKUNG 2.4.2. In der Kartographie gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Erdoberfläche auf Karten zu projizieren. Die bekannte Mercator-Projektion ist winkeltreu. Sie ist aber weder flächentreu (zu erkennen daran, dass Grönland auf der typischen Mercator-Projektion größer erscheint als Afrika, obwohl das tatsächliche Verhältnis der Flächen 2,2 Mkm² zu 30 Mkm² ist) noch richtungstreu (d.h. die kürzesten Verbindungen zwischen Punkten, die Großkreise, werden nicht auf Geraden projiziert). Es gibt andere Projektionen, die flächentreu sind.

Genau dieses Problem tritt auch beim Begriff der Mannigfaltigkeit auf. Für topologische Mannigfaltigkeiten sind die Abbildungen nur Homöomorphismen. Man kann auf den Karten also nur topologische Information erkennen. Messungen (von

Längen, Winkeln, Flächen etc.) sind nicht möglich. Nicht einmal eine sinnvolle Definition von Ableitung oder Integral sind möglich. Will man mehr Information über die Mannigfaltigkeit, müssen die Kartenwechsel auch kompatibel mit dieser Information sein.

Für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten werden wir später sehen, dass die Begriffe der Analysis auf Mannigfaltigkeiten definiert werden können, wenn die Kartenwechsel beliebig oft differenzierbar sind (differenzierbare Mannigfaltigkeiten). Wenn man Winkel messen möchte, müssen die Kartenwechsel winkeltreu sein; das führt auf den Begriff der konformen Mannigfaltigkeit.

ÜBUNGSAUFGABE 2.4.3. Zeigen Sie, dass das Produkt $X \times Y$ von topologischen Mannigfaltigkeiten X und Y wieder eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Dabei trägt $X \times Y$ die Produkttopologie, für die eine Basis durch die Menge

$$\{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

der "offenen Rechtecken" gegeben ist.

BEISPIEL 2.4.4. Der n -dimensionale Torus ist definiert durch $T^n := (S^1)^{\times n}$. Nach Übung 2.4.3 und Beispiel 2.4.1 erhält der n -Torus die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit. Insbesondere für den 2-Torus kann man auch eine Mannigfaltigkeitenstruktur durch die Parametrisierung

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2: (u, v) \mapsto ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u)$$

erhalten. Beide Strukturen sind homöomorph. $\square$

- ÜBUNGSAUFGABE 2.4.5. (1) Zeigen Sie, dass der 2-Torus T^2 einen Atlas aus 2 Karten hat.
 (2) (*) Begründen Sie anhand eines Bildes, dass es auch einen Atlas aus 3 Karten gibt, deren Kartenbereiche homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ sind.

BEISPIEL 2.4.6. Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ hat als Punkte genau die 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Skalarmultiplikation

$$\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}: (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

induziert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $(x_0, \dots, x_n)$ mit

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = \{(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$$

Die Abbildung

$$(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{RP}^n: [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \mathbb{R} \cdot (x_0, \dots, x_n)$$

von der Menge der $\sim$ -Äquivalenzklassen auf den $\mathbb{RP}^n$ ist eine Bijektion, das Tupel $[x_0 : \dots : x_n]$ nennt man auch die homogenen Koordinaten des Punktes $\mathbb{R} \cdot (x_0, \dots, x_n)$.

Wir statten $\mathbb{RP}^n$ mit der Quotiententopologie aus. Es existiert ein Atlas mit $n+1$ Karten, der den $\mathbb{RP}^n$ zu einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit macht: für eine Koordinate x_i haben wir auf der offenen Menge $\{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ eine Bijektion

$$\{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \hat{x}_i, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

wobei die Notation $\hat{x}_i$ bedeutet, dass der Eintrag x_i aus dem $n+1$ -Tupel entfernt wird. Die Topologie auf dem $\mathbb{RP}^n$ ist eindeutig dadurch bestimmt, dass diese Abbildungen Homöomorphismen sein sollen; das heißt, dass der $\mathbb{RP}^n$ auch durch Zusammenkleben der offenen Mengen $\{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ konstruiert werden kann.

Analog kann man den komplex-projektiven Raum $\mathbb{CP}^n$ mit der Struktur einer $2n$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit ausstatten. $\square$

- BEISPIEL 2.4.7. (1) Auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Äquivalenzrelation gegeben durch $x \sim y$ genau dann, wenn $x = \pm y$. Der Quotientenraum $S^n / \sim$ kann mit $\mathbb{RP}^n$ identifiziert werden. Wir erhalten die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit auf $\mathbb{RP}^n$, indem wir S^n mit solchen offenen Teilmengen U überdecken, für die die Projektion $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ eine Bijektion $U \rightarrow \pi(U)$ induziert. Für jede solche Teilmenge $\pi(U) \subset \mathbb{RP}^n$ benutzen wir die Zusammensetzung von π^{-1} und einer entsprechenden Karte für S^n als Karte für $\mathbb{RP}^n$. Die entstehende Topologie auf $\mathbb{RP}^n$ ist homöomorph zu der in Beispiel 2.4.6 diskutierten.
- (2) Auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Gruppenwirkung des Standardgitters $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ durch Addition gegeben:

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: (a, x) \mapsto a + x$$

Die Menge der Nebenklassen der Untergruppe $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ wird mit $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ bezeichnet. Die Projektion $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ induziert eine Topologie auf $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$; tatsächlich sogar die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1: x \mapsto \exp(2\pi i x)$ induziert einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$. $\square$

Wir können allgemeiner Mannigfaltigkeiten als Quotienten nach geeigneten Gruppenwirkungen konstruieren.

DEFINITION 2.4.8. Für eine topologische Mannigfaltigkeit M und eine Gruppe G (mit der diskreten Topologie) nennen wir eine stetige Gruppenwirkung $\rho: G \times M \rightarrow M$ eigentlich diskontinuierlich, wenn

- (1) für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U_x existiert für die $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ schon impliziert, dass g das neutrale Element von G ist, und
- (2) die Abbildung $(\text{pr}_2, \rho): G \times X \rightarrow X \times X: (g, x) \mapsto (x, \rho(g, x))$ eigentlich ist, d.h. für eine kompakte Menge $K \subset X \times X$ ist das Urbild $(\text{pr}_2, \rho)^{-1}(K)$ wieder kompakt in $G \times X$.

PROPOSITION 2.4.9. Sei M eine Mannigfaltigkeit, G eine diskrete Gruppe und $\rho: G \times M \rightarrow M$ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung. Für die Äquivalenzrelation $\sim_G \subset M \times M$ auf M , die durch

$$x \sim_G y \iff \exists g \in G: gx = y$$

gegeben ist, ist der Quotientenraum $M/G := M / \sim$ eine topologische Mannigfaltigkeit.

BEWEIS. Die Äquivalenzrelation ist offen: die Stetigkeit der Wirkungsabbildung $\rho: G \times M \rightarrow M: (g, x) \mapsto g \cdot x$ bedeutet, dass für eine offene Menge $U \subseteq M$ und ein Element $g \in G$ die Menge $g \cdot U = \{g \cdot x \mid x \in U\}$ wieder offen ist. Insbesondere ist für eine offene Menge $U \subseteq M$ die Menge $G \cdot U = \bigcup_{x \in U} G \cdot x$ wieder offen.

Mit Übungsaufgabe 2.2.9 sehen wir, dass das zweite Abzählbarkeitsaxiom für M/G erfüllt ist.

Wir wollen als Nächstes zeigen, dass der Quotient hausdorffsch ist, dass also für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $y \notin G \cdot x$ offene Umgebungen U und V von x und y existieren, so dass für alle $g \in G$ gilt $g(U) \cap V = \emptyset$. Aus der Eigentlichkeit der Abbildung $(\text{pr}_2, \rho): G \times M \rightarrow M \times M$ folgt, dass das Bild $(\text{pr}_2, \rho)(G \times M) \subseteq$

$M \times M$ abgeschlossen ist. Diese Menge $(\text{pr}_2, \rho)(G \times M) \subseteq M \times M$ ist aber genau die Äquivalenzrelation $\sim_G$. Die Behauptung folgt aus Proposition 2.2.8.

Es fehlen noch die lokalen Karten in einen geeigneten $\mathbb{R}^n$. Für $x \in M$ existiert eine offene Umgebung U , so dass für alle $g \in G \setminus \{e\}$ gilt $g(U) \cap U = \emptyset$. Nach Definition der Quotiententopologie ist $\pi: U \rightarrow \pi(U)$ ein Homöomorphismus auf eine offene Umgebung $\pi(U)$ von $\pi(x) \in M/G$. Da M eine topologische Mannigfaltigkeit ist, existiert auch eine offene Umgebung V von x und ein Homöomorphismus $\phi: V \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Zusammensetzung

$$\pi(U \cap V) \xrightarrow{\pi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\phi} \phi(U \cap V) \subseteq \phi(V) = \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge eines euklidischen Raumes. Damit haben wir auch gezeigt, dass M/G lokal euklidisch ist. $\square$

BEISPIEL 2.4.10. *Ein Beispiel für eine Gruppenwirkung ist die Wirkung von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der (offenen) oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ durch Möbiustransformationen*

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Diese Wirkung ist nicht eigentlich diskontinuierlich, da z.B. die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fixpunkte haben (wo?) und das Zentrum $\pm I_2$ trivial operiert. Trotzdem ist der Quotient in diesem Fall eine topologische Mannigfaltigkeit, homöomorph zur Kreisscheibe. Die Wirkung wird eigentlich diskontinuierlich, wenn man sich auf geeignete Kongruenzuntergruppen

$$\Gamma(m) := \{A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid A \equiv I_2 \pmod{m}\} = \ker(\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$$

für $m \geq 3$ einschränkt. Das Ergebnis sind die sogenannten Modulkurven $Y(m)$, die in der Zahlentheorie für die Klassifikation von elliptischen Kurven mit Level- m -Struktur benutzt werden. $\square$

Durch geeignete Identifikationen des Randes können wir verschiedene interessante Flächen aus $[-1, 1] \times [-1, 1]$ konstruieren.

BEISPIEL 2.4.11. *Wir erhalten den 2-Torus als Quotienten $[-1, 1]^2 / \sim$ mit der durch $(-1, s) \sim (1, s)$, $s \in [-1, 1]$, und $(t, -1) \sim (t, 1)$, $t \in [-1, 1]$, gegebenen Äquivalenzrelation.* $\square$

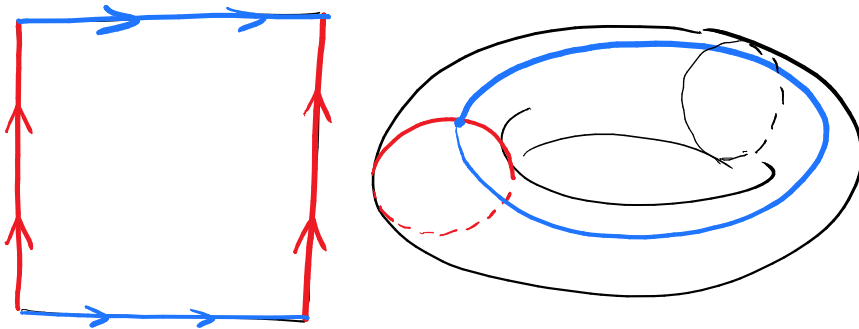


ABBILDUNG 3. Torus als Quotient von $[-1, 1]^2$

BEISPIEL 2.4.12. Wir geben ein paar Beispiele von nicht-orientierbaren Flächen; diese haben nur eine Seite, s. Abbildung 4.

- Das Möbiusband kann als Quotient $[-1, 1] \times [-1, 1] / \sim$ mit der durch $(-1, -s) \sim (1, s)$, $s \in [-1, 1]$ gegebenen Äquivalenzrelation konstruiert werden
- Die Kleinsche Flasche kann als Quotient $[-1, 1] \times [-1, 1] / \sim$ mit der durch $(-1, -s) \sim (1, s)$, $s \in [-1, 1]$ und $(t, -1) \sim (t, 1)$, $t \in [-1, 1]$, gegebenen Äquivalenzrelation konstruiert werden.
- Die reell-projektive Ebene kann als Quotient $[-1, 1] \times [-1, 1] / \sim$ mit der durch $(-1, -s) \sim (1, s)$, $s \in [-1, 1]$ und $(-t, -1) \sim (t, 1)$, $t \in [-1, 1]$, gegebenen Äquivalenzrelation konstruiert werden.

Zu beachten ist, dass der Selbstschnitt in der Darstellung der Kleinschen Flasche nur durch den Versuch der dreidimensionalen Darstellung zustande kommt. (Insbesondere ist die Kleinsche Flasche eine Mannigfaltigkeit.) Auch dreidimensionale Darstellungen der reell-projektiven Ebene haben immer Selbstschnitte, ein bekanntes Beispiel ist die Boysche Fläche. $\square$

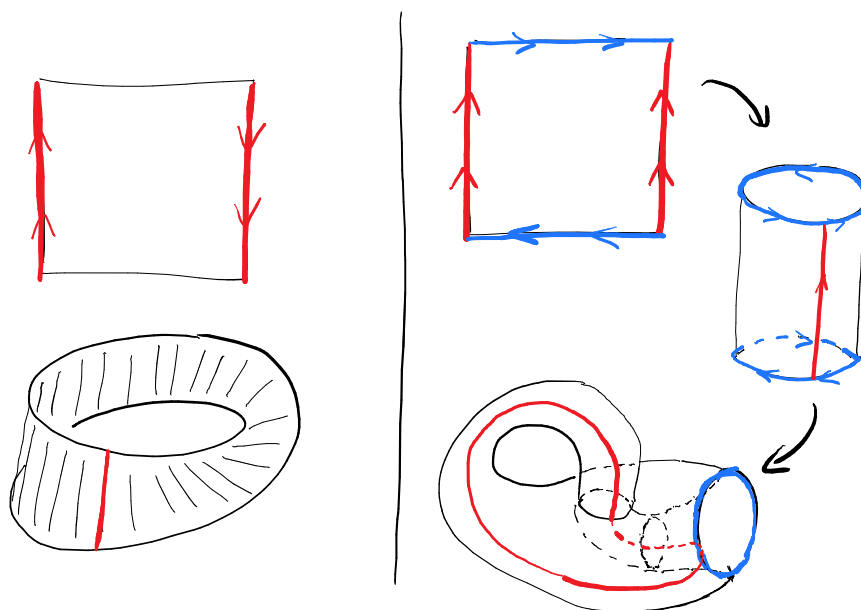


ABBILDUNG 4. Möbiusband und Kleinsche Flasche

ÜBUNGSAUFGABE 2.4.13. Wir betrachten noch einmal die Quotientenbeschreibung der Kleinschen Flasche als $[-1, 1]^2 / \sim$ mit der durch $(-1, -s) \sim (1, s)$, $s \in [-1, 1]$, und $(t, -1) \sim (t, 1)$, $t \in [-1, 1]$, gegebenen Äquivalenzrelation. Zeigen Sie, dass dieser Quotient lokal euklidisch ist.

2.5. Topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand

Es gibt noch wesentliche Beispiele von Teilmengen in $\mathbb{R}^n$, die keine topologischen Mannigfaltigkeiten sind: die abgeschlossenen ϵ -Bälle $\overline{B}(x; \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq \epsilon\}$. Die Punkte im Rand $\partial \overline{B}(x; \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = \epsilon\}$ haben keine offenen Umgebungen, die homöomorph zu offenen Teilmengen eines euklidischen Raumes wären.

DEFINITION 2.5.1. Der euklidische Halbraum von Dimension n ist die Menge

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Der Rand

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

kann kanonisch mit $\mathbb{R}^{n-1}$ identifiziert werden, indem die letzte Koordinate weglassen wird. Das Innere von $\mathbb{H}^n$ ist

$$\mathring{\mathbb{H}}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

DEFINITION 2.5.2 (topologische Mannigfaltigkeit mit Rand). Ein topologischer Raum X heißt topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, wenn X hausdorffsch ist, das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U von x und ein Homöomorphismus $\phi: U \rightarrow \tilde{U}$ auf eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ existiert.

Ein Punkt $x \in X$ heißt Randpunkt, wenn es eine Karte (U, ϕ) mit $x \in U$ gibt, für die gilt $\phi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$. Die Menge aller Randpunkte heißt der Rand von X und wird mit ∂X bezeichnet. Ein Punkt $x \in X$ heißt innerer Punkt, wenn es eine Karte (U, ϕ) mit $x \in U$ gibt, für die gilt $\phi(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$. Die Menge aller inneren Punkte heißt Inneres von X und wird mit $\mathring{X}$ bezeichnet.

BEMERKUNG 2.5.3. Eine Umformulierung der Invarianz der Dimension ist die folgende "Invarianz von Gebieten": Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine injektive stetige Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Aus dieser Aussage folgt, dass kein Punkt x in einer Mannigfaltigkeit M mit Rand gleichzeitig Randpunkt und innerer Punkt sein kann. Ausserdem folgt daraus auch, dass ∂M eine $\dim M - 1$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist, und $\mathring{M}$ eine $\dim M$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.



ABBILDUNG 5. Seifert-Fläche für den Kleeblattknoten als Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit Rand

ÜBUNGSAUFGABE 2.5.4. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass der Rand eine $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

BEISPIEL 2.5.5. Der abgeschlossene n -dimensionale Einheitsball $\overline{B}(0; 1) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Zuerst bemerken wir, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ eine Rotation ϕ in der orthogonalen Gruppe $O(n)$ existiert, die v auf den Einheitsvektor e_n schickt. Insbesondere reicht es zu zeigen, dass der Einheitsvektor e_n eine offene Umgebung hat, die homöomorph zu einer

offenen Teilmenge von $\mathbb{H}^n$ ist. Eine solche Umgebung ist durch $x_n > 0$ gegeben, und der entsprechende Homöomorphismus durch

$$\phi: U \rightarrow \mathbb{H}^n: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2})$$

Die Abbildung schickt Einheitsvektoren auf $\partial\mathbb{H}^n$ und alle anderen Punkte im In-

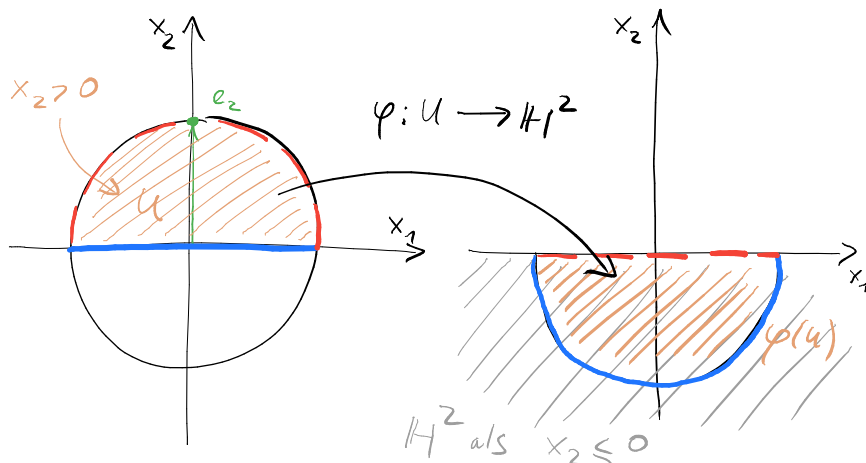


ABBILDUNG 6. Karte für Umgebung von e_2 in $\overline{B}(0;1) \subset \mathbb{R}^2$

neren des Einheitsballs auf $\mathbb{H}^n$; eine inverse Abbildung ist durch

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2})$$

gegeben. Aus diesen Aussagen folgt, dass S^{n-1} der Rand von des Einheitsballs ist, und das Innere des abgeschlossenen Einheitsballs ist der offene Einheitsball. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 2.5.6. Geben Sie einen Homöomorphismus zwischen der abgeschlossenen Kreisscheibe D^2 und dem abgeschlossenen Quadrat $[-1,1]^2$ an.

ÜBUNGSAUFGABE 2.5.7. Seien M und N topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand. Dann ist $M \times N$ eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand

$$\partial(M \times N) = (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N).$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.5.8. Können Sie die eindimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten mit bzw. ohne Rand klassifizieren?

KAPITEL 3

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen

3.1. Partielle Ableitungen und C^∞ -Abbildungen

Wir schreiben die Koordinaten(-funktionen) des $\mathbb{R}^n$ als $x^1, \dots, x^n$: ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ hat dann die Koordinaten $(x^1(p), \dots, x^n(p))$. Dies entspricht den Konventionen der Differentialgeometrie, in denen Vektorfelder mit unteren Indizes und Differentialformen mit oberen Indizes bezeichnet werden, s. auch Bemerkung 6.2.18.

DEFINITION 3.1.1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in U$ ein Punkt.

- Für eine natürliche Zahl k heißt die Funktion C^k am Punkt p , wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}}$ für alle $j \leq k$ am Punkt p existieren und stetig sind.
- Die Funktion heißt C^k auf U , wenn sie C^k für alle Punkte $p \in U$ ist.
- Die Funktion heißt C^∞ am Punkt p , wenn sie C^k für alle k ist.
- Eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt C^k am Punkt p , wenn alle Komponentenfunktionen $(f^1, \dots, f^n)$ C^k am Punkt p sind.

BEMERKUNG 3.1.2. Die C^0 -Funktionen sind genau die stetigen Funktionen, C^∞ -Funktionen heißen auch differenzierbar bzw. glatt. Wir bezeichnen die Menge der C^∞ -Funktionen auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $C^\infty(U)$.

3.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

DEFINITION 3.2.1. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.

- (1) Zwei Karten $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ und $(V, \psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ sind C^∞ -kompatibel, wenn die beiden Kartenwechselabbildungen

$$\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V) \quad \text{und} \quad \psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

C^∞ -Abbildungen sind.

- (2) Ein C^∞ -Atlas für M ist eine Menge $\{(U_i, \phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n)\}_{i \in I}$ von paarweise C^∞ -kompatiblen Abbildungen mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.
- (3) Eine Karte (V, ψ) ist kompatibel mit einem C^∞ -Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, wenn sie kompatibel mit allen Karten im Atlas ist.
- (4) Ein C^∞ -Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ heißt maximal, wenn jede Karte, die mit dem Atlas kompatibel ist, bereits im Atlas enthalten ist.
- (5) Eine glatte bzw. C^∞ -Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem maximalen C^∞ -Atlas.

BEMERKUNG 3.2.2. Analoge Begriffe gibt es auch für C^r -Abbildungen, und C^0 -Mannigfaltigkeiten sind genau topologische Mannigfaltigkeiten. Das Bild für Atlas und Kartenwechsel ist genau dasselbe wie für topologische Mannigfaltigkeiten, s. Abbildung 1 auf Seite 10, nur dass in Definition 3.2.1 Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Homöomorphismen gestellt werden.

LEMMA 3.2.3. *Sei $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ ein Atlas für einen lokal euklidischen Raum. Wenn zwei Karten (V_1, ψ_1) und (V_2, ψ_2) mit dem Atlas kompatibel sind, sind sie kompatibel miteinander.*

BEWEIS. Zu zeigen ist, dass $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ glatt auf $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ ist. Für einen Punkt $p \in V_1 \cap V_2$ gibt es eine Karte (U_i, ϕ_i) im Atlas so dass $p \in U_i$ ist, also $p \in V_1 \cap V_2 \cap U_i$. Da die Karten beide kompatibel mit dem Atlas sind, ist die Komposition

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = (\psi_2 \circ \phi_i^{-1}) \circ (\phi_i \circ \psi_1^{-1})$$

glatt auf $\psi_1(V_1 \cap V_2 \cap U_i)$. Daraus folgt, dass $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ glatt auf $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ ist; analog sieht man, dass $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ glatt auf $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ ist. $\square$

PROPOSITION 3.2.4. *Jeder C^∞ -Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ auf einem lokal euklidischen Raum ist in einem eindeutigen maximalen C^∞ -Atlas enthalten.*

BEWEIS. Wir betrachten die Menge aller Atlanten, die kompatibel mit dem gegebenen Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ sind. Diese Menge ist partiell geordnet durch Mengeninklusion, und abgeschlossen unter Vereinigungen nach Lemma 3.2.3. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element dieser Menge, also ein maximaler Atlas $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$.

Wenn es eine Karte (W, σ) gibt, die mit dem Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ kompatibel ist, aber nicht im Atlas $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ enthalten ist, dann ist $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J} \cup (W, \sigma)$ ein größerer Atlas, was der Maximalität widerspricht. Also enthält der maximale Atlas alle Karten, die mit dem gegebenen Atlas kompatibel sind.

Wenn es einen anderen Atlas $\{(W_k, \sigma_k)\}_{k \in K}$ gibt, der mit dem gegebenen Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ kompatibel ist, dann sind nach Lemma 3.2.3 auch alle Karten $\{(W_k, \sigma_k)\}_{k \in K}$ mit dem Atlas $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ kompatibel. Wegen Maximalität von $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ muss dann $\{(W_k, \sigma_k)\}_{k \in K} \subseteq \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ gelten. Dies zeigt die Eindeutigkeit des maximalen Atlas. $\square$

BEMERKUNG 3.2.5. *Zwei C^∞ -Atlanten $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ und $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ heißen auch äquivalent, wenn ihre Vereinigung ein Atlas ist. In der obigen Terminologie bedeutet das, dass alle Karten (V_j, ψ_j) mit dem Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ kompatibel sind. Proposition 3.2.4 bedeutet dann, dass jeder C^∞ -Atlas auf einem lokal euklidischen Raum äquivalent zu einem eindeutigen maximalen Atlas ist.*

Damit können wir auch eine alternative Definition von glatter Mannigfaltigkeit in Definition 3.2.1 geben: Eine glatte Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer Äquivalenzklasse von C^∞ -Atlanten (bezüglich der obigen Äquivalenzrelation auf Atlanten).

BEISPIEL 3.2.6. *Der $\mathbb{R}^n$ mit dem Atlas, der nur aus der Karte $(\mathbb{R}^n, \text{id}_{\mathbb{R}})$ besteht, ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Da nur eine Karte existiert, sind keine C^∞ -Kompatibilitätsbedingungen zu überprüfen.*

Allgemeiner sind offene Teilmengen in glatten Mannigfaltigkeiten wieder glatte Mannigfaltigkeiten: für $V \subset M$ offen erhält man aus einem C^∞ -Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ einen C^∞ -Atlas $\{(V \cap U_i, \phi_i|_V)\}_{i \in I}$ für V . Die C^∞ -Bedingungen für den eingeschränkten Atlas folgen direkt aus den C^∞ -Bedingungen für $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$. $\square$

BEISPIEL 3.2.7. *Die n -dimensionale Einheitssphäre S^n aus Beispiel 2.4.1 ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, genauer ist der Atlas aus Beispiel 2.4.1 ein C^∞ -Atlas. Die Übergangsabbildung zwischen den beiden Karten ist*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}}{1 - \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}}, \dots, \frac{\frac{2x_n}{\|x\|^2+1}}{1 - \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}} \right).$$

Die Einträge vereinfachen sich

$$\frac{\frac{2x_i}{\|x\|^2+1}}{1 - \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}} = \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2 - (1 - \|x\|^2)} = \frac{x_i}{\|x\|^2}.$$

Diese Abbildung ist für alle Werte $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ glatt, also ist die C^∞ -Kompatibilitätsbedingung erfüllt. $\square$

BEISPIEL 3.2.8. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Funktion. Der Graph

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subseteq U \times \mathbb{R}^m$$

ist eine glatte Mannigfaltigkeit, gegeben durch die Karte $\text{pr}_1: \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Tatsächlich benötigen wir dafür die Glattheit nicht. Wenn f eine injektive Abbildung ist, hat Γ_f durch $\text{pr}_2: \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine weitere glatte Struktur. Beide Strukturen sind diffeomorph, wenn f glatt ist. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.2.9. Zeigen Sie, dass für $r \neq 0$ das durch $x^2 + y^2 - z^2 = r$ definierte Hyperboloid in $\mathbb{R}^3$ eine Mannigfaltigkeit ist. (Hinweis: das einschalige Hyperboloid ist eine Regelfläche mit zwei Geradenscharen.)

BEISPIEL 3.2.10. Produkte von glatten Mannigfaltigkeiten sind ebenfalls wieder glatte Mannigfaltigkeiten. Für einen C^∞ -Atlas $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ von M und einen C^∞ -Atlas $\{V_j, \psi_j\}_{j \in J}$ von N ist $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}$ ein C^∞ -Atlas für $M \times N$. Insbesondere ist also der n -dimensionale Torus T^n eine glatte Mannigfaltigkeit. $\square$

BEISPIEL 3.2.11. Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit, genauer erfüllt der Atlas aus Beispiel 2.4.6 die C^∞ -Kompatibilitätsbedingung. Die Karten waren durch

$$\phi_i: \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \hat{x}_i, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, reicht es, den Kartenwechsel zwischen $\phi_0(U_0)$ und $\phi_1(U_1)$ zu betrachten. Die Kartenwechselabbildung ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right)$$

und diese Abbildung ist offensichtlich beliebig oft differenzierbar, solange $x_1 \neq 0$ ist. Ebenso ist der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.2.12 (Grassmann-Mannigfaltigkeit).

Seien $0 < k < n$ natürliche Zahlen. Wir bezeichnen mit $\text{Gr}(k, n)$ die Menge der k -dimensionalen Untervektorräume von $V = \mathbb{R}^n$. Ein k -dimensionaler Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^n$ kann durch eine reelle $(n \times k)$ -Matrix mit Rang k dargestellt werden (die Spalten sind gewählte Basisvektoren von W). Für eine invertierbare $(k \times k)$ -Matrix M liefert Rechtsmultiplikation mit M eine andere Basis desselben Vektorraums. Insbesondere können wir $\text{Gr}(k, n)$ als Quotient der Menge $F(k, n) \subset \mathbb{R}^{nk}$ der $(n \times k)$ -Matrizen von Rang k bezüglich der Äquivalenzrelation

$$A \sim B \iff \exists M \in \text{GL}_k: A = BM$$

identifizieren. Die Menge $\text{Gr}(k, n) = F(k, n)/\sim$ wird dadurch ein topologischer Raum mit der Quotiententopologie.

- (1) Zeigen Sie, dass die Äquivalenzrelation $\sim$ offen ist.
- (2) Für einen $(n - k)$ -dimensionalen Untervektorraum $A \subset V$ bezeichnen wir mit $\mathcal{U}_A$ die Menge aller k -dimensionalen Unterräume $B \subset V$ mit $A \oplus B = V$. Zeigen Sie, dass die $\mathcal{U}_A$ offen sind.

(3) Zeigen Sie, dass für $B \in \mathcal{U}_A$ die Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(B, A) \rightarrow \mathcal{U}_A: (\phi: B \rightarrow A) \mapsto \Gamma_\phi = \{b + \phi(b) \mid b \in B\},$$

die eine lineare Abbildung $\phi: B \rightarrow A$ auf ihren Graphen abbildet, eine Bijektion ist.

(4) Zeigen Sie, dass dies einen glatten Atlas für $\text{Gr}(k, n)$ definiert. (Hinweis: Basiswechselmatrizen)

(5) Zeigen Sie, dass $\text{Gr}(k, n)$ ein Hausdorff-Raum ist. (Hinweis: Für je zwei k -dimensionale Unterräume B und B' existiert ein $n - k$ -dimensionaler Unterraum A mit $A \oplus B = V$ und $A \oplus B' = V$.)

Hinweis: Um eine Vorstellung von der Konstruktion zu bekommen, ist es hilfreich, den Spezialfall $k = 1$ zu betrachten, in dem $\text{Gr}(1, n) \cong \mathbb{RP}^{n-1}$ ist.

BEISPIEL 3.2.13. Eine kompakte orientierte Fläche von Geschlecht g kann aus einem $4g$ -Eck durch Randidentifikationen konstruiert werden. Dafür werden die Kanten mit $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ durchmarkiert. Dann identifizieren wir die Kanten a_i und a_i^{-1} durch einen Homöomorphismus, der die Kante a_i im positiven Drehsinn und die Kante a_i^{-1} im negativen Drehsinn durchläuft; analog für b_i und b_i^{-1} . $\square$

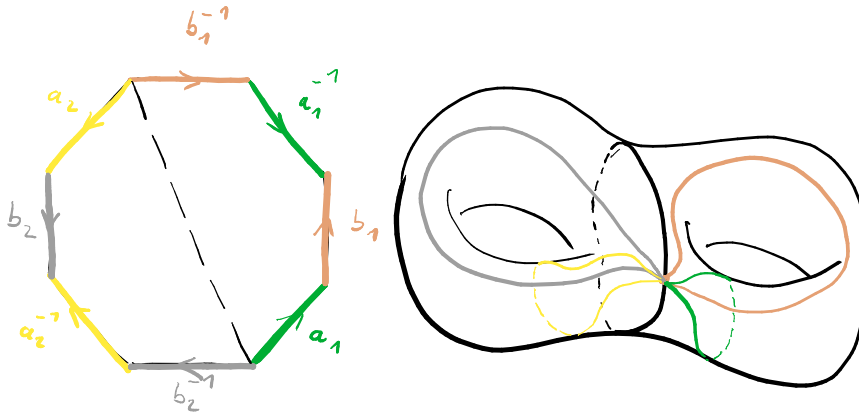


ABBILDUNG 7. Kompakte orientierte Fläche von Geschlecht 2.

BEISPIEL 3.2.14. Analog kann eine kompakte nicht-orientierte Fläche von Geschlecht g aus einem $2g$ -Eck durch Randidentifikationen gegeben durch die Markierungen $a_1, a_1, a_2, a_2, \dots, a_g, a_g$ konstruiert werden. Beispiele dafür sind $\mathbb{RP}^2$ mit $g = 1$ und die Kleinsche Flasche mit $g = 2$, s. Beispiel 2.4.12. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.2.15. Zeigen Sie, dass durch die Konstruktionen in Übungsaufgabe 3.2.13 und 3.2.14 tatsächlich glatte Mannigfaltigkeiten definiert werden, d.h. geben Sie einen C^∞ -Atlas an.

3.3. Glatte Abbildungen

Die richtigen/sinnvollen Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten sind die *glatten Abbildungen*. Auch dieser Begriff wird, wie schon der Begriff der Mannigfaltigkeit, auf lokale Eigenschaften zurückgeführt: glatte Abbildungen sind Abbildungen, die in Karten als Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ beliebig oft differenzierbar sind.

DEFINITION 3.3.1 (glatte Abbildung). Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten und $p \in M$ ein Punkt.

- (1) Eine Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt glatt am Punkt p , wenn es eine Karte (U, ϕ) mit $p \in U$ gibt, so dass die Zusammensetzung $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ am Punkt $\phi(p)$ eine C^∞ -Abbildung ist. Die Abbildung f heißt glatt auf M , wenn sie an allen Punkten glatt ist.
- (2) Eine stetige Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt glatt am Punkt p , wenn es eine Karte (U, ϕ) von M mit $p \in U$ und eine Karte (V, ψ) von N mit $f(p) \in V$ gibt, so dass die Komposition

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow U \cap f^{-1}(V) \rightarrow V \rightarrow \psi(V)$$

C^∞ am Punkt $\phi(p)$ ist. Die Abbildung f heißt glatt, wenn sie an allen Punkten glatt ist.

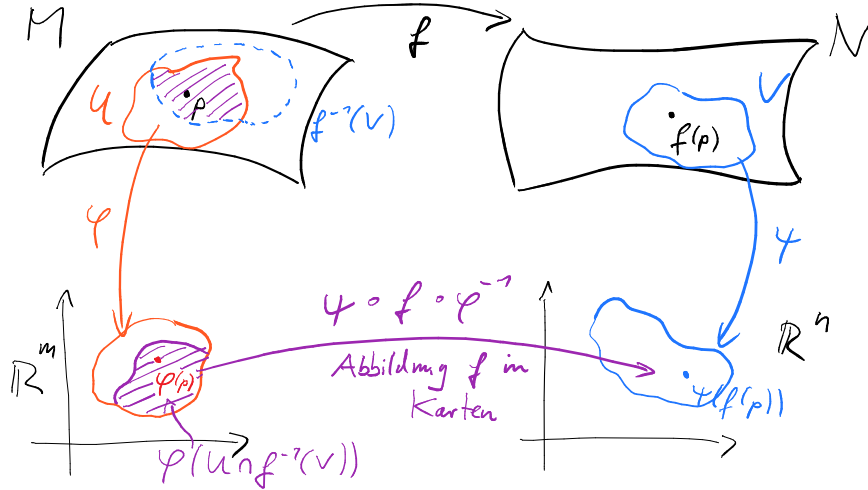


ABBILDUNG 8. Glatte Abbildung in Karten

NOTATION 3.3.2. Für zwei glatte Mannigfaltigkeiten M und N bezeichnen wir die Menge aller glatten Abbildungen $M \rightarrow N$ mit $C^\infty(M, N)$. Ein Spezialfall ist $C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 3.3.3. Sei $f: M \rightarrow N$ glatt am Punkt p . Für jede Karte (U, ϕ) von M mit $p \in U$ und jede Karte (V, ψ) von N mit $f(p) \in V$ ist die Komposition

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow U \cap f^{-1}(V) \rightarrow V \rightarrow \psi(V)$$

C^∞ am Punkt $\phi(p)$.

BEWEIS. Nach Definition gibt es eine Karte (U', ϕ') von M mit $p \in U'$ und eine Karte (V', ψ') von N mit $f(p) \in V'$, so dass $\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}$ glatt am Punkt $\phi'(p)$ ist. Wegen der C^∞ -Kompatibilität sind die Kartenwechsel $\phi' \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap U') \rightarrow \phi'(U \cap U')$ und $\psi \circ (\psi')^{-1}: \psi'(V \cap V') \rightarrow \psi(V \cap V')$ beide C^∞ . Damit ist dann auch die Komposition

$$(\psi \circ (\psi')^{-1}) \circ (\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}) \circ (\phi' \circ \phi^{-1}) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

glatt am Punkt $\phi(p)$. □

BEMERKUNG 3.3.4. Insbesondere ist also die Definition von glatter Abbildung unabhängig von der Wahl der Karte. Um zu zeigen, dass eine Abbildung glatt ist,

reicht es auch aus, die Glattheit in den Karten eines nicht notwendig maximalen Atlas zu überprüfen.

PROPOSITION 3.3.5. *Die Komposition von C^∞ -Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist wieder C^∞ .*

BEWEIS. Seien $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, und seien (U, ϕ) , (V, ψ) und (W, σ) Karten für M , N und P . Es gilt

$$\sigma \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = (\sigma \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}),$$

und die beiden Faktoren auf der rechten Seite sind nach Voraussetzung (und Proposition 3.3.3) glatt. Also ist auch die Komposition wieder glatt, was nach Proposition 3.3.3 für die Behauptung ausreicht. $\square$

NOTATION 3.3.6. *Für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ und eine Mannigfaltigkeit P haben wir eine induzierte Abbildung*

$$f^*: C^\infty(N, P) \rightarrow C^\infty(M, P): (g: N \rightarrow P) \mapsto g \circ f.$$

Diese Konstruktion wird auch Pullback genannt. Insbesondere wird die Zuordnung

$$M \mapsto C^\infty(M), \quad (f: M \rightarrow N) \mapsto (f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M))$$

zu einem kontravarianten Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildung in die Kategorie der $\mathbb{R}$ -Algebren, s. Anhang A.1.

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.7. *Für glatte Mannigfaltigkeiten N , M_1 und M_2 ist eine Abbildung $f: N \rightarrow M_1 \times M_2$ genau dann glatt, wenn die Kompositionen $\text{pr}_i \circ f: N \rightarrow M_i$ für $i = 1, 2$ glatt sind. Insbesondere sind die Projektionsabbildungen $\text{pr}_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ glatt.*

BEISPIEL 3.3.8. *Wenn $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung ist und $U \subset M$ eine offene Teilmenge, dann ist die Einschränkung $f|_U: U \subset M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung.* $\square$

DEFINITION 3.3.9. *Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ von glatten Mannigfaltigkeiten heißt*

- Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} glatt sind, und
- lokaler Diffeomorphismus, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U gibt, so dass $f|_U: U \rightarrow f(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.10. (1) *Benutzen Sie die Karten aus den Beispielen 2.4.1 bzw. 2.4.6, um einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{CP}^1$ und S^2 anzugeben.*

(2) *Die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto z^2$ definiert eine glatte Abbildung $q: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Bestimmen Sie die Abbildung $q'_n: S^2 \rightarrow S^2$, die unter dem Diffeomorphismus aus (1) zur Abbildung $f_n: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ korrespondiert.*

(3) *Die Abbildung $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto -\bar{z}^{-1}$ dehnt sich zu einer glatten Abbildung $j: \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ aus. Bestimmen Sie die Abbildung $j': S^2 \rightarrow S^2$, die unter dem Diffeomorphismus aus (1) zur Abbildung j korrespondiert.*

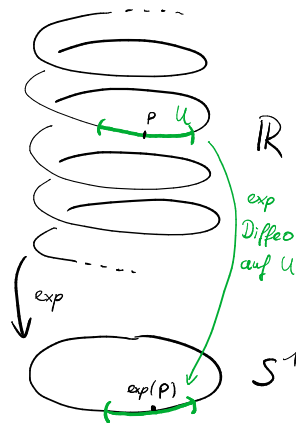
PROPOSITION 3.3.11. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist (U, ϕ) genau dann eine Karte für M , wenn $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.*

BEWEIS. Sei (U, ϕ) eine Karte für M , insbesondere ist $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ bijektiv. Es reicht zu zeigen, dass ϕ und ϕ^{-1} glatt sind. Um die Glattheit nachzurechnen benutzen wir die Karte (U, ϕ) für U und die Karte $(\phi(U), \text{id}_{\phi(U)})$ für $\phi(U)$. Dann ist die Komposition $\text{id}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \text{id}_{\phi(U)}$ glatt, also ist ϕ glatt. Mit denselben Karten sehen wir mit $\phi \circ \phi^{-1} \circ \text{id}_{\phi(U)} = \text{id}_{\phi(U)}$, dass ϕ^{-1} glatt ist.

Sei umgekehrt $\phi: U \rightarrow \phi(U)$ ein Diffeomorphismus. Für jede Karte (V, ψ) von M sind ψ und ψ^{-1} glatt, nach dem vorherigen Schritt. Damit sind die Kartenwechsel $\phi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \phi^{-1}$ glatt, also ist (U, ϕ) kompatibel mit der glatten Struktur auf M und damit ist (U, ϕ) im maximalen Atlas für M enthalten. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.12. Bezeichne $\mathbb{R}$ die reelle Gerade mit der glatten Struktur, die durch den Atlas $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$ gegeben ist, und bezeichne $\mathbb{R}'$ die reelle Gerade mit der glatten Struktur, die durch den Atlas $(\mathbb{R}, \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^{\frac{1}{3}})$ gegeben ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (1) Die beiden Atlanten (bzw. glatten Strukturen) sind nicht äquivalent.
- (2) Die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}}$ ist kein Diffeomorphismus.
- (3) Es gibt einen Diffeomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$.



Ein Standardbeispiel für einen lokalen Diffeomorphismus ist die Abbildung $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1: x \mapsto \exp(2\pi i x)$, die auf der linken Seite dargestellt ist. Wir können diese Abbildung auch als Quotientenabbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ interpretieren. Jeder Punkt $p \in \mathbb{R}$ hat eine Umgebung U , so dass die induzierte Abbildung $\exp|_U: U \rightarrow \exp(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Umgekehrt hat hier auch jeder Punkt $x \in S^1$ eine Umgebung V , so dass $\exp^{-1}(V)$ einfach eine Vereinigung von $\mathbb{Z}$ vielen Kopien von U ist. Solche Abbildungen heißen auch *Überlagerungen*.

Weitere Beispiele dieser Art erhalten wir aus Quotienten nach glatten Wirkungen diskreter Gruppen.

BEISPIEL 3.3.13. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und G eine diskrete Gruppe. Wir nehmen an, dass $G \times M \rightarrow M$ eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung durch Diffeomorphismen ist, d.h. für jedes $g \in G$ ist die induzierte Abbildung $g \cdot (-): M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Dann ist der Quotient M/G eine glatte Mannigfaltigkeit, und die Quotientenabbildung $M \rightarrow M/G$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Beispiele für diese Situation sind $T^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ und $S^n/C_2 \cong \mathbb{RP}^n$. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.14. Sei $F(k, n)$ der Raum der $(n \times k)$ -Matrizen von Rang k aus Übungsaufgabe 3.2.12. Wir betrachten $F(k, n)$ als offene Teilmenge $\text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{nk}$ auf, damit wird $F(k, n)$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $\pi: F(k, n) \rightarrow \text{Gr}(k, n): A \mapsto [A]$ glatt ist.

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.15 (Hopf-Abbildung). Wir realisieren die 3-Sphäre als $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, und identifizieren $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ wie in Übungsaufgabe 3.3.10. Dann definieren wir die Hopf-Abbildung wie folgt:

$$\eta: S^3 \rightarrow S^2: (z, w) \mapsto [z : w].$$

- (1) Zeigen Sie, dass die Hopf-Abbildung glatt ist.

- (2) Berechnen Sie die Darstellung der Abbildung in den durch die stereographische Projektion gegebenen Karten der Sphären.

3.4. Zerlegung der Eins

Ein wesentliches technisches Hilfsmittel zum Studium glatter Mannigfaltigkeiten sind Zerlegungen der Eins. Sie werden benutzt, um globale Objekte (auf der ganzen Mannigfaltigkeit) in lokale Objekte (auf offenen Teilmengen einer lokal endlichen Überdeckung) zu zerlegen oder globale Objekte aus lokalen zusammenzuheben. Dadurch können viele globale Aussagen (z.B. Existenz von Vektorfeldern, Einbettungen in den $\mathbb{R}^N$, Definition des Integrals) auf lokale Aussagen über offene Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ zurückgeführt werden, die dann aus den Methoden der Analysis II folgen.

DEFINITION 3.4.1. Für eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Mannigfaltigkeit M definieren wir den Träger von f durch

$$\text{supp } f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

Zum Zerlegen und Zusammenkleben von Objekten auf Mannigfaltigkeiten (z.B. Schnitten in Vektorbündel, oder Einbettungen in $\mathbb{R}^N$) benötigen wir glatte Funktionen, die auf vorgegebenen Teilmengen U und V in M mit disjunktem Abschluss die Werte 0 bzw. 1 annehmen.

Wir beginnen mit der Funktion

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.2. Zeigen Sie, dass es Polynome $P_n(T)$ gibt, so dass

$$\alpha^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Insbesondere ist α glatt.

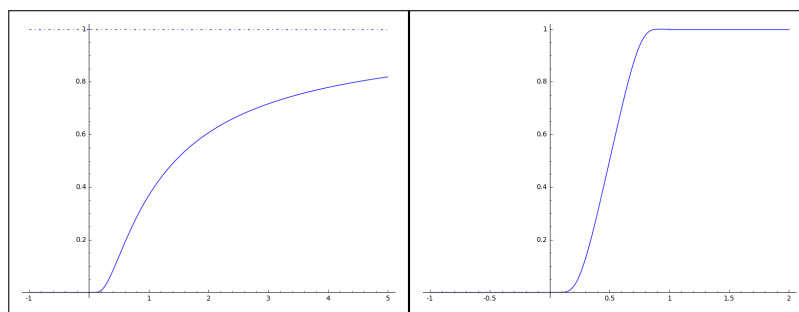


ABBILDUNG 9. Die Funktionen α und β

Wir betrachten die Funktion

$$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \alpha(1-x)}.$$

Für den Nenner gilt

$$\alpha(x) + \alpha(1-x) \geq \begin{cases} \alpha(x) & x > 0 \\ \alpha(1-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

und auf den angegebenen Bereichen sind die entsprechenden Werte größer als 0. Insbesondere ist β eine glatte Funktion, die konstant 0 für $x \leq 0$ und konstant 1 für $x \geq 1$ ist.

Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ haben wir eine lineare Koordinatentransformation

$$x \mapsto \frac{x - a^2}{b^2 - a^2},$$

die $[a^2, b^2]$ auf $[0, 1]$ abbildet. Die Funktion

$$\gamma(x) = \beta\left(\frac{x - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$

ist dann eine C^∞ -Funktion, die auf $(-\infty, a^2)$ den Wert 0 und auf (b^2, ∞) den Wert 1 annimmt. Die C^∞ -Funktion $\delta(x) = \gamma(x^2)$ nimmt dann auf $[-a, a]$ den Wert 0 und auf $(-\infty, -b) \cup (b, \infty)$ den Wert 1 an.

Zuletzt haben wir mit

$$\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: 1 - \beta\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$

eine glatte Funktion konstruiert, die auf $[-a, a]$ den Wert 1 und auf $(-\infty, -b) \cup (b, \infty)$ den Wert 0 annimmt.

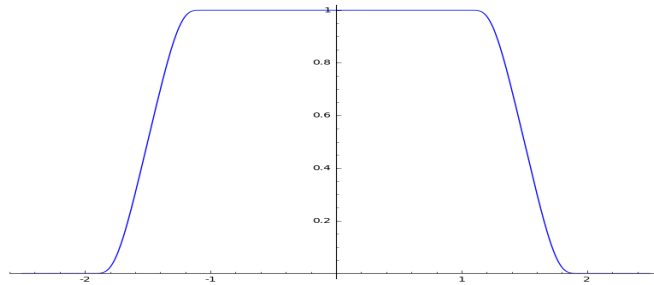


ABBILDUNG 10. Die Funktion λ für $a = 1$ und $b = 2$

Analog können wir durch $\sigma(x) = \lambda(\|x\|)$ eine Funktion $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definieren, die auf dem abgeschlossenen Ball von Radius a um 0 den Wert 1 hat und außerhalb des abgeschlossenen Balls vom Radius b um 0 den Wert 0 hat. Wir formulieren dieses Ergebnis:

PROPOSITION 3.4.3. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von K . Dann existiert eine glatte Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, so dass $f|_K \equiv 1$ und $\text{supp } f \subset U$.*

BEWEIS. Für jeden Punkt $x \in K$ existiert ein ϵ mit $\overline{B}(x, \epsilon) \subseteq U$ und wir können eine Funktion σ_x finden, die auf $B(x, \epsilon)$ strikt positiv ist und außerhalb $\overline{B}(x, \epsilon)$ verschwindet. Da K kompakt ist, können wir K mit endlich vielen solchen Bällen $B(x_i, \epsilon_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$ überdecken. Die Funktion $\phi = \sum_{i=1}^m \sigma_i$ ist strikt positiv auf K , glatt auf $\mathbb{R}^n$ und hat Träger $\text{supp } \phi = \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \epsilon_i) \subset U$. Da K kompakt ist, hat ϕ ein Minimum μ auf K . Wir benutzen dann die oben definierte Funktion γ mit $a = 0$ und $b^2 = \mu$. Dann ist $\gamma \circ \phi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ glatt, konstant 1 auf K und $\text{supp}(\gamma \circ \phi) \subset U$. $\square$

Mit diesen Funktionen können wir verschiedene lokal definierte Objekte auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Das einfachste Beispiel für Funktionen ist die folgende Aussage:

PROPOSITION 3.4.4. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Umgebung eines Punktes p und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann existiert eine glatte Funktion $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}$ und eine offene Umgebung $V \subset U$ von p , so dass $\tilde{f} = f|_V$.*

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit existiert eine Karte (U, ϕ) , so dass $\text{supp } \sigma \subset \phi(U)$ (skalieren!). Dann betrachten wir die Funktion $\sigma \circ \phi: U \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}$. Das Produkt $(\sigma \circ \phi) \cdot f$ ist identisch f in einer Umgebung von p , nämlich auf dem Urbild $\phi^{-1}(B(0, 1))$. Da $\text{supp } f \subset \phi(U)$, können wir die Funktion auf $M \setminus U$ durch 0 fortsetzen und erhalten die behauptete Erweiterung $\tilde{f}$ von f . $\square$

DEFINITION 3.4.5. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung. Eine glatte Zerlegung (auch: Partition) der Eins zur Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ ist eine Menge von glatten Funktionen $\{\lambda_i: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{i \in I}$, so dass $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$ und*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

PROPOSITION 3.4.6. *Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine Überdeckung. Dann existiert eine glatte Zerlegung der Eins $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ zu $\{U_i\}_{i \in I}$.*

BEWEIS. Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U_i von p und eine glatte Funktion $\lambda_i: M \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$ und λ_i konstant 1 auf einer Umgebung W_p von p ist. Dann ist $\{W_p \mid p \in M\}$ eine Überdeckung von M und hat, da M kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung $\{W_{p_1}, \dots, W_{p_m}\}$. Wir bezeichnen die dazugehörigen Funktionen mit $\lambda_{p_1}, \dots, \lambda_{p_m}$. Die Funktion $\lambda = \sum \lambda_{p_j}$ ist überall positiv, und wir definieren $\phi_j = \frac{\lambda_{p_j}}{\lambda}$. Dann haben wir $\sum \phi_j = 1$. Da $\lambda > 0$ ist auch $\text{supp } \lambda_{p_j} = \text{supp } \phi_j \subseteq U_i$; also haben wir eine Zerlegung der Eins $\{\phi_j\}_{j \in J}$ und für jeden Index $j \in J$ einen Index $i \in I$ mit $\text{supp } \phi_j \subset U_i$.

Zuletzt müssen noch die Indext Mengen übereinstimmen. Wir wählen für jeden Index $j \in J$ einen Index $\tau(j) \in I$ so dass $\text{supp } \phi_j \subset U_{\tau(j)}$. Dann definieren wir für jedes $i \in I$

$$\rho_i = \sum_{\tau(j)=i} \phi_j$$

mit der Konvention, dass $\rho_i = 0$, wenn kein j mit $\tau(j) = i$ existiert. Dann ist

$$\sum_{i \in I} \rho_i = \sum_{i \in I} \sum_{\tau(j)=i} \phi_j = \sum_{j=1}^m \phi_j = 1.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass

$$\text{supp } \sum_{\tau(j)=i} \phi_j \subseteq \bigcup_{\tau(j)=i} \text{supp } \phi_j$$

und damit haben wir $\text{supp } \rho_i \subset \bigcup_{\tau(j)=i} \phi_j \subseteq U_i$. Also ist $\{\rho_i\}_{i \in I}$ eine zu $\{U_i\}_{i \in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. $\square$

BEMERKUNG 3.4.7. *Allgemeiner kann man die Existenz von stetigen Zerlegungen der Eins auf parakompakten Räumen zeigen. Da Mannigfaltigkeiten insbesondere parakompakt sind, existieren Zerlegungen der Eins auf allen Mannigfaltigkeiten. Der Beweis ist aber etwas komplizierter...*

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.8. *Sei M eine (para-)kompakte glatte Mannigfaltigkeit, und seien $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\epsilon: M \rightarrow (0, \infty)$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie die Existenz einer glatten Abbildung $h: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|h(x) - g(x)| < \epsilon(x)$ für alle $x \in M$.*

Hinweis: Betrachten Sie die Überdeckung $U_x = \{y \mid |g(y) - g(x)| < \epsilon(y)\}$, $x \in M$ und eine dazu untergeordnete Zerlegung der Eins $(U_x, \lambda_x)_{x \in M}$. Der Ansatz für die gesuchte glatte Funktion ist dann $h(x) := \sum_{y \in M} \lambda_y(x)g(y)$.

3.5. Glatte Mannigfaltigkeiten mit Rand

DEFINITION 3.5.1. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge (nicht notwendig offen). Eine Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt glatt, wenn es eine offene Umgebung $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $f = h|_A$.

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.2. Eine Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann glatt im Sinne von Definition 3.5.1, wenn jeder Punkt $a \in A$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ hat, so dass eine glatte Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ existiert mit $h|_U = f|_U$.

Hinweis: Zerlegung der Eins.

DEFINITION 3.5.3. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Zwei Karten $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{H}^n)$ und $(V, \psi: V \rightarrow \mathbb{H}^n)$ von M heißen C^∞ -kompatibel, wenn die beiden Kartenwechselabbildungen

$$\begin{aligned}\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) &\rightarrow \phi(U \cap V) \hookrightarrow \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ \psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) &\rightarrow \psi(U \cap V) \hookrightarrow \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

(zusammengesetzt mit der Einbettung in $\mathbb{R}^n$) glatt im Sinne der Definition 3.5.1 sind.

Analog zu Definition 3.2.1 ist ein C^∞ -Atlas für M durch eine Menge von paarweise C^∞ -kompatiblen Karten gegeben. Eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist dann eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand zusammen mit einem glatten Atlas.

BEMERKUNG 3.5.4. Die Definitionen von Randpunkten und inneren Punkten ist dieselbe wie im Falle topologischer Mannigfaltigkeiten mit Rand.

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.5. Für eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist ∂M eine $(n-1)$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $\bar{M}$ eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.6. Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Für jede glatte Abbildung $f: \partial M \rightarrow \mathbb{R}$ existiert eine glatte Abbildung $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g|_{\partial M} = f$.

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.7. (1) Wenn M eine glatte Mannigfaltigkeit und N eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist, dann ist $M \times N$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial(M \times N) = M \times \partial N$.

(2) (*) Zeigen Sie, dass (im Gegensatz zum topologischen Fall) das Produkt von glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand nicht wieder eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

BEMERKUNG 3.5.8. Für Produkte von glatten Mannigfaltigkeiten mit Rand gibt es den Begriff der Mannigfaltigkeit mit Ecken.

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.9. Die n -dimensionale Einheitskreisscheibe

$$D^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1 \right\}$$

ist eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Die natürliche Inklusion $D^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine glatte Abbildung.

DEFINITION 3.5.10. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein Kragen für den Rand ist eine offene Umgebung U von ∂M zusammen mit einem Diffeomorphismus $\phi: \partial M \times [0, 1) \xrightarrow{\cong} U$.

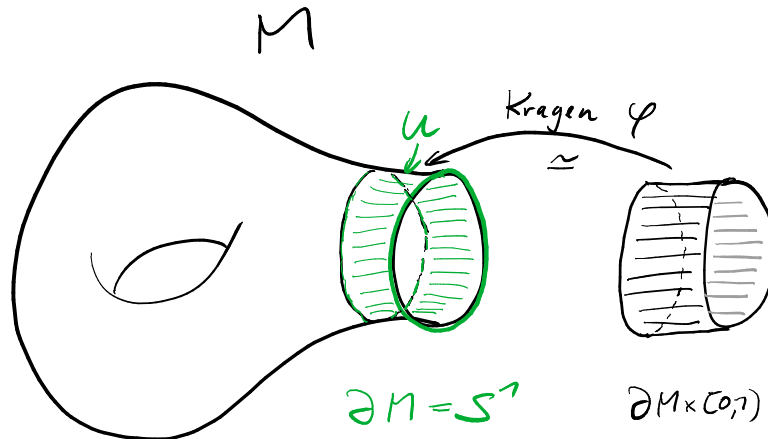


ABBILDUNG 11. Kragen für Mannigfaltigkeit mit Rand

BEMERKUNG 3.5.11. Die Existenz von Kragen für Ränder werden wir später sehen, wenn wir Vektorfelder diskutieren.

DEFINITION 3.5.12. Seien M_1 und M_2 zwei Mannigfaltigkeiten, deren Ränder jeweils einen Kragen $\phi_i: \partial M_i \times [0, 1) \xrightarrow{\cong} U_i$ haben. Wenn es einen Diffeomorphismus $\psi: \partial M_1 \xrightarrow{\cong} \partial M_2$ gibt, dann können wir M_1 und M_2 entlang ψ zusammenkleben:

$$M_1 \sqcup_{\psi} M_2 := ((M_1 \setminus \partial M_1) \sqcup (M_2 \setminus \partial M_2)) / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation durch $\phi_1(x, t) \sim \phi_2(\psi(x), 1 - t)$ für $x \in \partial M_1$ und $t \in (0, 1)$ gegeben ist.

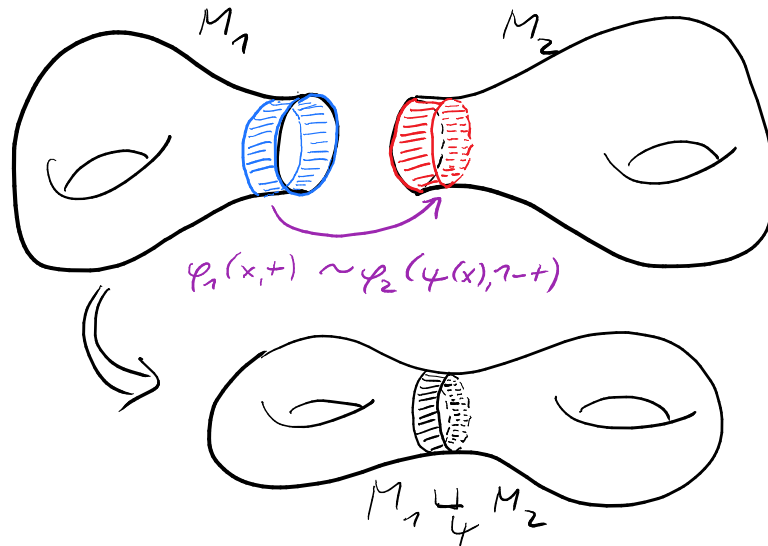


ABBILDUNG 12. Verkleben von Mannigfaltigkeiten entlang der Ränder mit Kragen

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.13. Beweisen Sie, dass dadurch tatsächlich eine glatte Mannigfaltigkeit gegeben ist.

Eine Variante dieser Konstruktion ist die zusammenhängende Summe von Mannigfaltigkeiten.

DEFINITION 3.5.14. Seien M_1 und M_2 zwei topologische Mannigfaltigkeiten von Dimension n . Wir wählen zwei injektive Abbildungen $i_1: D^n \rightarrow M_1$ und $i_2: D^n \rightarrow M_2$ und nehmen an, dass diese Homöomorphismen auf die jeweiligen Bilder sind. Die zusammenhängende Summe $M_1 \# M_2$ ist definiert als

$$((M_1 \setminus i_1(0)) \sqcup (M_2 \setminus i_2(0))) / \{i_1(tu) \sim i_2((1-t)u) \mid u \in \partial D^n, t \in (0, 1)\}.$$

BEMERKUNG 3.5.15. Es ist nicht offensichtlich, inwieweit das Ergebnis $M_1 \# M_2$ von der Wahl der Einbettungen i_1 und i_2 abhängt. Tatsächlich kann man zeigen, dass das Ergebnis unter geeigneten Umständen bis auf Homöomorphismus unabhängig von den Einbettungen ist: dafür müssen beide Mannigfaltigkeiten orientiert sein, die Einbettungen einen beidseitigen Kragen haben und selbst dann werden komplizierte Sätze (Kirby annulus theorem für topologische Mannigfaltigkeiten, Palais disc theorem für glatte Mannigfaltigkeiten) benötigt.

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.16. (1) Das (abgeschlossene) Möbiusband

$$B = [-1, 1]^2 / \{(-1, -s) \sim (1, s) \mid s \in [-1, 1]\}$$

ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial B = S^1$.

(2) Wir verkleben das Möbiusband mit einer abgeschlossenen Kreisscheibe D^2 entlang der Ränder. Genauer wählen wir also einen Homöomorphismus $i_1: S^1 \cong \partial B$ und einen Homöomorphismus $i_2: S^1 \cong \partial D^2$ und betrachten den Quotienten

$$X = (B \sqcup D^2) / \{i_1(x) \sim i_2(x) \mid x \in S^1\}.$$

Zeigen Sie, dass das Ergebnis X homöomorph zu $\mathbb{RP}^2$ ist.

(3) Wählen Sie für Möbiusband und Kreisscheibe einen geeigneten Kragen und zeigen Sie, dass das Ergebnis X des Verklebens eine glatte Mannigfaltigkeit ist, die diffeomorph zu $\mathbb{RP}^2$ ist.

3.6. Ausblick: Lie-Gruppen und Wirkungen

DEFINITION 3.6.1. Eine Lie-Gruppe ist eine glatte Mannigfaltigkeit G zusammen mit einer Gruppenstruktur $\mu: G \times G \rightarrow G$, $(-)^{-1}: G \rightarrow G$, so dass Multiplikation μ und Invertieren $(-)^{-1}$ beide glatte Abbildungen sind.

BEISPIEL 3.6.2. Bezeichne GL_n die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen mit der Matrizenmultiplikation. Wir können GL_n als offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren: im Raum aller Matrizen ist GL_n das Komplement des Unterraums, der durch $\{(a_{ij})_{i,j} \mid \det(a_{ij}) = 0\}$ definiert wird. Dass GL_n eine offene Menge ist, folgt aus der Stetigkeit der Determinantenabbildung $\mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$. Als offene Teilmenge im $\mathbb{R}^{n^2}$ ist GL_n also eine glatte Mannigfaltigkeit.

Die Multiplikationsabbildung $GL_n \times GL_n \rightarrow GL_n: (A, B) \mapsto A \cdot B$ ist glatt, da die Formel für Matrizenmultiplikation polynomial in den Einträgen der zu multiplizierenden Matrizen ist. Genauso ist auch die Cramersche Regel zum Invertieren von Matrizen polynomial in den Einträgen der zu invertierenden Matrix, also ist auch das Matrizeninvertieren $GL_n \rightarrow GL_n: A \mapsto A^{-1}$ glatt. $\square$

BEMERKUNG 3.6.3. Mit demselben Argument wie für $GL_n(\mathbb{R})$ sieht man, dass $GL_n(\mathbb{C})$ eine Lie-Gruppe ist. Die aus der linearen Algebra bekannten Matrizengruppen $SO(n)$, $U(n)$ und $Sp(2n)$ sind weitere Beispiele für Lie-Gruppen. Zumindest die halbeinfachen Lie-Gruppen können komplett klassifiziert werden. Quotienten von Lie-Gruppen nach geeigneten abgeschlossenen Untergruppen liefern viele weitere interessante Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten.

ÜBUNGSAUFGABE 3.6.4. Die Liegruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}$.

ÜBUNGSAUFGABE 3.6.5. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ der unitären (2×2) -Matrizen mit Determinante 1 eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{SU}(2)$ diffeomorph zu S^3 ist.

ÜBUNGSAUFGABE 3.6.6. Zeigen Sie, dass die Spurabbildung $\mathrm{tr}: \mathrm{SU}(2) \rightarrow [-2, 2]$ eine glatte Abbildung ist.

DEFINITION 3.6.7. Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Links-Gruppenwirkung von G auf X ist eine Abbildung $\rho: G \times X \rightarrow X: (g, x) \mapsto g \cdot x$, so dass für alle $g, h \in G$ und $x \in X$ gilt $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ und $e_G \cdot x = x$.

Sei G eine Lie-Gruppe und M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine glatte Links-wirkung von G auf M ist eine Linkswirkung $\rho: G \times M \rightarrow M$, die als Abbildung von Mannigfaltigkeiten glatt ist.

Analog können wir glatte Rechts-Gruppenwirkungen $\rho: M \times G \rightarrow M$ definieren. Wir geben ein paar Beispiele für glatte Wirkungen.

- BEISPIEL 3.6.8. (1) Die Multiplikation $\mu: G \times G \rightarrow G$ ist ein Beispiel für die Wirkung einer Gruppe auf sich selbst.
- (2) Rechtsmultiplikation mit Matrizen in Übungsaufgabe 3.2.12 ist eine Rechtswirkung $F(k, n) \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \rightarrow F(k, n)$. Linksmultiplikation mit Matrizen aus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ induziert eine Linkswirkung $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Gr}(k, n) \rightarrow \mathrm{Gr}(k, n)$.
- (3) Fassen wir $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$ und $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ auf, dann definiert die Skalarmultiplikation eine Wirkung, die für die Hopf-Abbildung in Übungsaufgabe 3.3.15 eine Rolle spielt:

$$S^1 \times S^3 \rightarrow S^3: (\lambda, (z, w)) \mapsto (\lambda z, \lambda w).$$

- (4) Die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ wirkt in natürlicher Weise durch Matrizenmultiplikation auf $\mathbb{R}^n$. Diese Wirkung schränkt sich zu einer glatten Wirkung auf der Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ein.

□

Wirkungen von Lie-Gruppen auf Mannigfaltigkeiten tauchen häufig beim Studium von Symmetrien von Differentialgleichungen auf und sind insbesondere in der mathematischen Physik, z.B. Eichfeldtheorie, zentrale Objekte. Für geeignete Gruppenwirkungen $G \times M \rightarrow M$ sind die Quotienten/Bahnenräume wieder Mannigfaltigkeiten. Auf diese Art können viele geometrisch interessante Mannigfaltigkeiten konstruiert werden.

3.7. Ausblick: Flächenklassifikation

Wir haben bisher konkrete Beispiele für kompakte zwei-dimensionale Mannigfaltigkeiten gesehen: kompakte orientierbare Flächen von Geschlecht g wurden in Beispiel 3.2.13 konstruiert, und kompakte nicht-orientierbare Flächen in Beispiel 3.2.14.¹ Tatsächlich lassen sich geschlossene Flächen (d.h. kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten ohne Rand) komplett klassifizieren.

Die wesentliche Kennzahl einer geschlossenen Fläche ist das *Geschlecht*, das auch in den Beispielen 3.2.13 und 3.2.14 auftauchte. Im orientierbaren Fall ist das Geschlecht g der Fläche Σ die maximale Anzahl an disjunkten einfachen geschlossenen Kurven auf der Fläche, so dass das Komplement dieser Kurven noch zusammenhängend ist. Alternativ, ist das Geschlecht die Anzahl der Löcher bzw. Henkel

¹An dieser Stelle ist *orientierbar* bzw. *nicht-orientierbar* noch nicht formal definiert. Informell geht es darum, ob die Fläche zwei Seiten hat (innen und außen wie beim 2-Torus) oder nur eine Seite (wie bei der Kleinschen Flasche). Die genaue Definition von Orientierung werden wir erst im Kapitel 7 sehen.

einer orientierbaren geschlossenen Fläche: die Sphäre S^2 hat Geschlecht 0 (Jordan-scher Kurvensatz), der Torus T^2 hat Geschlecht 1 und die Flächen in Abbildung 7 auf Seite 22 und Abbildung 12 auf Seite 30 haben Geschlecht 2.

SATZ 3.7.1 (Klassifikation geschlossener Flächen). *Jede zusammenhängende geschlossene Fläche ist homöomorph zu einer der folgenden:*

- (1) der 2-Sphäre S^2
- (2) einer zusammenhängenden Summe von g Kopien von T^2 , $g \geq 1$ oder
- (3) einer zusammenhängenden Summe von g Kopien von $\mathbb{RP}^2$, $g \geq 1$.

Außerdem sind zwei zusammenhängende geschlossene Flächen diffeomorph genau dann, wenn sie homöomorph sind.

Wie können wir erkennen, welche Fläche wir vor uns haben? Betrachten wir den Fall, dass die Fläche wie in den Beispielen 3.2.13 und 3.2.14 durch Randidentifikationen für ein Polygon gegeben ist. Zuerst unterscheiden wir in orientierbare (Fälle 1 und 2) und nicht-orientierbare Flächen (Fall 3). Eine Fläche ist genau dann nicht-orientierbar, wenn wir ein Möbiusband finden können. Ist die Fläche durch Randidentifikationen für ein Polygon gegeben, enthält die Fläche ein Möbiusband, wenn es zwei Kanten mit derselben Markierung gibt, die in dieselbe Richtung orientiert sind. Die zweite Information, nach der Orientierbarkeit, ist dann die *Euler-Charakteristik*. Für eine Fläche Σ , die aus Polygonen zusammengeklebt ist, definieren wir die Euler-Charakteristik durch

$$\chi(\Sigma) = V - E + F,$$

wobei V die Anzahl der Eckpunkte, E die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen der Polygonzerlegung bezeichnen. Dies ist eine Verallgemeinerung der Eulerschen Polyederformel $V - E + F = 2$ für den Spezialfall konvexer Polyeder (deren Oberfläche homöomorph zu S^2 ist). Die Beziehung zwischen Euler-Charakteristik $\chi(\Sigma)$ und Geschlecht ist g dann wie folgt gegeben. Für orientierbare Flächen ist $\chi(\Sigma) = 2 - 2g$, und in diesem Fall ist die Fläche homöomorph zu S^2 (wenn $g = 0$) bzw. zu einer zusammenhängenden Summe $T^2 \# \dots \# T^2$ von g Kopien des 2-Torus (wenn $g \geq 1$). Für nicht-orientierbare Flächen ist $\chi(\Sigma) = 2 - g$ und in diesem Fall ist die Fläche homöomorph zu einer zusammenhängenden Summe $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ von g Kopien der reell-projektiven Ebene.

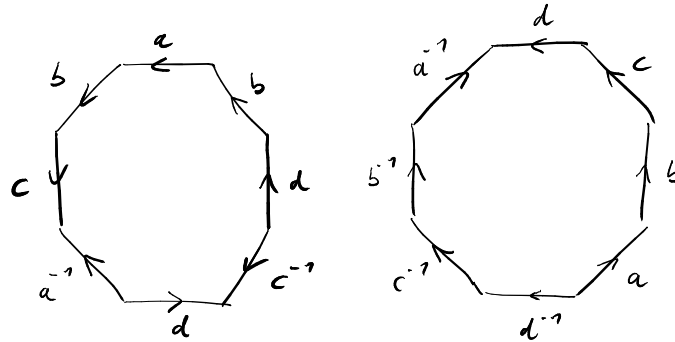
Die Euler-Charakteristik ist auch eine Homöomorphismus-Invariante, d.h. zwei Flächen mit unterschiedlicher Euler-Charakteristik können nicht homöomorph sein. Diese Sorte von Aussagen kann z.B. mit den Mitteln der Vorlesung Topologie I bewiesen werden.

Die Flächenklassifikation ist ein sehr klassischer Satz, bekannt in unterschiedlichen Formen seit dem späten 19. Jahrhundert, wird in der Vorlesung hier aber nicht bewiesen. Es gibt unterschiedliche Beweise, z.B. über die Theorie Riemannscher Flächen in der komplexen Analysis, kombinatorisch über Triangulierbarkeit und Reduktion auf die Normalformen in den Beispielen 3.2.13 und 3.2.14, oder differentialtopologisch über Morse-Theorie wie in [Hir94]. Ein relativ kurzer Beweis, der auch mit den Mitteln der Vorlesung verstanden werden kann, findet sich in

- <https://www3.nd.edu/~andyp/notes/ClassificationSurfaces.pdf>

- ÜBUNGSAUFGABE 3.7.2.** (1) Zeigen Sie $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong K$, wobei K die Kleinsche Flasche bezeichnet.
 (2) Zeigen Sie $T^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong K \# \mathbb{RP}^2$.

ÜBUNGSAUFGABE 3.7.3. Können Sie die folgenden Flächen identifizieren?



3.8. Ausblick: Differentialtopologie und Klassifikation von glatten Mannigfaltigkeiten

Es gibt sehr exotische Beispiele von Mannigfaltigkeiten. Die Gebiete, die sich mit solchen Fragen beschäftigen sind die Differentialtopologie bzw. die geometrische Topologie.

- John Milnor entdeckte glatte Strukturen auf S^7 , die nicht diffeomorph zur Standardstruktur aus Beispiel 3.2.7 sind. Milnor und Kervaire bewiesen, dass es 28 paarweise nicht-diffeomorphe glatte Strukturen auf der S^7 gibt (und allgemeine Aussagen zur Anzahl von Diffeomorphieklassen von glatten Strukturen auf S^n sind bekannt).
- Freedman und Donaldson zeigten, dass es eine glatte Struktur auf dem $\mathbb{R}^4$ gibt, die nicht diffeomorph zum Standard $\mathbb{R}^4$ ist. Inzwischen ist bekannt, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-diffeomorphe glatte Strukturen auf $\mathbb{R}^4$ gibt. Andererseits sind für alle $n \neq 4$ alle glatten Strukturen auf $\mathbb{R}^n$ diffeomorph.
- Es gibt auch topologische Mannigfaltigkeiten, auf denen es keine glatte Struktur, also keinen C^∞ -kompatiblen Atlas gibt.

Tangentialvektoren und Differential

Lineare Algebra ist nahezu die einzige Möglichkeit in der Mathematik, Probleme tatsächlich zu lösen. Man kann sich also fragen, wie viel man über Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen mit Hilfe der linearen Algebra sagen kann. Die beste lineare Annäherung an eine Mannigfaltigkeit ist der Tangentialraum. Kurven in der Mannigfaltigkeit werden durch lineare Annäherung auf die Geschwindigkeitsvektoren an einem Punkt reduziert; dies führt zum Konzept des Tangentialvektors. Für Funktionen in der Umgebung eines Punktes ist die lineare Annäherung durch die Ableitung (alternativ, durch Taylor-Approximation) gegeben; durch (lineare) Taylor-Approximation werden Funktionen zu Linearformen auf dem Tangentialraum. In dieser Formulierung reduziert sich die Richtungsableitung von Funktionen in Richtung von Tangentialvektoren auf die Auswertung von Linearformen auf dem Tangentialraum. Mit dieser Sichtweise können wir Tangentialvektoren als Derivationen betrachten, also als Operatoren auf dem Raum der Funktionenkeime an einem Punkt. Umgekehrt können wir die Ableitung einer Funktion als Linearform auf dem Raum der Tangentialvektoren sehen.

Ein weiterer (insbesondere auch für physikalische Anwendungen durchaus zentraler) Aspekt dieser Formulierung von Tangentialvektoren durch Kurvenkeime oder Derivationen ist die Unabhängigkeit der Definition von gewählten Koordinaten. Für konkrete Rechnungen müssen natürlich immer noch Koordinaten gewählt werden, aber für Definitionen und Beweise allgemeiner Aussagen sind koordinatenfreie Darstellungen immer vorzuziehen.

4.1. Wiederholung Analysis

Wir wiederholen ein paar Begriffe aus der Analysis-Vorlesung, die wir auf Mannigfaltigkeiten übertragen wollen. Hauptsächlich geht es jetzt erst einmal um die ersten partiellen Ableitungen, die Jacobi-Matrix und die damit formulierte lineare Approximation von differenzierbaren Abbildungen. Diese Begriffe spielen für Tangentialbündel und Vektorfelder zentrale Rollen. Dagegen sind höhere (partielle) Ableitungen weit weniger zentral für die Vorlesung – die allgemeineren Formulierungen von Krümmung, die in zweiten Ableitungen kodiert ist, sind aber in der Riemannschen Geometrie fundamentale Begriffe.

4.1.1. Partielle Ableitungen und Jacobi-Matrix. Wir bezeichnen mit $r^1, \dots, r^n$ die Standardkoordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$:

$$r^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}: v = \sum_i v^i e_i \mapsto v^i.$$

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, so dass alle partiellen Ableitungen nach $r^1, \dots, r^n$ existieren und stetig sind. Mit den Standardkoordinaten $s^1, \dots, s^m$ auf $\mathbb{R}^m$ können wir f auch in die Komponentenfunktionen $f^i = s^i \circ f$ zerlegen. Die *Jacobi-Matrix*

der Abbildung f ist dann eine $(m \times n)$ -Matrix, deren Einträge die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen nach den Koordinatenfunktionen r^i sind:

$$J_f(p) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial r^j} \right)_{i,j}$$

Die Kettenregel aus der Analysis II besagt dann, dass für differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ die Verknüpfung $g \circ f$ auch differenzierbar ist, und es gilt

$$J_{g \circ f}(p) = J_g(f(p)) \cdot J_f(p).$$

Zwei wichtige Spezialfälle der Jacobi-Matrix sind Gradient und Tangentialvektoren für Kurven. Für den Spezialfall $m = 1$ besteht die Jacobi-Matrix einer Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nur aus einer Zeile. Dieser Vektor $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial r^j} \right)_j$ der partiellen Ableitungen von f heißt *Gradient* von f . Der Gradientenvektor an einem Punkt p zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktionswerte von f um p , und steht senkrecht auf dem Raum der Tangentialvektoren an die Niveaumenge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f(p)\}$. Für einen beliebigen Vektor v mit $\|v\| = 1$ ist die Richtungsableitung von f in Richtung v durch das Skalarprodukt $\text{grad } f \cdot v$ mit dem Gradienten gegeben. Der Gradient beschreibt die beste lineare Annäherung an die Funktion f , und taucht als Koeffizient des linearen Terms in der Taylor-Entwicklung von f auf.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.1. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Berechnen Sie den Gradienten von f und zeichnen Sie das zugehörige Gradientenvektorfeld $\text{grad } f$. (Zeichnung für $U = (-2, 2) \times (-2, 2)$, mit geeigneter Skalierung, Vergleich mit Niveaulinien für Funktion)

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.2. Finden Sie eine Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad } f = (y + z, x + z, x + y)$. Allgemein: Unter welcher Bedingung kann man eine Funktion mit vorgegebenem Gradienten finden?

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.3. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $xy^2 + x^2z^3 - 3yz = -1$ im Punkt $(1, 2, 1)$.

Der andere Spezialfall ist der Fall $n = 1$, in dem die Jacobi-Matrix für eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ nur eine Spalte hat. Die Abbildung f ist dann eine differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^m$ und der Vektor $\left(\frac{\partial f^i}{\partial t} \right)_j$ der Ableitungen der Komponentenfunktionen ist der *Tangentialvektor* an die Kurve. Der Betrag des Tangentialvektors wird interpretiert als Durchlaufgeschwindigkeit der Kurve, und das Integral über diesen Betrag ist dann die Bogenlänge.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.4. Bestimmen Sie die Parametrisierung der logarithmischen Spirale

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \exp(-t) \cos(t) \\ \exp(-t) \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \infty),$$

in Bogenlänge.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.5. Berechnen Sie Bogenlänge und Krümmung der Herzkurve, deren Parameterdarstellung in Polarkoordinaten durch $r(\phi) = 2a(1 - \cos \phi)$, $a \in \mathbb{R}$, gegeben ist.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.6. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \, ds$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 + 2xy$ und die Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.7. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Wählen Sie einen Weg γ von $a = (0, 0)$ nach $b = (1, 1)$ und berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \text{grad } f$. (geometrische Interpretation)

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.8. (1) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \, ds$ für $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 3x$.

(2) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f \, ds$ für $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (t, t)$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto xy$.

4.1.2. Partielle Ableitungen auf Mannigfaltigkeiten. Eine sehr wichtige Bemerkung zum vorigen Abschnitt ist, dass alle Konstruktionen – partielle Ableitungen, Gradienten, Tangentialvektoren – von der Wahl von Koordinaten abhängen. Die Parametrisierung einer differenzierbaren Kurve können wir zum Beispiel als spezielle Wahl von Koordinaten auf dem Definitionsbereich der Kurve sehen, und Umparametrisierung ändert die Länge des Tangentialvektors. Ebenso hängt der Gradient sehr davon ab, in welchen Koordinaten die Funktion $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben wird. Wenn wir Koordinaten wechseln, dann hat diese Koordinatenwechselfunktion eine Jacobi-Matrix, und die Kettenregel beschreibt genau den Effekt von Koordinatenwechsel auf Gradienten und Tangentialvektoren. Aus diesem Grund taucht die Jacobi-Matrix auch immer wieder auf, wenn wir Tangentialvektoren und Gradienten auf Mannigfaltigkeiten betrachten wollen.

DEFINITION 4.1.9. Sei M eine Mannigfaltigkeit, (U, ϕ) eine Karte und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Mit Hilfe der Karte (U, ϕ) werden dann auf U Koordinatenfunktionen durch $x^i = r^i \circ \phi$ definiert. Die partielle Ableitung von f nach x^i am Punkt $p \in U$ ist definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)).$$

Da f als glatt vorausgesetzt wird, ist auch die partielle Ableitung glatt, dies kann in der Karte (U, ϕ) direkt überprüft werden.

BEMERKUNG 4.1.10. Wichtig ist zu bemerken, dass die Koordinatenfunktionen x^i auf U und auch die partielle Ableitung $\partial f / \partial x^i$ von der Wahl der Karte abhängen. In der Analysis II kann man das bereits sehen: für eine Wahl von Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$ im $\mathbb{R}^n$ hängen die Richtungsableitungen $\partial_{e_i} f$ einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ natürlich von der Wahl der Basis ab.

PROPOSITION 4.1.11. Sei (U, ϕ) eine Karte für eine Mannigfaltigkeit M , und seien $x^1, \dots, x^n$ die dazugehörigen Koordinatenfunktionen auf U . Dann gilt

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i.$$

BEWEIS. Nach Definition ist

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial x^i \circ \phi^{-1}}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial r^i \circ \phi \circ \phi^{-1}}{\partial r^j}(\phi(p)) = \delta_j^i$$

□

DEFINITION 4.1.12. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Seien (U, ϕ) und (V, ψ) Karten für M bzw. N , mit zugehörigen Koordinatenfunktionen $x^1, \dots, x^n$ und $y^1, \dots, y^m$. Wir nehmen an, dass $f(U) \subseteq V$.

Die Komponentenfunktionen von f bezüglich der Koordinaten $y^1, \dots, y^m$ sind dann gegeben durch $f^i = y^i \circ f = r^i \circ \psi \circ f$. Die Matrix

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

heißt die Jacobi-Matrix für f in den Karten (U, ϕ) und (V, ψ) . Im Fall $n = m$ heißt $\det(\partial f^i / \partial x^j)$ Jacobi-Determinante für f in den Karten (U, ϕ) und (V, ψ) .

BEISPIEL 4.1.13. Seien $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ zwei Karten für eine Mannigfaltigkeit. Die Jacobi-Matrix für den Kartenwechsel ist die Jacobi-Matrix $\partial y^i / \partial x^j$ für die Identität auf $U \cap V$ bezüglich der Karten U und V . $\square$

BEMERKUNG 4.1.14. Auch hier hängen die Matrix und Determinante wieder von den Karten ab.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.15. Zeigen Sie, dass $\det(\partial f^i / \partial x^j) \neq 0$ unabhängig von der Wahl der Karte ist. (Basiswechselmatrizen in LA I)

4.1.3. Taylor-Approximation. Wir werden die Taylor-Approximation nur in der Form linearer Annäherung an glatte Funktionen benötigen.

DEFINITION 4.1.16. Wir nennen eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig um den Punkt $p \in U$, wenn für jeden Punkt $x \in U$ die Verbindungsstrecke zwischen x und p in U liegt.

PROPOSITION 4.1.17. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die sternförmig um den Punkt p ist, und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann existieren glatte Funktionen $g_1, \dots, g_n \in C^\infty(U)$ so dass

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n (x^i - p^i) g_i(x), \quad g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p).$$

BEWEIS. Für $x \in U$ wird die Verbindungsstrecke zwischen x und p beschrieben durch $p + t(x - p)$ für $0 \leq t \leq 1$. Da f auf dem sternförmigen Bereich U definiert ist, ist $f(p + t(x - p))$ für $x \in U$ und $0 \leq t \leq 1$ definiert. Die Kettenregel liefert

$$\frac{df(p + t(x - p))}{dt} = \sum (x^i - p^i) \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x - p)).$$

Integration über $t \in [0, 1]$ liefert

$$f(x) - f(p) = \sum (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x - p)) dt.$$

Die Funktionen $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x - p)) dt$ sind glatt, und wegen

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p) dt = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)$$

sind alle Behauptungen erfüllt. $\square$

Diese Variante des Satzes von Taylor ist notwendig, da C^∞ -Funktionen nicht notwendigerweise mit ihren Taylor-Reihen übereinstimmen. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

aus dem Abschnitt 3.4 zur Zerlegung der Eins. Alle Ableitungen am Punkt 0 verschwinden, also ist die Taylor-Reihe 0, aber die Funktion ist von 0 verschieden.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.18. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}$ auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es genau eine Minimumstelle gibt und bestimmen Sie diese.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.19. *Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion*

$$f(x, y) = xy \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

4.2. Tangentialvektoren als infinitesimale Kurven

Wir diskutieren zuerst die geometrische Sichtweise auf Tangentialvektoren: als lineare Annäherung an Kurven. Dies ist eine nahezu direkte Übertragung des Begriffs der Tangentialvektoren an Kurven im $\mathbb{R}^n$.

Zur Erinnerung, s. Notation 3.3.2 und 3.3.6: für eine offene Teilmenge $U \subseteq M$ bezeichnet $C^\infty(U)$ die Menge der auf U definierten glatten Funktionen. Für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ und eine offene Teilmenge $V \subseteq N$ gibt es eine induzierte Abbildung

$$f^*: C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(f^{-1}(V)): g \in C^\infty(V) \mapsto g \circ f.$$

DEFINITION 4.2.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Für einen Punkt $p \in M$ definieren wir auf der Menge*

$$\{(U, f) \mid p \in U, U \subset M \text{ offen}, f \in C^\infty(U)\}$$

von in einer Umgebung von p definierten C^∞ -Funktionen die folgende Äquivalenzrelation:

$$(U, f) \sim (V, g) \iff \exists W \subset U \cap V \text{ offen, und } f|_W = g|_W.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation heißt die Menge der Funktionenkeime am Punkt $p \in M$ und wird mit $C_p^\infty(M)$ bezeichnet. Addition und Multiplikation von Funktionen induzieren Operationen auf Keimen, durch die $C_p^\infty(M)$ eine $\mathbb{R}$ -Algebra wird.

Für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ gibt es eine induzierte Abbildung

$$f^*: C_{f(p)}^\infty(N) \rightarrow C_p^\infty(M): (V, g) \mapsto (f^{-1}(V), g \circ f).$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ -Algebren.

ÜBUNGSAUFGABE 4.2.2. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass $C_p^\infty(M)$ mit Addition und Multiplikation von Keimen für jeden Punkt $p \in M$ eine $\mathbb{R}$ -Algebra ist. Zeigen Sie für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$, dass*

$$f^*: C_{f(p)}^\infty(N) \rightarrow C_p^\infty(M)$$

für jeden Punkt p ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$ -Algebren ist.

BEMERKUNG 4.2.3. *Mit Kategorientheorie kann die Definition von $C_p^\infty(M)$ umformuliert werden:*

$$C_p^\infty(M) = \operatorname{colim}_{p \in U \subseteq M \text{ offen}} C^\infty(U).$$

Für eine gewählte Karte (U, ϕ) mit $p \in U$ induziert ϕ einen Isomorphismus:

$$\phi: C_p^\infty(M) \rightarrow C_{\phi(p)}^\infty(\mathbb{R}^n): (V, f) \mapsto (\phi(V \cap U), f \circ \phi^{-1}).$$

DEFINITION 4.2.4. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Wir definieren auf der Menge*

$$\{\gamma: (a, b) \rightarrow M \mid a < 0 < b, \gamma(0) = p, \gamma \text{ glatt}\}$$

von glatten Kurven durch den Punkt p die folgende Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \left. \frac{df(\gamma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{df(\gamma_2(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad \text{für alle } f \in C_p^\infty(M).$$

Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen infinitesimale Kurven oder Tangentialvektoren an M im Punkt p . Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit $T_p M$ bezeichnet.

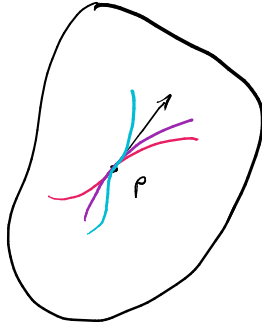


ABBILDUNG 13. Verschiedene äquivalente Kurven als unterschiedliche Repräsentanten desselben Tangentialvektors

In $\mathbb{R}^n$ können Tangentialvektoren durch Pfeile veranschaulicht werden. Dies setzt allerdings ein konkretes Koordinatensystem voraus. Außerdem ist natürlich der Begriff der Geraden nicht invariant unter Diffeomorphismen, so dass eine Gerade in einem Koordinatensystem in einem anderen Koordinatensystem eine beliebige glatte Kurve sein kann. Dagegen ist die obige Definition von Tangentialvektoren als Äquivalenzklassen von Kurvenkeimen unabhängig von der Wahl der Karte. Konkret sind für diese Äquivalenzrelation Kurven äquivalent genau dann, wenn die ersten Richtungsableitungen beliebiger Funktionen in Richtung der Kurve wohldefiniert sind.

ÜBUNGSAUFGABE 4.2.5. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Karte um den Punkt p . Seien $\gamma_1: (a_1, b_1) \rightarrow M$ und $\gamma_2: (a_2, b_2) \rightarrow M$ zwei Kurven durch den Punkt p . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1) Die Kurven sind äquivalent im Sinne von Definition 4.2.4.
- (2) Die Bilder $\phi \circ \gamma_1$ und $\phi \circ \gamma_2$ der Kurven in der Karte haben am Punkt $\phi(p)$ den gleichen Tangentialvektor.
- (3) Für die Koordinatenfunktionen $x^i = r^i \circ \phi$ der Karte (s. Definition 4.1.9) gilt

$$\left. \frac{dx^i(\gamma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^i(\gamma_2(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

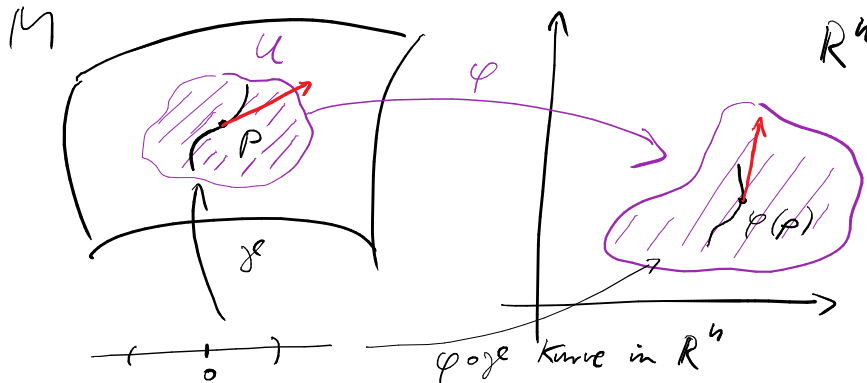


ABBILDUNG 14. Tangentialvektor in Mannigfaltigkeit M vs. Tangentialvektor an Kurve in Karte

LEMMA 4.2.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Der Tangentialraum $T_p M$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

BEWEIS. Für die Definition der Addition wählen wir eine Karte (U, ϕ) um p . Für zwei infinitesimale Kurven γ_1 und γ_2 und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Linearkombination $\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2$ gegeben durch

$$\phi^{-1}(\lambda\phi(\gamma_1(t)) + \mu\phi(\gamma_2(t)) - (\lambda + \mu - 1)\phi(p))$$

In $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ entspricht dies genau der Linearkombination der Tangentialvektoren an die Kurven $\phi(\gamma_1(t))$ und $\phi(\gamma_2(t))$. Die Vektorraum-Axiome sind erfüllt, weil sie für $\mathbb{R}^n$ erfüllt sind. $\square$

BEISPIEL 4.2.7. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ ist leicht zu sehen, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathbb{R}^n: (v \in \mathbb{R}^n) \mapsto [\gamma(t) = p + v \cdot t]$$

ein Isomorphismus ist. Die Injektivität folgt, weil für einen Vektor $v \neq 0$ eine Funktion konstruiert werden kann, die in Richtung v eine von 0 verschiedene Ableitung hat. Die Surjektivität folgt, weil jede Äquivalenzklasse in $T_p\mathbb{R}^n$ durch die partiellen Ableitungen in Koordinatenrichtungen eindeutig bestimmt ist. Alternativ kann man natürlich die Umkehrabbildung $T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ konkret angeben: eine infinitesimale Kurve wird auf ihren Tangentialvektor abgebildet.

Insbesondere ist eine Basis für $T_p\mathbb{R}^n$ gegeben durch die Kurven $p + e_i \cdot t$. $\square$

Wir haben bereits bemerkt, dass die Definition der partiellen Ableitung in eine Koordinatenrichtung natürlich von der Wahl des Koordinatensystems (bzw. der Karte der Mannigfaltigkeit) abhängt. Mit der vorigen Definition von Tangentialvektoren können wir jetzt allerdings die Richtungsableitungen betrachten, die unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind.

DEFINITION 4.2.8. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ ein Repräsentant des Tangentialvektors $v \in T_pM$. Für einen Funktionenkeim $(U, f) \in C_p^\infty(M)$ definieren wir die Richtungsableitung von f in Richtung v durch

$$D_v f := \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

BEMERKUNG 4.2.9. Dies entspricht genau der Definition der Richtungsableitung aus Analysis II. Eine Möglichkeit, das zu sehen ist, die Ableitung als Grenzwert eines Differenzenquotienten zu schreiben. Die Definition von Richtungsableitung einer auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definierten Funktion f in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich als Spezialfall der obigen Definition, wenn wir als Kurve $\gamma(t) = p + v \cdot t$ nehmen.

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, nach Definition 4.2.4.

BEISPIEL 4.2.10. Für $p \in \mathbb{R}^n$ haben wir die bekannte Beziehung zwischen Richtungsableitung und partiellen Ableitungen: für $v \in T_p\mathbb{R}^n$ und $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$D_v f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial r^i}(p) = v \cdot \text{grad}(f).$$

Dies folgt unmittelbar aus der Definition 4.2.8 und der Kettenregel. $\square$

4.3. Tangentialvektoren als Derivationen

Die Richtungsableitung aus Definition 4.2.8 erlaubt jetzt eine alternative Interpretation von Tangentialvektoren: ein Tangentialvektor v am Punkt p ist ein Operator, der jedem Funktionenkeim f um p den Wert der Richtungsableitung $D_v f$ von f in Richtung v zuordnet. Dies führt auf die Interpretation von Tangentialvektoren als Derivationen.

DEFINITION 4.3.1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, A eine kommutative R -Algebra und M ein A -Modul.

- Eine R -Derivation von A mit Werten in M ist eine R -lineare Abbildung $D: A \rightarrow M$, so dass für alle $a, b \in A$ die Leibniz-Regel $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ erfüllt ist.

- Die Menge aller R -Derivationen von A mit Werten in M ist ein R -Modul, der mit $\text{Der}_R(A, M)$ bezeichnet wird.
- Für einen Homomorphismus $\phi: A \rightarrow B$ von R -Algebren haben wir einen induzierten Homomorphismus von R -Moduln:

$$\phi^*: \text{Der}_R(B, M) \rightarrow \text{Der}_R(A, M): D \mapsto D \circ \phi$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.3.2. Sei A eine kommutative $\mathbb{R}$ -Algebra, M ein A -Modul, und D eine $\mathbb{R}$ -Derivation von A mit Werten in M . Zeigen Sie:

- (1) Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $D(r) = 0$.
- (2) Für alle $a \in A$ gilt die übliche Ableitungsregel für Polynome $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$.

ÜBUNGSAUFGABE 4.3.3. Sei A eine kommutative $\mathbb{R}$ -Algebra. Für zwei Derivationen $D_1, D_2: A \rightarrow A$ definieren wir den Kommutator $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. Zeigen Sie:

- (1) Der Kommutator $[D_1, D_2]$ ist wieder eine Derivation.
- (2) Der Kommutator erfüllt die Jacobi-Identität:

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_3, [D_1, D_2]] + [D_2, [D_3, D_1]] = 0.$$

BEISPIEL 4.3.4. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine kommutative R -Algebra. Es gibt eine universelle R -Derivation von A : wir betrachten den A -Modul $\Omega_{A/R}$, der als Erzeuger die Symbole da mit $a \in A$ und die Relationen

$$d(a+b) = d(a) + d(b), \quad d(fg) = fdg + gdf, \quad dr = 0$$

für $a, b, f, g \in A$ und $r \in R$ hat. Die Abbildung $d: A \rightarrow \Omega_{A/R}: a \mapsto da$ ist eine R -Derivation von A mit Werten im A -Modul $\Omega_{A/R}$.

Der Modul $\Omega_{A/R}$ heißt auch Modul der Kähler-Differentiale und hat die folgende universelle Eigenschaft: für jede R -Derivation $D: A \rightarrow M$ gibt es eine eindeutige Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{d} & \Omega_{A/R} \\ & \searrow D & \downarrow \text{dotted} \\ & & M \end{array}$$

□

BEISPIEL 4.3.5. Sei $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ ein Tangentialvektor am Punkt p . Die Abbildung

$$D_v: C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}: f \mapsto D_v f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial r^i}(p),$$

die einer Funktion f die Richtungsableitung von f am Punkt p in Richtung v zuordnet, ist eine Derivation in $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. Die $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Modulstruktur von $\mathbb{R}$ ist dabei durch

$$C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: ((U, f), \lambda) \mapsto f(p) \cdot \lambda$$

gegeben. Die Leibniz-Regel folgt aus der Produktregel für die partiellen Ableitungen.

Allgemeiner ist für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ einer Mannigfaltigkeit M um den Punkt p die partielle Ableitung

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)}$$

aus Definition 4.1.9 eine Derivation in $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$.

□

SATZ 4.3.6. *Die lineare Abbildung*

$$T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R}): v \mapsto D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_p$$

ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Die $\mathbb{R}$ -Linearität der Abbildung folgt direkt aus der Definition der Richtungsableitung als Linearkombination der partiellen Ableitungen.

Für die Injektivität sei $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$ ein Vektor mit $D_v = 0$. Für die Koordinatenfunktionen r^j gilt

$$D_v(r^j) = \sum v^i \frac{\partial r^j}{\partial r^i} = \sum v^i \delta_i^j = v^j.$$

Wir sehen, dass $D_v = 0$ nur für $v = 0$ gelten kann, also ist die Abbildung injektiv.

Für die Surjektivität sei $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})$ eine Derivation. Für einen Funktionenkeim (U, f) können wir den Satz von Taylor (in der Form von Proposition 4.1.17) anwenden: auf einer kleineren Umgebung U' von p existieren C^∞ -Funktionen $g_1, \dots, g_n$ mit $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)$, so dass auf U' gilt

$$f(x) = f(p) + \sum (x^i - p^i) g_i(x).$$

Auf diese Gleichheit wenden wir die Derivation D an:

$$Df = \sum (g_i(p) D(r^i - p^i) + (p^i - p^i) Dg_i) = \sum D(r^i) \frac{\partial f}{\partial r^i}(p).$$

Diese Derivation ist die Richtungsableitung für den Vektor $v = (Dr^1, \dots, Dr^n)$. $\square$

BEMERKUNG 4.3.7. *Unter dem Isomorphismus aus Satz 4.3.6 entspricht die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ von $T_p(\mathbb{R}^n)$ den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial r^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial r^n} \Big|_p$ wobei die $r^1, \dots, r^n$ die Standard-Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind.*

4.4. Differential für Abbildungen

DEFINITION 4.4.1. *Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann induziert f lineare Abbildungen*

$$f_*: \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(N), \mathbb{R}): D \mapsto \left(g \in C_{f(p)}^\infty(N) \mapsto D(g \circ f) \right)$$

$$df: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N): ((\gamma: (a, b) \rightarrow M) \mapsto f \circ \gamma).$$

Beide Abbildungen heißen Differential der glatten Abbildung $f: M \rightarrow N$ am Punkt p .

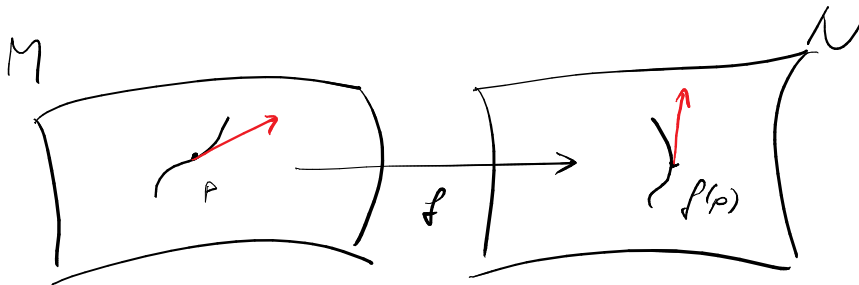


ABBILDUNG 15. Differential der Abbildung f durch Bild der Kurve γ

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.2. *Sei $f: M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung und $p \in M$ ein Punkt. Beweisen Sie, dass das Differential $T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ eine lineare Abbildung ist.*

BEMERKUNG 4.4.3. Alternativ ist das Differential $f_*: \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(N), \mathbb{R})$ die vom Pullback $f^*: C_{f(p)}^\infty(N) \rightarrow C_p^\infty(M)$ von Funktionen aus Definition 4.2.1 induzierte Abbildung auf $\text{Der}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R})$ aus Definition 4.3.1.

PROPOSITION 4.4.4 (Kettenregel). Seien $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow P$ glatte Abbildungen, und $p \in M$ ein Punkt. Dann haben wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) & \xrightarrow{f_*} & \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(N), \mathbb{R}) \\ & \searrow (g \circ f)_* & \downarrow g_* \\ & & \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{g(f(p))}^\infty(P), \mathbb{R}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{df} & T_{f(p)}(N) \\ & \searrow d(g \circ f) & \downarrow dg \\ & & T_{g(f(p))}(P) \end{array}$$

BEWEIS. Sei $D \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M))$ eine Derivation und $(U, h) \in C_{g(f(p))}^\infty$ ein glatter Funktionenkeim. Nach Definition 4.4.1 bildet die Derivation $(g \circ f)_*(D)$ die Funktion h auf $D(h \circ g \circ f)$ ab. Andererseits bildet die Derivation $g_* \circ f_*(D)$ die Funktion h auf

$$f_*(D)(h \circ g) = D(h \circ g \circ f)$$

ab. Also ist das Diagramm wie behauptet kommutativ.

Die entsprechende Aussage für das zweite Diagramm folgt direkt aus der Definition des Differentials df als Komposition der infinitesimalen Kurve mit f . $\square$

BEMERKUNG 4.4.5. Aus Definition 4.4.1 folgt direkt, dass die von der Identität $\text{id}: M \rightarrow M$ induzierte Abbildung $\text{id}_*: \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ auch die Identität ist. Insbesondere ist also das Differential für glatte Abbildungen funktoriell (als Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit Punkt (M, p) mit Abbildungen glatte punktierte Abbildungskeime in die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume).

PROPOSITION 4.4.6. Sei $f: M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus und $p \in M$. Dann haben wir Isomorphismen

$$\begin{aligned} f_*: \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) &\xrightarrow{\cong} \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(N), \mathbb{R}) \\ df: T_p(M) &\xrightarrow{\cong} T_{f(p)}(N) \end{aligned}$$

BEWEIS. Folgt direkt aus der Funktorialität des Differentials. $\square$

KOROLLAR 4.4.7 (glatte Invarianz der Dimension). Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei offene Teilmengen. Wenn es einen Diffeomorphismus $U \cong V$ gibt, dann gilt $n = m$.

BEWEIS. Aus Theorem 4.3.6 und Beispiel 4.2.7 folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(U), \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} T_p \mathbb{R}^n = n$$

Analog folgt $\dim_{\mathbb{R}} \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(V), \mathbb{R}) = m$. Anwendung von Proposition 4.4.6 liefert die Behauptung. $\square$

KOROLLAR 4.4.8. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann ist die lineare Abbildung

$$T_p(M) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}): v \mapsto D_v,$$

die einen Tangentialvektor auf die Richtungsableitung aus Definition 4.2.8 abbildet, ein Isomorphismus. Außerdem gibt es für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_p(M) & \xrightarrow{\cong} & \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) \\ df \downarrow & & \downarrow f_* \\ T_{f(p)}(N) & \xrightarrow{\cong} & \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(N), \mathbb{R}) \end{array}$$

BEWEIS. Die erste Aussage folgt direkt aus Proposition 4.4.6 zusammen mit Theorem 4.3.6. Die Kommutativität des Diagramms folgt aus der ersten Aussage und einem analogen Quadrat für eine glatte Abbildung $f: U \rightarrow V$ für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Die Kommutativität in diesem Fall folgt daraus, dass beide vertikalen Abbildungen einfach durch die Jacobi-Matrix gegeben sind. $\square$

BEMERKUNG 4.4.9. Insbesondere können wir sowohl $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ als auch $T_p M$ als Definition des Tangentialraums einer Mannigfaltigkeit verwenden, und die zwei Definitionen von Differential, s. Definition 4.4.1, sind mit dieser Identifikation kompatibel. Wir werden im weiteren Verlauf die notationelle Unterscheidung zwischen $T_p M$ und $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ weglassen und infinitesimale Kurven mit ihren durch die Richtungsableitung gegebenen Derivationen identifizieren.

Aus Proposition 4.4.6 folgt auch, dass für eine Karte (U, ϕ) einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n und $p \in M$ die Abbildung ϕ einen Isomorphismus

$$\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_{\phi(p)}^\infty(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$$

induziert. Insbesondere hat der Tangentialraum an eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit auch Dimension n .

PROPOSITION 4.4.10. Sei $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte um den Punkt p in der glatten Mannigfaltigkeit M . Dann ist $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$ eine Basis von $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$.

Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, sei $(U, x^1, \dots, x^m)$ eine Karte um $p \in M$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ eine Karte um $f(p)$. Dann gilt für das Differential

$$f_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{f(p)},$$

d.h. für die obige Wahl von Basen für die Tangentialräume ist die Jacobi-Matrix von f in den gewählten Karten die darstellende Matrix des Differentials.

BEWEIS. Nach Definition 4.4.1 gilt für das Differential ϕ_* der Kartenabbildung

$$\phi_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) (f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p (f \circ \phi) = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f)$$

Die Behauptung folgt dann direkt aus Proposition 4.4.6 und Theorem 4.3.6 bzw. Bemerkung 4.3.7.

Das Differential ist linear, d.h. es gibt $a_j^i \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$f_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = \sum_{i=1}^n a_j^i \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_{f(p)}$$

Dann ist $(a_j^i)_{i,j}$ die darstellende Matrix für f_* . Die Koeffizienten können wir ermitteln:

$$a_j^i = \left(\sum_{k=1}^m a_j^k \left. \frac{\partial}{\partial y^k} \right|_{f(p)} \right) y^i = f_* \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) y^i = \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p (y^i \circ f) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)$$

□

BEMERKUNG 4.4.11. Für den Spezialfall $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ und $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir als darstellende Matrizen für die Differentiale γ_* und f_*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Die Kettenregel 4.4.4 hat dann die aus der Analysis-Vorlesung übliche Form

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Der Tangentialvektor an eine glatte Kurve $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist das Bild von $\frac{d}{dt}$ unter dem Differential γ_* .

BEMERKUNG 4.4.12. Tatsächlich ist das Differential $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ genau das totale Differential aus der Analysis II. Für eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ von M sind die Abbildungen dx^i (bzw. x_*^i) Linearformen auf $T_p M$. Genauer sind die $dx^1, \dots, dx^n$ die duale Basis zur Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ von $T_p M$. Das Differential df , als Linearform auf $T_p M$, läßt sich dann in der dualen Basis schreiben:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Dies ist genau die Formel für das totale Differential aus Analysis II.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.13. Wir betrachten die n -Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

- (1) Zeigen Sie, dass für einen Punkt $p \in S^n$ mit Richtungsvektor $v_p \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Tangentialraum $T_p S^n$ mit dem Untervektorraum

$$v_p^\perp = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, w \rangle = 0\}$$

identifiziert werden kann.

- (2) Bestimmen Sie für $p \neq (0, \dots, 0, 1)$ die Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, die zu den Koordinatenfunktionen $x^1, \dots, x^n$ der durch die stereographische Projektion gegebenen Karte gehört, s. Beispiel 2.4.1.

- (3) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Höhenfunktion

$$h: S^n \rightarrow \mathbb{R}: (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_n$$

für die ermittelten Basisvektoren.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.14. Wir betrachten die Kartenwechselabbildung

$$\gamma: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}: (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

im Atlas der 2-Sphäre, der durch stereographische Projektion gegeben ist, s. Beispiel 3.2.7. Berechnen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix für die Kartenwechselabbildung. Interpretieren Sie das Ergebnis.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.15. Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass die Differentiale der Projektionsabbildungen Isomorphismen induzieren:

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \oplus T_q N.$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.16. Zeigen Sie für die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$, dass der Tangentialraum $T_{I_n} GL_n(\mathbb{R})$ an der Einheitsmatrix mit dem Vektorraum der $(n \times n)$ -Matrizen $\mathbb{R}^{n^2}$ identifiziert werden kann. Zeigen Sie, dass unter dieser Identifikation das Differential der Matrixmultiplikation $\mu: GL_n \times GL_n \rightarrow GL_n$ genau der Addition auf $\mathbb{R}^{n^2}$ entspricht.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.17. (1) Sei $A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Differential der Konjugationsabbildung $c_A: \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{R}: M \mapsto AMA^{-1}$ an der Einheitsmatrix I_n .

(2) Nun betrachten wir die Konjugationsabbildung

$$c: \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \times \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{R}: (A, M) \mapsto AMA^{-1}.$$

Bestimmen Sie nun das Differential von c am Punkt (I_n, I_n) .

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.18. Wir betrachten die Grassmannsche $\mathrm{Gr}(k, n)$ der k -dimensionalen Untervektorräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^n$ und die Abbildung $\mu: \mathrm{GL}_n \times \mathrm{Gr}(k, n) \rightarrow \mathrm{Gr}(k, n): (M, W) \mapsto M \cdot W$, die durch Linksmultiplikation mit einer Matrix $M \in \mathrm{GL}_n$ gegeben ist. Mit den Identifikationen aus Übungsaufgabe 4.4.16 ist das Differential von μ am Punkt (I_n, W) , $W \subset V$ ein k -dimensionaler Unterraum, eine lineare Abbildung

$$d\mu: \mathrm{Hom}(V, V) \rightarrow T_W \mathrm{Gr}(k, n).$$

Auf der anderen Seite habe wir die natürliche Abbildung

$$\pi: \mathrm{Hom}(V, V) \rightarrow \mathrm{Hom}(W, V/W): (\alpha: V \rightarrow V) \mapsto (W \hookrightarrow V \xrightarrow{\alpha} V \twoheadrightarrow V/W),$$

wobei $W \hookrightarrow V$ die natürliche Einbettung als Unterraum und $V \twoheadrightarrow V/W$ die natürliche Projektion ist. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung

$$\nu: \mathrm{Hom}(W, V/W) \rightarrow T_W \mathrm{Gr}(k, V)$$

gibt, für die $d\mu = \nu \circ \pi$ gilt. Zeigen Sie, dass ν ein Isomorphismus ist.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.19. Berechnen Sie die darstellende Matrix des Differentials der Hopf-Abbildung aus Übungsaufgabe 3.3.15 in den durch die stereographische Projektion gegebenen Karten.

4.5. Tangentialbündel und Vektorbündel

Bis jetzt haben wir die Tangentialräume an den Punkten einer Mannigfaltigkeit als separate Vektorräume behandelt. Wir wollen nun alle Tangentialräume zu einer Mannigfaltigkeit zusammenfassen, dem Tangentialbündel. Dies ist ein Spezialfall des allgemeineren Konzepts von Vektorbündeln. Dadurch können insbesondere Vektorfelder einfach als glatte Abbildungen betrachtet werden.

DEFINITION 4.5.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Das Tangentialbündel für M ist, als Menge, gegeben durch

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Es gibt eine natürliche Projektionsabbildung $\pi: TM \rightarrow M: v \in T_p M \mapsto p$.

Für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ von M haben wir eine Abbildung

$$d\phi: T_p U \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n,$$

die sich als Zusammensetzung des Differentials mit der Identifikation aus Beispiel 4.2.7 ergibt. Diese Abbildung schickt einen Tangentialvektor auf seine Koordinaten bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ und ist ein Isomorphismus. Kombiniert mit der Kartenabbildung erhalten wir eine Abbildung

$$(\phi \circ \pi, d\phi): TU = \bigcup_{p \in U} T_p U \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n.$$

Auf TU wird dann eine Topologie dadurch definiert, dass $(\phi \circ \pi, d\phi)$ ein Homöomorphismus sein soll, wobei $\phi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ die von $\mathbb{R}^{2n}$ induzierte Topologie trägt.

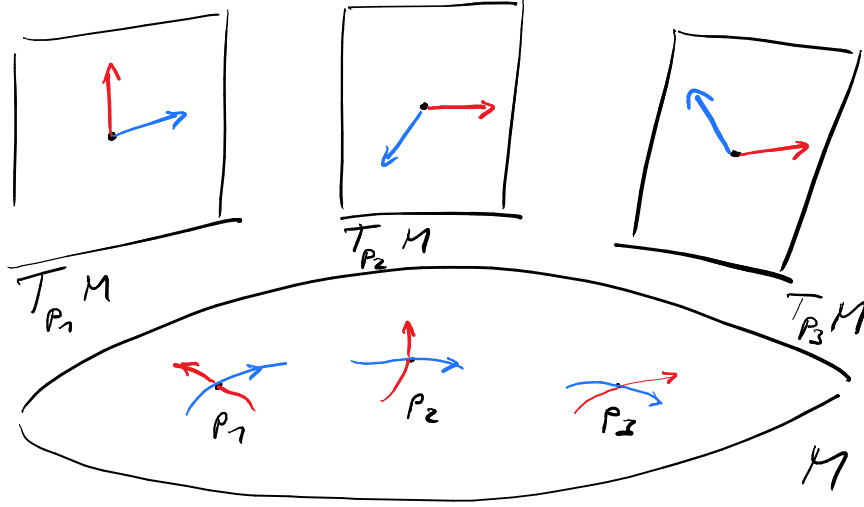


ABBILDUNG 16. Tangentialbündel als Zusammenfassung aller Tangentialräume an verschiedenen Punkten der Mannigfaltigkeit.

PROPOSITION 4.5.2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit von Dimension n mit Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$. Die in Definition 4.5.1 gegebenen Abbildungen

$$(\phi_i \circ \pi, d\phi_i): T_p U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

bilden einen Atlas $\{(TU_i, (\phi_i \circ \pi, d\phi_i))\}_{i \in I}$. Insbesondere ist das Tangentialbündel TM eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst die C^∞ -Kompatibilitätsbedingungen für den Atlas auf TM . Seien $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ Karten für M . Auf $U \cap V$ haben wir als Kartenwechselabbildung

$$\phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n: (\phi(p), v) \mapsto \left(\psi(p), \sum v^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$$

Das heisst, als Abbildung $\phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ haben wir die Kartenwechselabbildung $\psi \circ \phi^{-1}$ von M , und auf dem $\mathbb{R}^n$ -Faktor haben wir Multiplikation $v \mapsto v \cdot \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)$ mit der Jacobi-Matrix für den Kartenwechsel, nach Proposition 4.4.10.

Da sowohl $\psi \circ \phi^{-1}$ als auch die Multiplikation mit der Jacobi-Matrix glatte Abbildungen sind, erfüllen also die Karten $(TU, (\phi \circ \pi, d\phi))$ und $(TV, (\psi \circ \pi, d\psi))$ die C^∞ -Kompatibilitätsbedingung.

Auf TM definieren wir eine Topologie durch Angabe einer Basis:

$$\{V \mid V \subseteq TU \text{ offen, } (U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n) \text{ Karte im maximalen Atlas}\}$$

Es ist direkt zu sehen, dass TM die Vereinigung aller dieser Teilmengen ist. Außerdem ist für offene Teilmengen $V_1 \subseteq TU_1$ und $V_2 \subseteq TU_2$ der Schnitt

$$V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_2 \cap T(U_1 \cap U_2) = (V_1 \cap (TU_1 \cap TU_2)) \cap (V_2 \cap (TU_1 \cap TU_2))$$

offen in $T(U_1 \cap U_2)$, da $V_1 \cap T(U_1 \cap U_2)$ offen in $T(U_1 \cap U_2)$ ist. Damit haben wir gezeigt, dass die angegebenen Mengen die Basis einer Topologie sind.

Wir zeigen, dass TM eine abzählbare Basis hat. Sei $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ ein maximaler Atlas für M und $\{B_j\}_{j \in J}$ eine abzählbare Basis von M . Dann wählen wir für jedes U_i und jeden Punkt $p \in U_i$ eine offene Umgebung $p \in B_{p,i} \subseteq U_i$. Dies ist eine abzählbare Menge offener Mengen. Für jede offene Menge U und jeden Punkt $p \in U$ gibt es eine Karte (U_i, ϕ_i) mit $p \in U_i \subseteq U$ und $B_{p,i} \subseteq U_i \subseteq U$. Also ist U eine Vereinigung geeigneter $B_{p,i}$ und damit ist $\{B_{p,i}\}$ eine abzählbare Basis von M , deren

offene Mengen zu Karten im maximalen Atlas gehören. Wir betrachten die Menge $\{TB_{p,i}\}$. Jeder der Unterräume $TB_{p,i}$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Die Vereinigung von gewählten Basen für die abzählbar vielen Räume $TB_{p,i}$ ist eine abzählbare Basis für TM .

Es ist direkt zu sehen, dass diese Topologie hausdorffsch ist. Es folgt, dass TM eine Mannigfaltigkeit ist. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 4.5.3. Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Standard-Einheitssphäre. Für einen Punkt $x \in S^n$ identifizieren wir den Tangentialraum $T_x S^n$ mit Hilfe des Differentials $T_x S^n \xrightarrow{d_x} T_x \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ als Unterraum in $\mathbb{R}^{n+1}$. Wir betrachten die Teilmenge

$$N = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S^n, v \in \mathbb{R}^{n+1}, v \perp T_x S^n\}.$$

Zeigen Sie, dass N eine Mannigfaltigkeit von Dimension $n+1$ ist.

ÜBUNGSAUFGABE 4.5.4. Zeigen Sie, dass die Mannigfaltigkeit TS^n diffeomorph zu $S^n \times S^n \setminus \Delta$ ist, wobei Δ das Bild der diagonalen Einbettung ist:

$$S^n \hookrightarrow S^n \times S^n : x \mapsto (x, x)$$

DEFINITION 4.5.5. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein glattes Vektorbündel von Rang r auf M ist eine glatte Abbildung $\pi: E \rightarrow M$ zwischen Mannigfaltigkeiten, so dass gilt

- (1) Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es einen Isomorphismus $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{R}^r$, d.h. die Fasern der Abbildung π haben die Struktur von Vektorräumen.
- (2) Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p und einen Diffeomorphismus $\tau: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ mit $\text{pr}_1 \circ \tau(v) = v$, der für jeden Punkt $p \in U$ einen Isomorphismus $\tau|_p: \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^r$ von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen induziert.

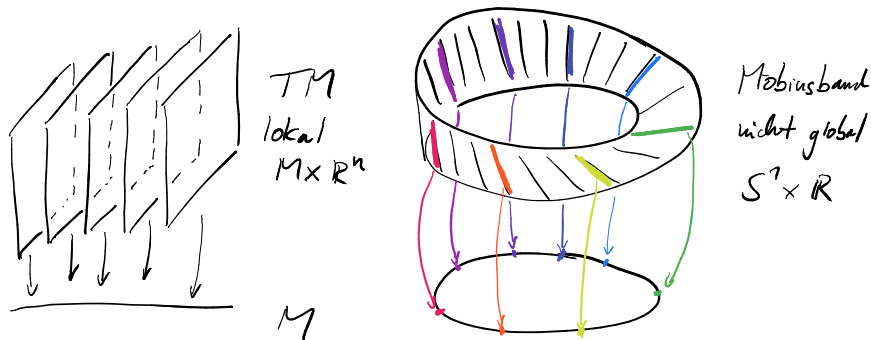


ABBILDUNG 17. Als Vektorbündel ist das Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit immer lokal trivial: für jeden Punkt $x \in M$ gibt es eine Umgebung U s.d. $TM|_U$ diffeomorph zu $U \times \mathbb{R}^{\dim M}$ ist. Im Allgemeinen sind Vektorbündel nicht global trivial, wie das Möbiusband zeigt.

BEMERKUNG 4.5.6. Die Diffeomorphismen $\tau: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ heißen lokale Trivialisierungen. Die Mannigfaltigkeit E heißt Totalraum des Vektorbündels, M heißt Basis.

BEMERKUNG 4.5.7. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein Vektorbündel von Rang r . Für zwei lokale Trivialisierungen $\tau_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ und $\tau_V: \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times \mathbb{R}^r$ haben wir die Übergangsabbildung

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\alpha_i^{-1}} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\alpha_j} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r.$$

Aus den Bedingungen der lokalen Trivialisierbarkeit folgt, dass eine glatte Abbildung $A_{U,V}: U \cap V \rightarrow \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ existiert, so dass die Übergangsabbildung durch $\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}(p, v) = (p, A_{U,V}(p)(v))$ gegeben ist.

ÜBUNGSAUFGABE 4.5.8. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M und eine Karte $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ liefern die Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ aus Proposition 4.4.10 eine lokale Trivialisierung von TM über U . Bestimmen Sie für die Standardatlanten von S^n und $\mathbb{R}P^n$, s. Beispiel 2.4.1 und 2.4.6, die Übergangsfunktionen für diese Kartentrivialisierungen der jeweiligen Tangentialbündel.

BEMERKUNG 4.5.9. Eine glatte Abbildung zwischen glatten Vektorbündeln ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2, \end{array}$$

so dass für jeden Punkt $p \in M$, die Einschränkung

$$\bar{f}|_{\pi_1^{-1}(p)}: (E_1)_p = \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(f(p)) = (E_2)_{f(p)}$$

eine lineare Abbildung ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ die Kategorie der glatten Vektorbündel auf M mit glatten Bündelabbildungen.

BEISPIEL 4.5.10.

- Für eine glatte Mannigfaltigkeit M heißt $\mathrm{pr}_1: M \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ das triviale Vektorbündel vom Rang r .
- Für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ und ein Vektorbündel $\pi: E \rightarrow N$ haben wir ein induziertes Vektorbündel auf M , dessen Totalraum durch

$$f^*E := \{(p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v)\}$$

gegeben ist. Die Projektionsabbildung ist $\bar{\pi}: f^*E \subseteq M \times E \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} M$. Die Vektorraumstruktur auf der Faser $\bar{\pi}^{-1}(p)$ ist gegeben durch die natürliche Identifikation $\bar{\pi}^{-1}(p) \cong \pi^{-1}(f(p))$. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq N$ mit lokaler Trivialisierung $\tau_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ haben wir eine lokale Trivialisierung auf $f^{-1}(U)$ durch

$$\bar{\pi}^{-1}(f^{-1}(U)) \rightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^r: x \mapsto (\bar{\pi}(x), \tau_U(\bar{f}(x)))$$

wobei $\bar{f}: f^*E \subseteq M \times E \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} E$ ist.

- Für zwei Vektorbündel $E_1 \rightarrow M_1$ und $E_2 \rightarrow M_2$ ist $E_1 \times E_2 \rightarrow M_1 \times M_2$ ein Vektorbündel, das Produktbündel. Für zwei Vektorbündel E_1, E_2 auf M ist die Einschränkung des Produktbündels $E_1 \times E_2 \rightarrow M \times M$ entlang der Diagonalen $\Delta: M \rightarrow M \times M$ ein Vektorbündel, die sogenannte Whitney-Summe.

□

ÜBUNGSAUFGABE 4.5.11. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{E}(k, n) := \{(V, v) \in \mathrm{Gr}(k, n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in V\}$$

mit der Projektionsabbildung $\mathcal{E}(k, n) \rightarrow \mathrm{Gr}(k, n): (V, v) \mapsto V$ ein Vektorbündel über $\mathrm{Gr}(k, n)$ ist.

BEISPIEL 4.5.12. Sei $F: \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$ ein Funktor von der Kategorie der $\mathbb{R}$ -Vektorräume in sich. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M induziert F einen Funktor $F: \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}(M) \rightarrow \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ auf der Kategorie der Vektorbündel auf M . Dieser Funktor bildet ein Vektorbündel $\pi: E \rightarrow M$ auf das folgende Bündel ab: Der Totalraum ist, wie beim Tangentialbündel, $F(E) := \bigcup_{p \in M} F(E_p)$ und die Projektion π_F gegeben durch $v \in F(E_p) \mapsto p$. Für eine lokale Trivialisierung $\tau: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ ist eine lokale Trivialisierung $\tau_F: \pi_F^{-1}(U) \rightarrow U \times F(\mathbb{R}^r)$ von $F(E)$ dadurch gegeben, dass für die Einschränkung

$$\tau_F|_p: F(E_p) = \pi_F^{-1}(p) \rightarrow F(\mathbb{R}^r)$$

gilt $\tau_F|_p = F(\tau|_p)$.

Es gibt viele relevante Beispiele für diese Konstruktion bzw. die Erweiterung der obigen Konstruktion auf Funktoren mit mehreren Argumenten.

- Für den Dualraum-Funktor $V^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ erhalten wir das duale Vektorbündel $E^\vee \rightarrow M$. Im Spezialfall $E = TM$ heißt $TM^\vee \rightarrow M$ das Kotangentialbündel.
- Für zwei Vektorbündel $E_1, E_2 \rightarrow M$ gibt es das Hom-Bündel

$$\text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow M,$$

dessen Faser über dem Punkt p der Vektorraum der linearen Abbildungen $(E_1)_p \rightarrow (E_2)_p$ ist.

- Für zwei Vektorbündel $E_1, E_2 \rightarrow M$ gibt es das Tensorbündel $E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$, dessen Faser über dem Punkt p das Tensorprodukt $(E_1)_p \otimes (E_2)_p$ ist.

□

4.6. Vektorfelder und Integralkurven

DEFINITION 4.6.1. Sei $\pi: E \rightarrow M$ ein glattes Vektorbündel, und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge. Ein glatter Schnitt von π über U ist eine glatte Abbildung $\sigma: U \rightarrow E$ mit $\pi \circ \sigma(p) = p$ für alle $p \in U$. Für eine offene Menge $U \subseteq M$ bezeichnen wir mit $\Gamma(U, E)$ die Menge der glatten Schnitte $U \rightarrow E$ von π über U .

Ein glattes Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein glatter Schnitt des Tangentialbündels $\pi: TM \rightarrow M$.

BEISPIEL 4.6.2. Wir betrachten den speziellen Fall eines Vektorfelds X auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld X ordnet jedem Punkt $p \in U$ einen Tangentialvektor $X_p \in T_p \mathbb{R}^n$ zu. Mit Hilfe der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ des Tangentialraums können wir das Vektorfeld als Linearkombination

$$X_p = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad p \in U, \quad a^i(p) \in \mathbb{R}$$

schreiben. Das Vektorfeld X ist glatt auf U , wenn die Funktionen a^i glatt auf U sind.

Allgemeiner können wir für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ einer glatten Mannigfaltigkeit M eine lokale Trivialisierung des Tangentialbündels $TM \rightarrow M$ konstruieren:

$$\tau: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n: \left(v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M \right) \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^n v^i e_i \right).$$

Ein Vektorfeld $X: M \rightarrow TM$ kann dann in einer solchen lokalen Trivialisierung durch Komponentenfunktionen beschrieben werden: die Komposition

$$U \xrightarrow{X|_U} TU \xrightarrow{\tau} U \times \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch $(\text{id}_U, a^1, \dots, a^n)$, und wir können auf U schreiben $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dann gilt wieder, dass das Vektorfeld genau dann glatt ist, wenn die Komponentenfunktionen a^i glatt sind.

In der Literatur wird diese Wahl von lokalen Koordinaten auf dem Vektorbündel durch eine Trivialisierung $\tau: TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ auch Rahmen genannt. $\square$

BEISPIEL 4.6.3. Wie in Bemerkung 4.4.12 können wir das Differential einer Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ als Schnitt $df: M \rightarrow TM^\vee$ auffassen. Jedem Punkt $p \in M$ wird dabei die Linearform

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

zugeordnet. Um nachzurechnen, dass es sich hier um einen glatten Schnitt handelt, können wir für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ als Rahmen für $TM^\vee$ die Schnitte $dx^1, \dots, dx^n$ verwenden. In diesem Rahmen sind die Koordinaten des Schnittes df genau die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, die glatt sind, weil f glatt ist. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.4. Wir bezeichnen mit $x^1, y^1, \dots, x^n, y^n$ die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^{2n}$. Zeigen Sie, dass durch

$$X = \sum_{i=1}^n \left(-y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

ein nirgends verschwindendes glattes Vektorfeld auf der Einheitssphäre

$$S^{2n-1} = \left\{ (x^1, y^1, \dots, x^n, y^n) \mid \sum_{i=1}^n ((x^i)^2 + (y^i)^2) = 1 \right\}$$

induziert wird.

BEMERKUNG 4.6.5. Der Satz vom Igel sagt, dass auf gerade-dimensionalen Sphären jedes Vektorfeld mindestens eine Nullstelle hat, d.h. einen Punkt, an dem der zugeordnete Vektor der Nullvektor ist. Dieser Satz kann z.B. mit den Methoden der Topologie-Vorlesung bewiesen werden. Für glatte Vektorfelder werden wir eventuell noch einen Beweis sehen.

DEFINITION 4.6.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Menge. Die Menge der glatten Vektorfelder auf U wird mit $\mathfrak{X}(U)$ bezeichnet. Durch

$$C^\infty(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U): \left(f, X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \mapsto \sum (f a^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

wird $\mathfrak{X}(U)$ zu einem Modul über dem Ring $C^\infty(U)$.

DEFINITION 4.6.7. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(U)$ und $X \in \mathfrak{X}(U)$. Die Ableitung von f in Richtung des Vektorfeldes $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist definiert durch

$$(Xf)(p) = X_p f = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U).$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.8. Gegeben seien das Vektorfeld $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ und die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie Xf (die Funktion, die sich durch Anwendung der zu X gehörenden Derivation auf f ergibt).

DEFINITION 4.6.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Menge. Für zwei glatte Vektorfelder X und Y auf U definieren wir die Lie-Klammer

$$[X, Y]_p f := (X_p Y - Y_p X) f.$$

Das Vektorfeld $[X, Y]$ ist wieder glatt, und ist genau der Kommutator der Vektorfelder in $\text{Der}(C^\infty(U))$, s. Beispiel 4.3.3. Insbesondere ist $\mathfrak{X}(U)$ eine Lie-Algebra.

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.10. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ glatte Vektorfelder auf M und $f, g \in C^\infty(M)$ glatte Funktionen. Zeigen Sie

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.11. Berechnen Sie die Lie-Klammer der folgenden Vektorfelder in $\mathbb{R}^2$:

$$(1) \quad X = \frac{\partial}{\partial x} \text{ und } Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(2) \quad X = \frac{\partial}{\partial x} \text{ und } Y = (1 + x^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.12. Berechnen Sie die Lie-Klammer der folgenden Vektorfelder in $\mathbb{R}^3$:

$$(1) \quad X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} - xz \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \text{ und } Y = x \frac{\partial}{\partial x} + zy \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$(2) \quad X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \text{ und } Y = (z - y) \frac{\partial}{\partial y} - y^2 \frac{\partial}{\partial z}.$$

PROPOSITION 4.6.13. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X \in \mathfrak{X}(U)$. Die Abbildung

$$C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U): f \mapsto Xf$$

ist eine Derivation. Insbesondere haben wir eine Abbildung

$$\mathfrak{X}(U) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(U)): X \mapsto (f \mapsto Xf).$$

BEWEIS. Es ist nur die Leibniz-Regel $X(fg) = fXg + gXf$ zu beweisen. Diese folgt daraus, dass für einen Punkt $p \in U$ der Tangentialvektor X_p , aufgefasst als Derivation, die Leibniz-Regel $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$ erfüllt. $\square$

LEMMA 4.6.14. Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge und $\Delta \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ eine Derivation.

(1) Sei $f \in C^\infty(U)$ eine glatte Funktion und $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge mit $f|_V \equiv 0$. Dann ist $\Delta(f)|_V \equiv 0$.

(2) Für $f \in C^\infty(U)$ und $x \in U$ hängt $\Delta(f)(x)$ nur von Δ und dem Keim $[f] \in C_x^\infty(U)$ ab.

BEWEIS. (1) Sei $x \in V$. Nach Proposition 3.4.3 existiert eine glatte Funktion $\phi \in C^\infty(U)$ so dass $\phi(x) = 1$ und $\phi|_{(U \setminus V)} \equiv 0$. Da $f|_V = 0$ ist $(1 - \phi) \cdot f = f$. Es folgt

$$\Delta(f)(x) = \Delta((1 - \phi) \cdot f)(x) = \Delta(1 - \phi)(x) \cdot f(x) + (1 - \phi)(x) \cdot \Delta(f)(x).$$

Da $f(x) = 1 - \phi(x) = 0$ ist $\Delta(f)(x) = 0$ wie behauptet.

(2) Seien $f, g \in C^\infty(U)$ zwei Funktionen mit demselben Keim $[f] = [g] \in C_x^\infty(U)$. Nach Definition existiert eine Umgebung W von x mit $f|_W = g|_W$. Nach (1) ist $(\Delta(f) - \Delta(g))|_W = \Delta(f - g)|_W = 0$. Also ist $\Delta(f)(x) = \Delta(g)(x)$. $\square$

Durch glatte Ausdehnung von Funktionen können wir eine Derivation in $C^\infty(U)$ auf den Halm $C_p^\infty(U)$ an einem Punkt $p \in U$ einschränken. Für einen Funktionenkeim $(V, f) \in C_p^\infty(U)$ können wir nach Proposition 3.4.4 eine Funktion $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$ und eine offene Teilmenge $W \subseteq V$ finden, so dass $\tilde{f}|_W = f|_W$.

DEFINITION 4.6.15. Für eine Derivation $\Delta \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ und einen Punkt $p \in U$ definieren wir eine Derivation $\Delta_p \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(U), \mathbb{R})$ durch

$$\Delta_p((U, f)) = \Delta(\tilde{f})(p).$$

SATZ 4.6.16. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und U eine offene Teilmenge. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{X}(U) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(U)): X \mapsto (f \mapsto Xf)$$

ein Isomorphismus von Lie-Algebren und $C^\infty(U)$ -Moduln.

BEWEIS. Nach Definition bildet die Abbildung die Lie-Klammer auf den Kommutator in $\text{Der}(C^\infty(U))$ ab. Außerdem ist die Abbildung kompatibel mit der Multiplikation mit glatten Funktionen: für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$ und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(U)$ wird fX auf $g \mapsto fXg$ abgebildet, was genau der Multiplikation der glatten Funktion f und der Derivation $g \mapsto Xg$ entspricht. Damit reicht es, die Bijektivität zu zeigen.

Für die Injektivität bemerken wir, dass für einen Punkt $p \in U$ die Auswertung am Punkt p ein kommutatives Diagramm induziert

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(U) & \longrightarrow & \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_p(U) & \longrightarrow & \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(U), \mathbb{R}), \end{array}$$

d.h. am Punkt p ist die Abbildung $\mathfrak{X}(U) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ einfach die Abbildung, die den Tangentialvektor X_p auf die zugehörige Derivation abbildet. Wenn ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$ auf die Derivation 0 abgebildet wird, dann muss bereits das Vektorfeld an allen Punkten 0 sein.

Für die Surjektivität benutzen wir wieder die Einschränkung der Derivation aus Definition 4.6.15. Für $\Delta \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ definieren wir ein Vektorfeld $X_\Delta \in \mathfrak{X}(U)$, indem wir dem Punkt $p \in U$ den Tangentialvektor $\Delta_p \in \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(U), \mathbb{R})$ zuordnen. Ohne Beschränkung können wir annehmen, dass $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte ist. Dann sind die Koordinatenfunktionen des Vektorfelds X_Δ durch die Ableitungen $\Delta(x^i)$ gegeben, und das bedeutet gerade, dass die zu X_Δ gehörende Derivation genau Δ ist. (Dies ist die globalere Variante von Satz 4.3.6 bzw. Korollar 4.4.8.) $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.17. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Sei $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von p und $X \in \mathfrak{X}(U)$ ein glattes Vektorfeld. Zeigen Sie, dass es ein glattes Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ und eine Umgebung $V \subseteq U$ von p gibt, so dass $\tilde{X}|_V = X|_V$.

DEFINITION 4.6.18. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Eine Integralkurve für X durch den Punkt p ist eine glatte Kurve $\gamma: (a, b) \rightarrow M$ so dass $a < 0 < b$, $\gamma(0) = p$ und für alle $t \in (a, b)$ gilt $d\gamma|_t(1) = X_{\gamma(t)}$.

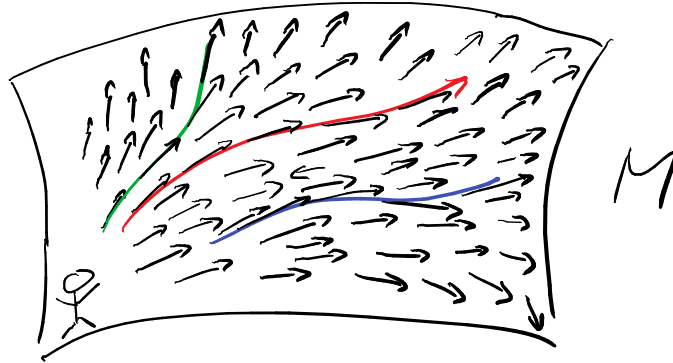


ABBILDUNG 18. Verschiedene Integralkurven für ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit.

Integralkurven werden durch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben: in einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ haben wir

$$X_{\gamma(t)} = \sum a^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}, \quad \text{und} \quad d\gamma|_t(1) = \sum \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Eine Integralkurve durch den Punkt $p = (p^1, \dots, p^n)$ ist dann genau eine Lösung des Systems

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = a^i(\gamma(t)), \gamma^i(0) = p^i$$

Der folgende Satz aus der Analysis II/III besagt, dass zumindest in Karten Integralkurven für Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten existieren und eindeutig sind.

SATZ 4.6.19. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $p_0 \in U$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion.*

(1) *Die Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{dt} = f(y), y(0) = p_0$$

hat eine eindeutige glatte Lösung $y: (a, b) \rightarrow V$.

(2) *Für jeden Punkt $p_0 \in V$ existiert eine offene Umgebung $W \subseteq V$, ein $\epsilon > 0$ und eine glatte Funktion $y: (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow V$ so dass für alle $(t, q) \in (-\epsilon, \epsilon) \times W$ gilt*

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, q) = f(y(t, q)), y(0, q) = q.$$

Durch die Eindeutigkeit können dann Integralkurven in verschiedenen überlappenden Karten zusammengeklebt werden. Der zweite Teil der Aussage bedeutet, dass die Lösungen des gewöhnlichen DGL-Systems glatt von den Anfangsbedingungen abhängen. Insbesondere können Integralkurven durch alle Punkte einer geeigneten Umgebung W von p gefunden werden. Dies führt zum Begriff des lokalen Flusses:

DEFINITION 4.6.20. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge und X ein Vektorfeld auf U . Ein lokaler Fluss für X um einen Punkt $p \in U$ ist eine glatte Funktion $F: (-\epsilon, \epsilon) \times W \rightarrow U$, wobei $W \subseteq U$ eine offene Umgebung von p ist, so dass für alle $q \in W$ die Abbildung $F(t, q): (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ eine Integralkurve für X ist. Insbesondere gilt*

(1) $F(0, q) = q$ für alle $q \in W$,

(2) $F(t, F(s, q)) = F(t + s, q)$, wenn beide Seiten definiert sind.

BEMERKUNG 4.6.21. • Hier muss $F(t, q)$ interpretiert werden als der Punkt, an dem die Integralkurve durch den Punkt q zum Zeitpunkt t angekommen ist. Oft wird auch die Notation $F_t(q) = F(t, q)$ verwendet. Die Abbildungen $F_t(q)$ heißen Flusslinien.

- Ein lokaler Fluss, der auf $\mathbb{R} \times M$ definiert ist, heißt globaler Fluss. Die Sätze aus der Analysis II/III sagen, dass lokale Flüsse für Vektorfelder immer existieren. Globale Flüsse existieren im Allgemeinen nicht. Ein Vektorfeld, für das ein globaler Fluss existiert, heißt vollständig.
- Sei M eine Mannigfaltigkeit, X ein Vektorfeld auf M und $F: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein globaler Fluss. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$F_t \circ F_{-t} = F_{-t} \circ F_t = F_0 = \text{id}_M.$$

Insbesondere sind alle $F_t: M \rightarrow M$ Diffeomorphismen.

BEMERKUNG 4.6.22. Mit dem Begriff des lokalen Flusses können wir auch die Lie-Klammer besser veranschaulichen. Für zwei Vektorfelder X und Y auf M haben wir lokal zwei zugehörige Flüsse. Wir können erst dem Fluss für X für eine Zeit t folgen, und dann dem Fluss für Y für eine Zeit s , oder umgekehrt. Wenn beide Varianten das selbe Ergebnis liefern, sagen wir, dass die Flüsse kommutieren. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall (s. Abbildung 19).

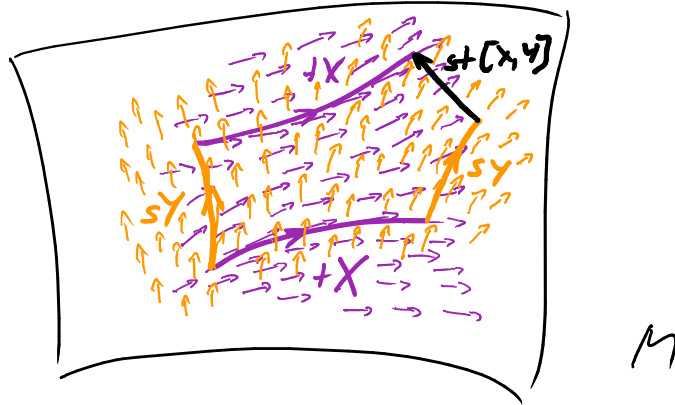


ABBILDUNG 19. Veranschaulichung der Lie-Klammer

Die infinitesimale Variante dieses Kommutators (Grenzübergang $s, t \rightarrow 0$) ist genau die Lie-Klammer der beiden Vektorfelder. Allgemeiner sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$ haben paarweise triviale Lie-Klammer.
- (2) Die zu $X_1, \dots, X_n$ zugehörigen Flüsse kommutieren paarweise.
- (3) Es gibt lokale Koordinaten $x^1, \dots, x^n$, so dass $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist.

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.23. Bestimmen Sie die maximale Integralkurve $\gamma(t)$ mit Anfangspunkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ des folgenden Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^2$:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.24. Bestimmen Sie die Integralkurven des folgenden Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^n$ mit Standardkoordinaten $(r^1, \dots, r^n)$ für beliebige Anfangswerte:

$$X = \sum_{i=1}^n r^i \frac{\partial}{\partial r^i}$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.25. Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jedes glatte Vektorfeld auf M vollständig ist. Geben Sie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Beispiel eines Vektorfeldes an, das nicht vollständig ist.

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.26. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, und seien $p, q \in M$ zwei Punkte. Dann existiert ein Diffeomorphismus $f: M \rightarrow M$ mit $f(p) = q$.

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.27. Zeigen Sie, dass ein n -dimensionales glattes reelles Vektorbündel genau dann trivial ist, wenn es n glatte Vektorfelder gibt, die an jedem Punkt linear unabhängig sind.

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.28. Sei G eine Lie-Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Für $g \in G$ können wir $T_g G$ und $T_e G$ durch Linksmultiplikation mit g identifizieren. Für $v \in T_e G$ erhalten wir dadurch ein Vektorfeld X_v . Solche Vektorfelder heißen links-invariant. Zeigen Sie, dass links-invariante Vektorfelder auf Lie-Gruppen vollständig sind.

4.7. Tangentialvektoren für Mannigfaltigkeiten mit Rand

DEFINITION 4.7.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, und $p \in \partial M$ ein Randpunkt.

Seien $U, V \subseteq M$ offene Mengen mit $p \in U \cap V$. Zwei glatte Abbildungen $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ heißen äquivalent, wenn es eine offene Umgebung $W \subseteq U \cap V$ von p gibt, so dass $f|_W = g|_W$. Wir bezeichnen mit $C_p^\infty(M)$ die $\mathbb{R}$ -Algebra der Funktionenkeime am Punkt p , analog zu Definition 4.2.1.

Der Tangentialraum $T_p M$ ist durch $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ definiert.

- BEMERKUNG 4.7.2. (1) Auch eine Definition von Tangentialvektoren über Kurvenkeime ist möglich. Dafür betrachten wir für einen Randpunkt $x \in \partial M$ Kurven $\gamma: [0, b) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$. Wir können dann eine Äquivalenzrelation wie in Definition 4.2.4 betrachten. Allerdings haben dann die Tangentialvektoren an den Punkt $p \in \partial M$, die nach "außen" (bezüglich einer Karte) zeigen, keine Repräsentanten durch Kurven in M .
- (2) Mit der obigen Definition von Tangentialraum können wir dann das Differential wie f_* in Definition 4.4.1 für Mannigfaltigkeiten ohne Rand definieren. Die Kettenregel gilt unverändert.

Für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M mit Rand müssen wir uns noch überlegen, dass der Tangentialraum an Randpunkten $x \in \partial M$ als Vektorraum auch n -dimensional ist. Nach der Definition 3.5.1 und 4.7.1 sind die glatten Funktionenkeime in $C_x^\infty(M)$ in einer Umgebung von x definiert. Insbesondere, ist also für einen Punkt $x \in \partial \mathbb{H}^n$ die Einschränkungabbildung $\rho: C_x^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_x^\infty(\mathbb{H}^n)$ surjektiv.

LEMMA 4.7.3. Sei $x \in \partial \mathbb{H}^n$. Die Abbildung

$$\rho^*: \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_x^\infty(\mathbb{H}^n), \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{R}}(C_x^\infty(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}): D \mapsto (g \in C_x^\infty(\mathbb{R}^n) \mapsto D(\rho(g)))$$

ist ein Vektorraumisomorphismus.

BEWEIS. Die Injektivität von ρ^* folgt aus der Surjektivität der Einschränkungabbildung $\rho: C_x^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_x^\infty(\mathbb{H}^n)$.

Für die Surjektivität können wir eine Derivation in $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_x^\infty(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ als Richtungsableitung für einen Tangentialvektor in $T_x \mathbb{R}^n$, repräsentiert durch die Kurve $\gamma(t) = x + tv$ mit $v \in \mathbb{R}^n$, auffassen. Der Vektor v zeigt entweder in Richtung $\mathbb{H}^n$ (d.h. $v^n \geq 0$) oder nach "außen" (d.h. $v^n < 0$). In letzterem Fall zeigt $-v$ nach innen. Im ersten Fall ist

$$D(g) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(\gamma(t)) - g(x)}{t}$$

eine Derivation in $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_x^\infty(\mathbb{H}^n), \mathbb{R})$ mit $\rho^*(D) = v$. Im zweiten Fall nehmen wir stattdessen $\lim_{t \rightarrow 0^-}$ und erhalten die gewünschte Derivation mit $\rho^*(D) = v$. $\square$

KOROLLAR 4.7.4. Für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und $x \in \partial M$ ist $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

ÜBUNGSAUFGABE 4.7.5. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Wir definieren das Tangentialbündel genau wie in Definition 4.5.1. Zeigen Sie, dass TM eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ist.

DEFINITION 4.7.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $p \in \partial M$ ein Randpunkt. Wir sagen, dass ein Tangentialvektor $v \in T_p M$ nach innen zeigt, wenn $v \notin T_p(\partial M)$ und eine glatte Kurve $\gamma: [0, \epsilon) \rightarrow M$ existiert, für die gilt $\gamma(0) = p$, $\gamma((0, \epsilon)) \subset M$ und $\gamma'(0) = v$. Andernfalls sagen wir, dass der Vektor nach außen zeigt.

DEFINITION 4.7.7. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Ein glattes Vektorfeld X entlang ∂M ist eine Zuordnung $p \in \partial M \mapsto X_p \in T_p M$, das in einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ als

$$X_p = \sum_i a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

für $p \in U \cap \partial M$ und $a^i \in C^\infty(\partial M)$ geschrieben werden kann.

BEMERKUNG 4.7.8. In der Konvention von Definition 2.5.1 zeigt ein Vektorfeld X entlang ∂M genau dann am Punkt $p \in \partial M$ nach außen, wenn $a^n(p) < 0$ ist.

PROPOSITION 4.7.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann existiert ein glattes nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M .

BEWEIS. Für eine Karte $(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ von M um den Randpunkt $p \in \partial M$ zeigt das Vektorfeld $X_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$ nach außen. Wir wählen eine Überdeckung von ∂M aus solchen Überdeckungen und eine passende glatte Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_\alpha$. Dann ist $X = \sum \rho_\alpha X_\alpha$ ein glattes nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M . $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 4.7.10. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Zeigen Sie, dass es einen Kragen für ∂M gibt.

KAPITEL 5

Kritische Punkte und Untermannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel geht es nun genauer um die Beziehung zwischen Mannigfaltigkeiten bzw. glatten Abbildungen und ihren linearen Annäherungen durch Tangentialbündel bzw. Differential. Zentrales Werkzeug ist der Satz von der Umkehrfunktion, der es erlaubt, aus Aussagen über das Differential Aussagen über die glatte Abbildung (z.B. einfache Form in geeigneten Koordinaten) zu folgern.

5.1. Definitionen

DEFINITION 5.1.1. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann heißt f Immersion bzw. Submersion am Punkt $p \in M$, wenn $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ injektiv bzw. surjektiv ist.

DEFINITION 5.1.2. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Der Rang von f am Punkt $p \in M$ ist der Rang der linearen Abbildung $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$.

BEMERKUNG 5.1.3. Der Rang der Abbildung $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist die Dimension des Bildes von df . Für gewählte Karten $(U, x^1, \dots, x^m)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ ist der Rang der Abbildung df gleich dem Rang der Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j}$.

DEFINITION 5.1.4. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Ein Punkt $p \in M$ heißt regulärer Punkt, wenn das Differential $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ surjektiv ist; andernfalls heißt p kritischer Punkt.

Ein Punkt $q \in N$ heißt kritischer Wert, wenn es einen kritischen Punkt $p \in M$ mit $f(p) = q$ gibt; andernfalls heißt q regulärer Wert.

PROPOSITION 5.1.5. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Ein Punkt $p \in M$ ist genau dann ein kritischer Punkt, wenn es eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ um p gibt, so dass für alle $i = 1, \dots, n$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0.$$

BEWEIS. Es gibt nur zwei Möglichkeiten für $df: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Entweder ist df die Null-Abbildung oder df ist surjektiv (und damit ist p ein regulärer Punkt). Die darstellende Matrix für das Differential ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p)\right)$$

Also ist p ein kritischer Punkt, wenn alle partiellen Ableitungen von f verschwinden. $\square$

BEMERKUNG 5.1.6. Der Begriff des kritischen Punktes umfasst also alles, was zu Extremwertaufgaben in der Analysis-Vorlesung gesagt wird.

PROPOSITION 5.1.7. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann ist die Menge der kritischen Punkte abgeschlossen in M . Wenn M kompakt ist, ist die Menge der regulären Werte offen in N .

BEWEIS. Der Fall $\dim M < \dim N$ ist klar: alle Punkte in M sind kritische Punkte. Wir können also annehmen, dass $\dim M \geq \dim N$ ist. Wir zeigen, dass für jede Karte $(U, x^1, \dots, x^m)$ die Menge der kritischen Punkte in U abgeschlossen ist. Für eine Karte $(V, y^1, \dots, y^n)$ mit $f(U) \subseteq V$ ist ein Punkt $p \in U$ kritisch genau dann, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \right)_{i,j}$$

nicht maximalen Rang hat. Die Menge der kritischen Punkte in U wird also definiert durch die Bedingung, dass die endliche Menge der $(n \times n)$ -Minoren (Determinanten von quadratischen Teilmatrizen) identisch null ist. Also ist die Menge der kritischen Punkte in U abgeschlossen.

Wenn M kompakt ist, ist die Abbildung f abgeschlossen. Damit ist dann die Menge der kritischen Werte abgeschlossen, also ist die Menge der regulären Werte offen. $\square$

Zusammen mit dem Satz von der Umkehrfunktion liefern reguläre Werte bzw. der Rang einer Abbildung gute Kriterien, wann für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ das Urbild eines Punktes $q \in N$ eine Mannigfaltigkeit ist; dies ist eine weitere reiche Quelle für natürlich vorkommende Mannigfaltigkeiten.

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.8. Zeigen Sie, dass die Abbildung $S^i \rightarrow S^i: (y \in \mathbb{R}^i, t \in \mathbb{R}) \mapsto (2ty, 2t^2 - 1)$ den regulären Wert $(0, \dots, 0, 1)$ hat.

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.9. Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (e^{\lambda t} \cos t, e^{\lambda t} \sin t)$. Sei $X = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$, und

$$f: X \rightarrow S^2: (x, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}(x, 0, z).$$

Zeigen Sie, dass f eine Immersion ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.10. Sei $X = \{(\sin z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ und $Y = \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f(x, y, z) = (x, y)$ keine Submersion ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.11. Wir realisieren $S^3 = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\}$ und $S^2 = \mathbb{CP}^1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $(u, v) \mapsto [u : v]$ eine Submersion ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.12. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass jede glatte Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens zwei kritische Punkte hat.

5.2. Wiederholung Analysis: Umkehrfunktion und konstanter Rang

Im folgenden Abschnitt diskutieren wir kurz die inversen und impliziten Funktionensätze aus der Analysis II.

SATZ 5.2.1 (Satz von der Umkehrabbildung für $\mathbb{R}^n$). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Die Abbildung f ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus am Punkt p , wenn für die Jacobi-Determinante gilt $\det(\partial f^i / \partial r^j)(p) \neq 0$.

Dieser Satz wird in der Analysis II bewiesen. Die Beweisidee ist folgende: Wir können annehmen, dass $f(p) = 0 = p$ und $J_f(0) = I_n$. Wir definieren die Abbildung $\phi(x) = x - f(x)$. Für $y \in \mathbb{R}^n$ nah genug an 0 ist $T_y(z) = y + \phi(z)$ eine Kontraktion, die nach dem Fixpunktsatz von Banach einen eindeutigen Fixpunkt x hat, für den dann $f(x) = y$ gilt – wir erhalten also eine Umkehrabbildung f^{-1} . Mit der Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix können wir dann zeigen, dass die Umkehrabbildung f^{-1} auch beliebig oft differenzierbar ist.

SATZ 5.2.2 (Satz von der Umkehrabbildung für Mannigfaltigkeiten).

Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Für einen Punkt $p \in M$ sei $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte von M mit $p \in U$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ eine Karte von N mit $f(U) \subseteq V$. Dann ist f genau dann ein lokaler Diffeomorphismus am Punkt p , wenn $\det(\partial y^i \circ f / \partial x^j)(p) \neq 0$.

BEWEIS. Nach Definition

$$\frac{\partial y^i \circ f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial(r^i \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))$$

ist die Jacobi-Matrix für f in den Karten $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ gleich der Jacobi-Matrix für die Abbildung $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Theorem 5.2.1 besagt, dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Da die Kartenabbildungen ϕ und ψ Diffeomorphismen sind, ist das gleichbedeutend mit der Aussage, dass f ein lokaler Diffeomorphismus ist. $\square$

BEMERKUNG 5.2.3. Der Satz von der Umkehrfunktion 5.2.2 lässt sich dann umformulieren: eine glatte Abbildung zwischen n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus am Punkt p , wenn das Differential ein Isomorphismus ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.4. Bestimmen Sie durch Berechnung der Jacobi-Matrix, für welche Punkte in $\mathbb{R}^3$ die Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y, z) \mapsto (x, x^2 + y^2 + z^2 - 1, z)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.5 (Hyperboloide für indefinite Formen). Seien $0 < p < n$ natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl $r > 0$

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^n x_i^2 = r \right\}$$

eine Mannigfaltigkeit ist. Was passiert für $r = 0$?

Hinweis: Betrachten Sie die Jacobi-Matrix für geeignete Projektionen auf Koordinatenebenen.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.6. Sei M eine Mannigfaltigkeit von Dimension m , und sei $(U, x^1, \dots, x^m)$ eine Karte. Glatte Abbildungen $f^1, \dots, f^m$ sind genau dann Koordinatenfunktionen einer Karte, wenn für die Jacobi-Determinante gilt

$$\det(\partial f^i / \partial x^j)|_p \neq 0.$$

BEMERKUNG 5.2.7. Insbesondere kann der Satz von der Umkehrabbildung gut benutzt werden, um Karten für Mannigfaltigkeiten zu produzieren. Häufig wird der Satz auch benutzt, um zu zeigen, dass Koordinaten existieren, in denen Vektoren oder Unterräume des Tangentialraums eine einfache Form haben, zum Beispiel im Immersionssatz 5.3.14 und im Submersionssatz 5.3.15, oder im folgenden Satz vom konstanten Rang.

SATZ 5.2.8 (Satz vom konstanten Rang). Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in U$ ein Punkt, so dass f in einer Umgebung von p konstanten Rang k hat. Dann existiert eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von p und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von $f(p)$, und Diffeomorphismen $\phi: W \rightarrow \tilde{W}$, $\psi: V \rightarrow \tilde{V}$ mit $\phi(p) = 0$ und $\psi(f(p)) = 0$, so dass

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0).$$

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $p = 0$ und $f(p) = 0$ ist. Außerdem können wir durch Vertauschen von Koordinatenfunktionen annehmen, dass der linke obere $k \times k$ -Block der Jacobi-Matrix

$$J(f) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

am Punkt $p = 0$ eine von Null verschiedene Determinante hat. Wir definieren

$$\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m: x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f^1(x), \dots, f^k(x), x^{k+1}, \dots, x^n).$$

Es gilt $\phi(0) = 0$, die Jacobi-Matrix von ϕ hat die Form

$$J(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f^1, \dots, f^k)}{\partial(x^1, \dots, x^k)} & * \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}$$

und ist damit am Punkt $p = 0$ invertierbar. Nach dem inversen Funktionen-Satz 5.2.1 existiert dann eine Umgebung W der 0, auf der ϕ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge $\widetilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Bezeichnen wir mit $w = (w^1, \dots, w^n)$ die Koordinaten von $\widetilde{W}$, dann existieren Abbildungen $\xi^{k+1}, \dots, \xi^m$, so dass gilt

$$f \circ \phi^{-1}(w) = (w^1, \dots, w^k, \xi^{k+1}(w), \dots, \xi^m(w)).$$

Die Abbildungen ξ^j verschwinden bei 0, da $f(0) = 0$ und $\phi^{-1}(0) = 0$. Für die Jacobi-Matrix der Zusammensetzung haben wir

$$J(f) \circ J(\phi^{-1}) = J(f \circ \phi^{-1}) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & \frac{\partial(\xi^{k+1}, \dots, \xi^m)}{\partial(w^{k+1}, \dots, w^m)} \end{pmatrix}.$$

Der Rang von $J(f)$ ist k in einer Umgebung der 0, und $J(\phi^{-1})$ ist invertierbar auf $\widetilde{W}$. Nach Verkleinerung von W können wir also annehmen, dass die Matrix $J(f \circ \phi^{-1})$ an jedem Punkt von W Rang k hat. Der rechte untere Block der Matrix $J(f \circ \phi^{-1})$ kann also nur Nullen enthalten, sodass die Abbildungen ξ^j lokal nur von den Koordinaten $w^1, \dots, w^k$ abhängen. Wir verkleinern W weiter so, dass die ξ^j auf ganz W nur von den Koordinaten $w^1, \dots, w^k$ abhängen. Nun können wir auf einer Umgebung $V \in \mathbb{R}^m$ von 0 die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: V &\rightarrow \mathbb{R}^m: \\ y = (y^1, \dots, y^m) &\mapsto (y^1, \dots, y^k, y^{k+1} - \xi^{k+1}(y^1, \dots, y^k), \dots, y^m - \xi^m(y^1, \dots, y^k)) \end{aligned}$$

definieren. Am Punkt 0 ist

$$J(\psi) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_{m-k} \end{pmatrix}$$

offensichtlich invertierbar. Aus Satz 5.2.1 folgt, dass wir V so verkleinern können, dass ψ ein Diffeomorphismus wird. Nun verkleinern wir noch einmal W so, dass $f(W) \subseteq V$. Nach Konstruktion folgt jetzt auf $\widetilde{W}$ die Behauptung

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(w^1, \dots, w^n) = (w^1, \dots, w^k, 0, \dots, 0). \quad \square$$

SATZ 5.2.9 (Satz von der impliziten Funktion). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Die Standardkoordinaten auf U werden als $(x, y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m)$ geschrieben. Wenn für einen Punkt $(a, b) \in U$ mit $f(a, b) = 0$ gilt $\det(\partial f^i / \partial y^j)|_{(a, b)} \neq 0$, dann existiert eine offene Umgebung $A \times B$ von (a, b) und eine eindeutige glatte Abbildung $h: A \rightarrow B$, sodass für $(x, y) \in A \times B$ dann $f(x, y) = 0$ genau dann, wenn $y = h(x)$.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.10. Zeigen Sie, dass Satz 5.2.9 aus Satz 5.2.8 folgt.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.11. Zeigen Sie, dass der Satz von der Umkehrabbildung aus dem Satz von der impliziten Funktion folgt.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.12. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2y_1^2 + y_2^2 &= -4 \\(x_1 + x_3)^2 + y_1 - y_2 &= -3\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dieses System in einer Umgebung des Punktes $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = (1, \frac{1}{2}, -1, -2, 1)$ nach (y_1, y_2) aufgelöst werden kann. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der impliziten Funktion $y = h(x)$ im Punkt $(1, \frac{1}{2}, -1)$.

5.3. Untermannigfaltigkeiten und Abbildungen von konstantem Rang

DEFINITION 5.3.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n . Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt reguläre Untermannigfaltigkeit von Dimension k , wenn für jeden Punkt $p \in S$ eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ von M um p existiert, so dass

$$U \cap S = \{(x^1, \dots, x^n) \in U \mid x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

Eine solche Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ heißt an S angepasste Karte von M .

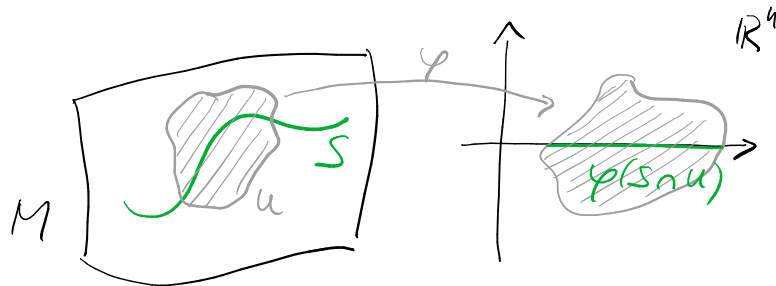


ABBILDUNG 20. Untermannigfaltigkeit S mit an S angepasster Karte.

BEMERKUNG 5.3.2. Die Differenz $\dim M - k$ der Dimensionen heißt auch Kodimension von S in M .

Die Definition umfasst auch offene Untermannigfaltigkeiten.



ABBILDUNG 21. Zwei Teilmengen, die keine Untermannigfaltigkeiten sind.

PROPOSITION 5.3.3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit. Dann ist S eine Mannigfaltigkeit, und

$$\{(U \cap S, \phi|_S) \mid (U, \phi) \text{ an } S \text{ angepasste Karte}\}$$

ist ein glatter Atlas für S .

BEWEIS. Für zwei an S angepasste Karten $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ ist die Kartenwechselabbildung $\phi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ glatt. Wir nehmen an, dass die Kodimension $n - k$ ist, d.h. dass S in den Karten durch das Verschwinden der letzten $n - k$ Koordinaten definiert ist. Dann bildet $\phi \circ \psi^{-1}$ die Menge $\psi(U \cap V \cap S) \subseteq \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$ in die Menge $\phi(U \cap V \cap S) \subseteq \phi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ab. Die Komponenten dieser Abbildung sind Komponenten von $\phi \circ \psi^{-1}$, also ist diese Einschränkung auf $\mathbb{R}^k$ auch glatt. Da nach Definition für jeden Punkt in S eine angepasste Karte existiert, haben wir einen glatten Atlas für S . Also ist S eine Mannigfaltigkeit der Dimension k . $\square$

DEFINITION 5.3.4. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Für einen Punkt $p \in N$ heißt

$$f^{-1}(p) = \{q \in M \mid f(q) = p\}$$

die Niveaumenge (engl. level set) zu p . Für $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ nennt man $f^{-1}(0)$ auch Verschwindungsmenge von f .

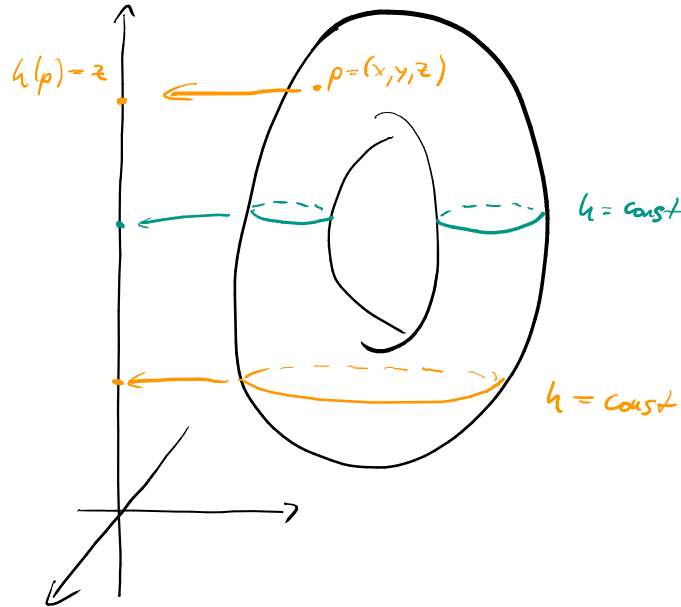


ABBILDUNG 22. Höhenfunktion auf dem Torus, mit verschiedenen Niveaumengen.

Wir haben jetzt die folgende Version vom impliziten Funktionen-Satz auf Mannigfaltigkeiten. Das Beweisprinzip ist wieder sehr ähnlich zum Beweis des Satzes vom konstanten Rang 5.2.8 im $\mathbb{R}^n$: wir wählen uns im Tangentialbündel die richtige Basis und nutzen dann den Satz von der Umkehrfunktion, um daraus geeignete Koordinaten zu bekommen.

PROPOSITION 5.3.5. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung und sei $p \in N$ ein regulärer Wert. Wenn $f^{-1}(p) \neq \emptyset$, dann ist $f^{-1}(p)$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit der Dimension $\dim M - \dim N$.

BEWEIS. Sei $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ eine Karte um p . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ annehmen. Für diese Karte ist insbesondere $f^{-1}(V) \subseteq M$ eine offene Umgebung von $f^{-1}(p)$, und $f^{-1}(p)$ ist die Verschwindungsmenge von $\psi \circ f$ in $f^{-1}(V)$. Insbesondere können wir die folgende einfachere Situation annehmen: $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $p = 0$ in $\mathbb{R}^n$ ist ein regulärer Wert.

Da $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ ist f für alle Punkte in $f^{-1}(0)$ eine Submersion, also $m \geq n$; außerdem sind alle Punkte in $f^{-1}(0)$ regulär. Für einen Punkt $q \in f^{-1}(0)$ wählen wir eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^m)$ um q . Da q regulär ist, hat die Jacobi-Matrix $(\partial f^i / \partial x^j)_{i,j}$ Rang n . Durch Umordnen der Koordinaten können wir erreichen, dass der Block $(\partial f^i / \partial x^j)_{m-n+1 \leq j \leq m}$ invertierbar ist.

Auf U betrachten wir die Funktionen $x^1, \dots, x^{m-n}, f^1, \dots, f^n: U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Jacobi-Matrix für die zusammengesetzte Funktion $(x^1, \dots, x^{m-n}, f^1, \dots, f^n): U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^j} \\ \frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^\beta} & \frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^j} \end{pmatrix}$$

wobei $1 \leq \alpha, \beta \leq m-n$ und $m-n+1 \leq i, j \leq m$. Diese Matrix hat Determinante

$$\det \left(\frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^j} \right)_{m-n+1 \leq i, j \leq m} \neq 0,$$

nach Konstruktion. Nach dem Satz von der Umkehrfunktion 5.2.2 existiert also eine Umgebung U' von p so dass $(U', x^1, \dots, x^{m-n}, f^1, \dots, f^n)$ eine Karte von M ist. In dieser Karte wird $f^{-1}(0)$ beschrieben durch $f^1 = \dots = f^n = 0$. Also ist diese Karte angepasst an $f^{-1}(0)$, und $f^{-1}(0)$ ist eine reguläre Untermannigfaltigkeit der Dimension $m-n$. $\square$

BEMERKUNG 5.3.6. *Die Voraussetzung, dass der Punkt p ein regulärer Wert ist, ist zentral. Jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$, die eine relativ kompakte offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat, kann als Verschwindungsmenge einer glatten nicht-negativen Abbildung $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{supp}(1-g) \subseteq U$ geschrieben werden. Daraus folgt mit Zerlegung der Eins, dass jede abgeschlossene Teilmenge A einer glatten Mannigfaltigkeit M als Verschwindungsmenge einer glatten Abbildung geschrieben werden kann.*

Mit Proposition 5.3.5 können wir viele weitere Beispiele von Mannigfaltigkeiten konstruieren.

BEISPIEL 5.3.7. *Die n -dimensionale Sphäre ist in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch die Gleichung $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ gegeben. Dies entspricht der Verschwindungsmenge der Funktion*

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}: (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 - 1$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1} = 2x^1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{n+1}} = 2x^{n+1} \right)$$

und damit ist der einzige kritische Punkt $(0, \dots, 0)$. Also ist S^n eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

BEISPIEL 5.3.8. *Allgemeiner ist für ein Polynom $f(x_1, \dots, x_n)$ die Menge*

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine reguläre Untermannigfaltigkeit, wenn f und $\partial f / \partial x^i$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. Untermannigfaltigkeiten dieser Form nennt man glatte Hyperflächen.

Zum Beispiel ist für die kubische Fläche $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 1$ eine glatte Hyperfläche: die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 3.$$

Die gemeinsame Nullstelle der partiellen Ableitungen ist $x = y = z = \frac{3}{2}$, aber wegen $3 \frac{9}{4} - 3 \frac{27}{8} = -\frac{27}{8} \neq 1$ liegt dieser Punkt nicht auf der Fläche. $\square$

BEISPIEL 5.3.9. Wir können auch im projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ Hyperflächen definieren: jedes homogene Polynom definiert eine Funktion $f: \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\{f = 0\}$ ist eine reguläre Untermannigfaltigkeit, wenn f keine gemeinsamen Nullstellen mit allen partiellen Ableitungen hat. Solche Mannigfaltigkeiten nennt man glatte projektive Hyperflächen.

Die projektive Fläche $f(x, y, z) = xyw + xyz + yzw + xzw = 0$ ist singulär, d.h. keine reguläre Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{RP}^3$. Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yw + yz + zw, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xw + xz + zw, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + yw + xw, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = xy + yz + xz.$$

Die Punkte $[1 : 0 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0 : 0]$, $[0 : 0 : 1 : 0]$ und $[0 : 0 : 0 : 1]$ sind singulär, da an ihnen sowohl f als auch alle partiellen Ableitungen verschwinden. Man kann zeigen (das ist aber etwas schwieriger), dass dies die einzigen singulären Punkte sind. (für Bilder: Stichwort Cayley nodal cubic) $\square$

BEISPIEL 5.3.10. Die Matrizen­gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, konkret realisiert als Niveau-1-Menge der glatten Abbildung $\det: \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Um zu zeigen, dass die 1 tatsächlich ein regulärer Punkt der Determinantenabbildung ist, entwickeln wir die Determinante nach der i -ten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij},$$

wobei m_{ij} der entsprechende (i, j) -Minor ist, d.h. die Determinante der Matrix, die aus A durch Entfernen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Damit sehen wir

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

Eine Matrix ist also ein kritischer Punkt der Determinante, wenn alle (i, j) -Minoren verschwinden. Eine solche Matrix hat aber nach dem Entwicklungssatz Determinante 0. Also ist SL_n eine reguläre Untermannigfaltigkeit von Dimension $n^2 - 1$. $\square$

SATZ 5.3.11 (Satz vom konstanten Rang für Mannigfaltigkeiten).

Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung, die in einer Umgebung von $p \in M$ konstanten Rang k hat. Dann existiert eine Karte $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ mit $\phi(p) = 0$ und eine Karte $(V, \psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ mit $\psi(f(p)) = 0$, so dass für alle Punkte in U gilt

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \dots, r^m) = (r^1, \dots, r^k, 0, \dots, 0).$$

Wenn für einen Punkt $q \in N$ die Niveaumenge $f^{-1}(q)$ eine offene Umgebung hat, auf der f konstanten Rang k hat, dann ist $f^{-1}(q)$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit in M von Kodimension k .

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.12. Beweisen Sie Satz 5.3.11 mit Hilfe von Satz 5.2.8.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.13. Zeigen Sie in den folgenden Schritten, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$ eine glatte Mannigfaltigkeit von Dimension $n(n-1)/2$ ist:

- (1) Mit der Abbildung $f: \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}): A \mapsto A^t A$ können wir die orthogonale Gruppe O als $f^{-1}(\mathrm{I}_n)$ identifizieren.
- (2) Am Punkt $\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ haben wir $T_{\mathrm{I}_n} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, und das Differential von f am Punkt I_n ist $df: M \mapsto M^t + M$.
- (3) Die Abbildung df hat konstanten Rang $n(n+1)/2$.

Immersionen und Submersionen sind insbesondere auch Abbildungen mit konstantem Rang. Damit ergeben sich zwei Spezialfälle des Satzes vom konstanten Rang.

PROPOSITION 5.3.14 (Immersionssatz).

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Immersion am Punkt $p \in M$. Dann existiert eine Karte $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ mit $\phi(p) = 0$ und eine Karte $(V, \psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ mit $\psi(f(p)) = 0$, so dass in einer Umgebung von $\phi(p)$ gilt

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \dots, r^m) = (r^1, \dots, r^m, 0, \dots, 0).$$

PROPOSITION 5.3.15 (Submersionssatz).

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Submersion am Punkt $p \in M$. Dann existiert eine Karte $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ mit $\phi(p) = 0$ und eine Karte $(V, \psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ mit $\psi(f(p)) = 0$, so dass in einer Umgebung von $\phi(p)$ gilt

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \dots, r^n, r^{n+1}, \dots, r^m) = (r^1, \dots, r^n).$$

BEMERKUNG 5.3.16.

- Insbesondere sind Submersionen offene Abbildungen: lokal sind sie durch Projektionsabbildungen gegeben, die offen sind.
- Wenn $f: M \rightarrow N$ eine Submersion ist, dann ist $S = f^{-1}(p)$ für jeden Punkt $p \in N$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit von M . Für einen Punkt $q \in S$ haben wir dann eine exakte Sequenz von Tangentialräumen

$$0 \rightarrow T_q S \rightarrow T_q M \xrightarrow{df} T_p N \rightarrow 0.$$

Insbesondere ist der Kern von df genau der Tangentialraum an S im Punkt q . Wenn auf $T_q M$ ein Skalarprodukt existiert, wird das orthogonale Komplement $T_q S^\perp$ isomorph auf $T_p N$ abgebildet. Die Vektoren in $T_q S^\perp$ heißen dann Normalenvektoren zu S .

- Wir hatten bereits das Tangentialbündel als Beispiel für ein Vektorbündel von Rang r auf einer Mannigfaltigkeit von Dimension r . Für eine Immersion $\iota: M \rightarrow N$ haben wir für jeden Punkt $p \in M$ eine injektive lineare Abbildung $d\iota: T_p M \hookrightarrow T_p N$. Es gibt ein Vektorbündel auf M , dessen Faser über dem Punkt p genau der Kokern $\text{coker } d\iota = T_p N / d\iota(T_p M)$ ist. Dieses Bündel heißt Normalenbündel.

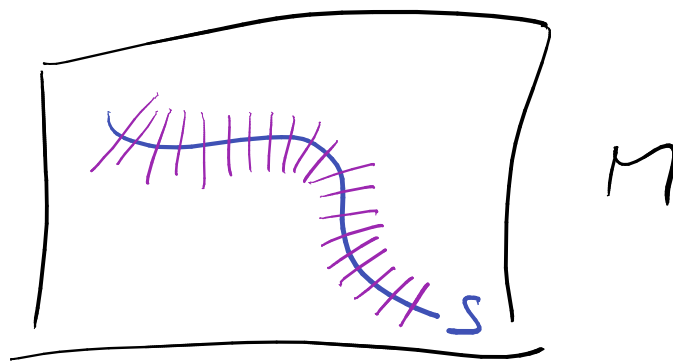


ABBILDUNG 23. Normalenbündel einer regulären Kurve in einer Fläche.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.17. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und sei $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m)$ eine Karte. Zeigen Sie, dass sich für einen Punkt $p \in U$ der Tangentialraum $T_p M$ mit dem Bild der linearen Abbildung

$$d_{\phi(p)} \phi^{-1}: \mathbb{R}^m \cong T_{\phi(p)} \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$$

identifizieren lässt.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.18. Sei $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$ eine glatte Abbildung und $0 \in \mathbb{R}^{N-m}$ ein regulärer Wert. Bezeichne $M = f^{-1}(0)$ die zugehörige Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass sich der Tangentialraum $T_p M$ an einen Punkt $p \in M$ mit dem Unterraum $\ker d_p f$ von $\mathbb{R}^N$ identifizieren lässt.

Beschreiben Sie den Tangentialraum von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.19. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 x^3 + 3zx^2 + 3x - zy^2 - 2y = 1\}$$

eine zum $\mathbb{R}^2$ diffeomorphe glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.20. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_0^2 + \dots + z_n^2 = 1\}$$

eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^{n+1}$ ist, und diffeomorph zu TS^n ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.21 (Gauß-Abbildung). Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit von Dimension k , wir bezeichnen die Immersion mit $\iota: M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Für jeden Punkt $p \in M$ können wir den Tangentialraum $T_p M$ durch $d\iota: T_p M \rightarrow T_{\iota(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ als k -dimensionalen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ auffassen. Zeigen Sie, dass die zugehörige Abbildung $M \rightarrow \text{Gr}(k, n)$ glatt ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.22. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine zwei-dimensionale reguläre Untermannigfaltigkeit. Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $U \cap M$ in U durch Verschwindung einer glatten Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ definiert werden kann. Zeigen Sie, dass die Normalenräume an Punkte in U durch den Gradienten $\text{grad}(f)$ erzeugt werden. Alternativ werden die Normalenräume auch durch das Kreuzprodukt $\partial_1 \phi(0) \times \partial_2 \phi(0)$ für eine lokale Parametrisierung ϕ der Fläche mit $\phi(0) = p$ erzeugt.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.23. Sei $p: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch ein homogenes Polynom vom Grad $m > 1$ in k Variablen, d.h. $p(tx_1, \dots, tx_k) = t^m p(x_1, \dots, x_k)$. Zeigen Sie, dass 0 der einzige kritische Wert ist und die Mannigfaltigkeiten $p^{-1}(a)$ für alle $a > 0$ diffeomorph sind.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.24. Die Menge

$$\left\{ (z, w) \in \mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n \mid \sum_{i=0}^m z_i w_i = 0 \right\}$$

für $m \leq n$ und $z = [z_0 : \dots : z_m]$, $w = [w_0 : \dots : w_n]$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n$.

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.25. (*) Zeigen Sie, dass es keine Immersion des Möbiusbands in $\mathbb{R}^2$ gibt.

5.4. Satz von Morse–Sard und Transversalität

SATZ 5.4.1 (Satz von Morse–Sard). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Dann hat die Menge

$$\text{Krit}(f) = \{f(p) \mid p \in U; \text{rg}(f_*: T_p(U) \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^n) < n\}$$

der kritischen Werte von f Lebesgue-Maß null.

BEWEIS. Die Aussage wird mittels Induktion über m bewiesen. Der Fall $m = 0$ ist klar.

Wir definieren $K_i \subseteq U$ als die Menge der Punkte $p \in U$, für die alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq i$ verschwinden. Dann haben wir eine absteigende Kette von Teilmengen $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$, wobei $K \subseteq U$ die Menge der kritischen

Punkte von f ist. Der Beweis besteht aus drei Schritten: (i) zeigt, dass $f(K \setminus K_1)$ eine Nullmenge ist, (ii) zeigt, dass $f(K_i \setminus K_{i+1})$ eine Nullmenge ist, und (iii) zeigt, dass $f(K_i)$ für genügend großes i eine Nullmenge ist.

(i) Im ersten Schritt wollen wir zeigen, dass $f(K \setminus K_1)$ eine Nullmenge ist. Da für $n = 1$ schon $K = K_1$ gilt, nehmen wir an, dass $n \geq 2$ ist. Wir wollen zeigen, dass für jeden Punkt $x \in K \setminus K_1$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von x existiert, so dass $f(V \cap K)$ eine Nullmenge ist. Da $\mathbb{R}^m$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und das Lebesgue-Maß abzählbar additiv ist, reicht das, um die Behauptung zu bekommen.

Da $x \notin K_1$ gibt es i und j so dass $\frac{\partial f^i}{\partial r^j} \neq 0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $i = j = 1$. Dann hat die Abbildung

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^m: x \mapsto (f^1(x), x^2, \dots, x^m).$$

eine invertierbare Jacobi-Matrix, also gibt es eine Umgebung V von x , so dass $h: V \rightarrow V' = h(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus ist. Damit ist für die Komposition $g = f \circ h^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Menge K' der kritischen Punkte genau $h(V \cap K)$. Insbesondere ist $g(K') = f(V \cap K)$.

Nach Konstruktion bildet g einen Punkt $(t, x^2, \dots, x^m) \in V'$ in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ ab, d.h. g bildet Hyperebenen $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ auf Hyperebenen $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Für festes t bezeichnen wir mit $g_t: \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ die entsprechende Einschränkung. Die kritischen Punkte von g_t sind genau die kritischen Punkte für g , da die Jacobi-Matrix die Form

$$\left(\frac{\partial g^i}{\partial r^j} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial g_t^i}{\partial r^j} \end{pmatrix}$$

hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der kritischen Werte von g_t in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine Nullmenge. Anders gesagt ist der Schnitt der Menge $g(K')$ mit jeder Hyperebene $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine Nullmenge. Außerdem ist $g(K')$ messbar: die Menge der kritischen Punkte K' ist abgeschlossen, und $\mathbb{R}^m$ ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen (z.B. durch $\mathbb{Z}^n$ -Verschiebung des Einheitswürfels $[0, 1]^m$); dann ist auch $g(K')$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen, also messbar. Nach dem Satz von Fubini (Analysis III?) ist $g(K') = f(V \cap K)$ eine Nullmenge.

(ii) Im zweiten Schritt wollen wir zeigen, dass $f(K_i \setminus K_{i+1})$ eine Nullmenge ist. Das Argument ist dem aus dem ersten Schritt sehr ähnlich. Für einen Punkt $x \in K_i \setminus K_{i+1}$ gibt es eine $(i+1)$ -te Ableitung, die nicht verschwindet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben wir also eine Funktion

$$w = \frac{\partial^k f^r}{\partial r^{s_2} \dots \partial r^{s_{k+1}}},$$

die an x verschwindet, aber für die $\frac{\partial w}{\partial r^1} \neq 0$ ist. Wie im ersten Schritt können wir die Funktion $h(x) = (w(x), x^2, \dots, x^n)$ betrachten. Diese Funktion bildet eine Umgebung V von x diffeomorph in eine Menge $V' = h(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ ab, und es gilt $h(K_i \cap V) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Wir betrachten wieder die Funktion $g = f \circ h^{-1}: V' \rightarrow \mathbb{R}^n$ bzw. deren Einschränkung $\bar{g}: (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der kritischen Werte von $\bar{g}$ eine Nullmenge, die $h(K_i \cap V)$ enthält. Also ist $\bar{g} \circ h(K_i \cap V) = f(K_i \cap V)$ eine Nullmenge. Wie im Schritt (i) reicht, das für die Behauptung.

(iii) Im dritten Schritt zeigen wir, dass $f(K_i)$ für genügend großes i eine Nullmenge ist. Für einen Würfel $I^m \subseteq U$ von Kantenlänge δ wollen wir zeigen, dass $f(K_i \cap I^m)$ eine Nullmenge ist. Die Menge K_i kann mit abzählbar vielen solchen Würfeln überdeckt werden, und aus der abzählbaren Additivität des Lebesgue-Maßes folgt dann die Behauptung.

Da I^m kompakt ist, folgt aus dem Satz von Taylor (Analysis II), dass für $x \in K^i \cap I^m$ und $x+h \in I^m$ gilt $f(x+h) = f(x) + R(x, h)$ mit $\|R(x, h)\| \leq c\|h\|^{i+1}$ gilt, wobei die Konstante c nur von f und I^m abhängt. Wir können jetzt den Würfel I^m in a^m Würfel der Seitenlänge δ/a unterteilen. Sei I_1 ein Würfel der Unterteilung, der einen Punkt aus K_i enthält, und für jeden Punkt $x+h \in I_1$ gilt $\|h\| \leq \sqrt{m}(\delta/a)$.

Aus der Abschätzung mit Taylor erhalten wir, dass $f(I_1)$ in einem Würfel der Kantenlänge

$$2c \left(\frac{\sqrt{m}\delta}{a} \right)^{i+1}$$

enthalten ist. Damit ist das Bild $f(K_i \cap I^m)$ in einer Vereinigung von maximal a^m Würfeln enthalten, deren Gesamtvolumen durch

$$a^{m-n(i+1)} \cdot \left(2c(\sqrt{m}\delta)^{i+1} \right)^n$$

beschränkt ist. Der zweite Faktor ist unabhängig von a . Für $m - n(i+1) < 0$, alternativ $i+1 > m/n$, geht also die obere Schranke für das Gesamtvolumen gegen 0 für $a \rightarrow \infty$. Also ist $f(K_i \cap I^n)$ eine Nullmenge. $\square$

KOROLLAR 5.4.2 (Satz von Brown). *Für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist die Menge der regulären Werte dicht in N , d.h. der Abschluss der Menge der regulären Werte ist N .*

BEWEIS. Folgt aus Satz 5.4.1: in jeder Karte von N ist die Menge der regulären Werte dicht. $\square$

DEFINITION 5.4.3. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und $S \subset M$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit. Eine glatte Abbildung $f: N \rightarrow M$ heißt transversal zu S , wenn für jeden Punkt $p \in f^{-1}(S)$ gilt*

$$df(T_p N) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} M.$$

Die Notation für Transversalität ist $f \pitchfork S$.

BEMERKUNG 5.4.4. *Die Definition kann für zwei Untermannigfaltigkeiten angewendet werden: $S_1 \subset M$ und $S_2 \subset M$ sind transversal, wenn die Inklusionsabbildung $\iota: S_1 \rightarrow M$ zu S_2 transversal ist. (Die Definition ist symmetrisch in S_1 und S_2 .) Wenn $\dim S_1 + \dim S_2 < \dim M$ können die beiden Untermannigfaltigkeiten nur transversal sein, wenn sie sich nicht schneiden.*

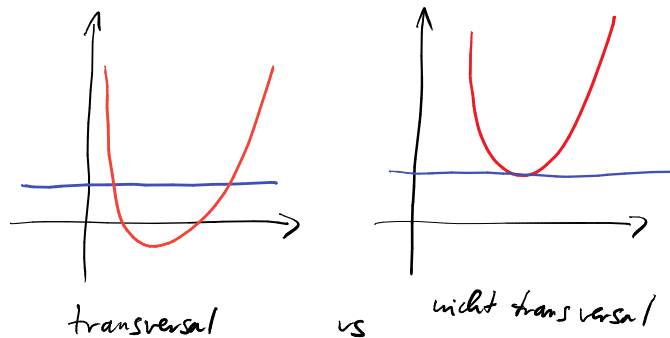


ABBILDUNG 24. Im transversalen Beispiel erzeugen die Tangentialvektoren an die beiden Kurven den ganzen Tangentialraum für die Zeichenebene. Im nicht-transversalen Beispiel stimmen die Tangentialvektorräume an die sich berührenden Kurven überein.

BEMERKUNG 5.4.5. Zitat von J.H.C. Whitehead (1959): “Transversal” is a noun; the adjective is “transverse”.

SATZ 5.4.6. Sei $f: N \rightarrow M$ transversal zu einer regulären Untermannigfaltigkeit $S \subset M$ von Kodimension k . Dann ist $f^{-1}(S) \subset N$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit von N von Kodimension k .

ÜBUNGSAUFGABE 5.4.7. Beweisen Sie Satz 5.4.6. Betrachten Sie dazu für $p \in f^{-1}(S)$ und $(U, x^1, \dots, x^m)$ eine an S angepasste Karte um $f(p)$, so dass $U \cap S$ die Verschwindungsmenge der Koordinatenfunktionen $x^{m-k+1}, \dots, x^m$ ist. Wir definieren $g = (x^{m-k+1}, \dots, x^m): U \rightarrow \mathbb{R}^k$.

- (1) Zeigen Sie $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(S) = (g \circ f)^{-1}(0)$.
- (2) Zeigen Sie, dass 0 ein regulärer Wert für $g \circ f: f^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist.
- (3) Folgern Sie daraus die Behauptung.

SATZ 5.4.8 (Transversalitätssatz). Seien M , A und N glatte Mannigfaltigkeiten und $f: M \times A \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Wenn f transversal zu einer regulären Untermannigfaltigkeit $S \subset N$ ist, dann ist $f_a: M \rightarrow N: p \mapsto f(p, a)$ transversal zu $S \subset N$ für fast alle $a \in A$.

BEWEIS. Nach Satz 5.4.6 ist $W = f^{-1}(S)$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $M \times A$. Wir bezeichnen mit $\text{pr}_A: M \times A \rightarrow A$ die Projektion auf den zweiten Faktor und mit $\rho: W \rightarrow A$ die Komposition von pr_A mit der Einbettung $W \hookrightarrow M \times A$. Wir wollen zeigen, dass f_a transversal zu S ist, wenn $a \in A$ ein regulärer Wert für ρ ist. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Morse–Sard 5.4.1.

Wir zeigen als Zwischenschritt die folgende *Behauptung*: Wenn a ein regulärer Wert von ρ ist und $(p, a) \in W$, dann gilt $T_{(p,a)}(M \times A) = T_{(p,a)}W + T_{(p,a)}(M \times \{a\})$.

Wir haben die Differentiale $d\text{pr}_A$ und $d\text{pr}_M$ für die Projektionen auf die jeweiligen Faktoren. Dann können wir einen beliebigen Tangentialvektor $v \in T_{(p,a)}(M \times A)$ schreiben

$$v = d\text{pr}_M(v) + d\text{pr}_A(v).$$

Da a ein regulärer Wert für ρ ist, existiert $w \in T_{(p,a)}W$ mit $d\text{pr}_A(w) = d\rho(v) = d\text{pr}_A(v)$. Dann haben wir

$$v = d\text{pr}_M(v) - d\text{pr}_M(w) + d\text{pr}_A(w).$$

Der Vektor $d\text{pr}_M(v) - d\text{pr}_M(w)$ liegt nun in $T_{(p,a)}(M \times \{a\})$, damit haben wir die *Behauptung* im Zwischenschritt bewiesen.

Da f transversal zu S ist, gilt für alle $(p, a) \in f^{-1}(S)$

$$df(T_{(p,a)}(M \times A)) + T_{f(p,a)}S = T_{f(p,a)}N.$$

Mit der *Behauptung* haben wir dann

$$df(T_{(p,a)}W) + df(T_{(p,a)}(M \times \{a\})) + T_{f(p,a)}S = T_{f(p,a)}N.$$

Da $f(W) \subseteq S$ ist $df(T_{(p,a)}W) \subseteq T_{f(p,a)}S$. Außerdem haben wir

$$df(T_{(p,a)}(M \times \{a\})) = df(T_p M).$$

Damit erhalten wir

$$df(T_p M) + T_{f(p,a)}S = T_{f(p,a)}N$$

und sehen, dass f_a transversal zu S ist, und der Satz ist bewiesen. $\square$

5.5. Einbettungen und Whitney'scher Einbettungssatz

DEFINITION 5.5.1. Eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt Einbettung, wenn sie eine injektive Immersion und ein Homöomorphismus auf das Bild $f(M)$ (mit der von N induzierten Unterraumtopologie) ist.

PROPOSITION 5.5.2. Für eine Einbettung $f: M \rightarrow N$ ist das Bild $f(M)$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit in N . Umgekehrt ist für eine reguläre Untermannigfaltigkeit $S \subseteq M$ die Inklusionsabbildung $\iota: S \hookrightarrow M$ eine Einbettung.

BEWEIS. (1) Aus dem Immersionssatz folgt, dass es Karten $(U, x^1, \dots, x^m)$ um p und $(V, y^1, \dots, y^n)$ um $f(p)$ gibt, so dass $f: U \rightarrow V$ die Form $(x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$ hat. Es bleibt zu zeigen, dass es eine Umgebung von $f(p)$ gibt, in der $f(M)$ durch die Verschwindung von $y^{m+1}, \dots, y^n$ definiert ist. (An dieser Stelle haben wir $f(U) \subseteq \{y^{m+1}, \dots, y^n\}$, aber a priori könnte die Verschwindungsmenge größer als $f(U)$ sein.) Da $f: M \rightarrow f(M)$ ein Homöomorphismus ist (wobei $f(M)$ die von N induzierte Unterraumtopologie trägt), ist $f(U)$ offen in $f(M)$. Also existiert eine offene Menge V' in N , so dass $V' \cap f(M) = f(U)$ ist. Aus $V \cap V' \cap f(M) = V \cap f(U) = f(U)$ folgt, dass $f(U)$ in $V \cap V'$ durch das Verschwinden von $y^{m+1}, \dots, y^n$ definiert ist und $(V \cap V', y^1, \dots, y^n)$ eine an $f(M)$ angepasste Karte um $f(p)$ ist.

(2) Wenn $S \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit ist, ist die Inklusionsabbildung ein Homöomorphismus auf das Bild. Bleibt zu zeigen, dass die Inklusionsabbildung eine Immersion ist. Sei $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine an S angepasste Karte von M , d.h. dass S in U durch das Verschwinden von $x^{s+1}, \dots, x^n$ definiert wird, und $(S \cap U, x^1, \dots, x^s)$ eine Karte für S ist. In diesen Karten sehen wir, dass die Inklusionsabbildung ι eine Immersion auf $S \cap U$ ist. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 5.5.3. Wenn M eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, dann ist jede injektive Immersion $f: M \rightarrow N$ schon eine Einbettung.

Zwei relevante Beispiele für Einbettungen aus der Geometrie sind die beiden folgenden:

ÜBUNGSAUFGABE 5.5.4. Zeigen Sie, dass die Segre-Einbettung

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m &\rightarrow \mathbb{RP}^{(n+1)(m+1)-1} \\ ([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m]) &\mapsto [x_0 y_0 : x_0 y_1 : \dots : x_i y_j : \dots : x_n y_m] \end{aligned}$$

eine Einbettung ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.5.5. Seien d und n natürliche Zahlen, und sei $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Zeigen Sie, dass die Veronese-Einbettung $\mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^N$ vom Grad d , die ein Koordinatentupel $[x_0 : \dots : x_n]$ auf das Tupel aller Monome vom Grad d in den x_i (lexikographisch geordnet) abbildet, eine Einbettung ist.

SATZ 5.5.6. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann existiert ein $N > n$ und eine Einbettung $\iota: M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.

BEWEIS. Da M kompakt ist, existiert ein endlicher Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$ von M . Wir wählen eine der Überdeckung $\{U_i\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$ untergeordnete glatte Partition der Eins $\{\lambda_i\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$, s. Proposition 3.4.6.

Für die Konstruktion der Einbettung setzen wir $N = r(n+1)$. Die Abbildung wird definiert durch

$$\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^{rn+r}: p \mapsto (\lambda_1(p)\phi_1(p), \dots, \lambda_r(p)\phi_r(p), \lambda_1(p), \dots, \lambda_r(p))$$

(Hier trägt jedes $\lambda_i(p)\phi_i(p)$ immer n Komponenten zur Gesamtdimension bei.) Dabei ist zu bemerken, dass $\phi_i(p)$ nicht überall definiert ist. Da $\text{supp } \lambda_i \subseteq U_i$, gibt

es eine offene Umgebung V_i von $M \setminus U_i$, so dass $\lambda_i \cdot \phi_i = 0$ auf $U_i \cap V_i$ verschwindet. Also kann $\lambda_i \cdot \phi_i$ glatt durch $\lambda_i \cdot \phi_i|_{V_i} = 0$ auf M fortgesetzt werden. Insbesondere ist die Abbildung $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ glatt.

Wir zeigen, dass für einen Punkt p mit $\lambda_i(p) \neq 0$ die Abbildung ι eine Immersion ist. Multiplikation mit $\lambda_i(p)$ ist ein Diffeomorphismus und damit ist die Abbildung $d(\lambda_i \cdot \phi_i): T_p M \rightarrow T_{\lambda_i(p)\phi_i(p)} \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, also muss $d\iota: T_p M \rightarrow T_{\iota(p)} \mathbb{R}^N$ injektiv sein. Für die Partition der Eins ist $\{x \in M \mid \lambda_i(x) \neq 0\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$ eine offene Überdeckung von M , also ist ι eine Immersion.

Es bleibt noch zu zeigen, dass ι injektiv ist. Seien $p, q \in M$ zwei Punkte. Da λ eine Partition der Eins ist, gibt es ein j , so dass $\lambda_j(p) \neq 0$. Wenn $\iota(p)$ und $\iota(q)$ gleich sind, sind insbesondere die Koordinaten $\lambda_j(p)$ und $\lambda_j(q)$ gleich, also $p, q \in \{x \in M \mid \lambda_j(x) \neq 0\}$. Aber $\lambda_j \phi_j$ ist ein Diffeomorphismus auf dieser Menge, also muss bereits $p = q$ gelten.

Nach Voraussetzung ist M kompakt, also ist ι ein Einbettung. $\square$

SATZ 5.5.7 (Whitney Einbettungssatz). *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Dann existiert eine Einbettung $\iota: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.*

BEWEIS. Nach Satz 5.5.6 gibt es eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Wir nehmen an, dass $N > 2n + 1$ und wollen zeigen, dass auch eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{N-1}$ existiert. Wir identifizieren $\mathbb{R}^{N-1}$ als $\{x^N \equiv 0\}$ und betrachten die Parallelprojektion $\text{pr}_v: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ für einen gegebenen Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ mit $v^N \neq 0$.

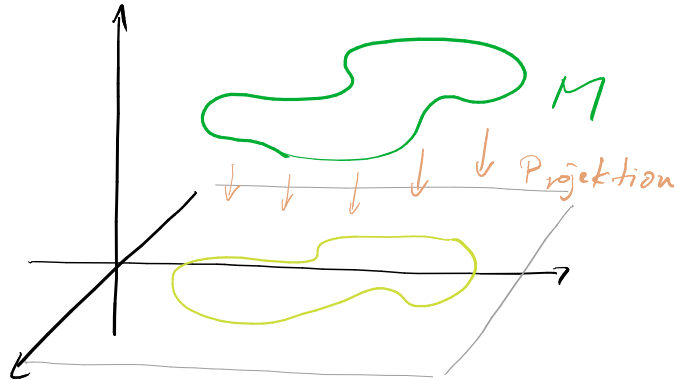


ABBILDUNG 25. Projektion einer Kurve im $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene $\mathbb{R}^2$.

Für einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$ wollen wir die Bedingungen ermitteln, unter denen $\text{pr}_v|_M$ eine glatte Einbettung ist. Die Einschränkung $\text{pr}_v|_M$ ist injektiv, wenn v nicht parallel zu einer Sekante von M ist, d.h. für alle $p, q \in M$ muss gelten $v \neq \frac{p-q}{\|p-q\|}$. Für einen Tangentialvektor $w \in T_p M$ an einem Punkt $p \in M$ ist w im Kern von pr_v , wenn v und w parallel sind. Dabei fassen wir $T_p M$ als Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$ mittels $d\iota$ auf. Insbesondere wird $\text{pr}_v|_M$ eine Immersion, wenn für alle Punkte $p \in M$ und Tangentialvektoren $w \in T_p M$ gilt $v \neq \frac{w}{\|w\|}$.

Wir formulieren die Bedingungen um. Die Abbildung $\text{pr}_v|_M$ ist injektiv, wenn v nicht im Bild der glatten Abbildung

$$\sigma: M \times M \setminus \Delta \rightarrow S^{N-1}: (p, q) \mapsto \frac{p - q}{\|p - q\|}$$

liegt. Da $\dim M \times M \setminus \Delta = 2n < N - 1 = \dim S^{N-1}$, ist nach Satz 5.4.1 bzw. Korollar 5.4.2 das Komplement dicht. Das heißt, dass es in jeder offenen Teilmenge von S^{N-1} einen Punkt v gibt, so dass pr_v injektiv ist.

Für die zweite Bedingung reicht es, die Aussage für Vektoren im Einheitsphärenbündel

$$T_1M = \{v \in TM \mid \|v\| = 1\}$$

zu prüfen. Aus Proposition 5.3.5, angewendet auf die Norm-Abbildung $\nu: TM \rightarrow \mathbb{R}: v \mapsto \nu(v) = \|v\|^2$, folgt, dass T_1M eine reguläre Untermannigfaltigkeit von TM ist. Da M kompakt ist, ist auch T_1M kompakt.

Wir definieren die Abbildung $\tau: T_1M \rightarrow S^{N-1}$, indem wir TM als Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^N$ auffassen, und $T_1M \subseteq M \times S^{N-1}$ auf den zweiten Faktor projizieren. Die Abbildung τ ist glatt, und wegen $\dim T_1M = 2n-1 < \dim S^{N-1}$ ist das Bild nirgends dicht. Da T_1M kompakt ist, ist das Komplement W des Bildes von τ eine dichte offene Teilmenge in S^{N-1} . Also ist der Durchschnitt $W \cap (\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1})$ eine offene Teilmenge W_0 . Diese Menge enthält dann einen Vektor v , der nicht im Bild von σ liegt. Für solch einen Vektor v ist $\text{pr}_v|_M: M \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ eine injektive Immersion, und da M kompakt und Hausdorff ist, auch eine Einbettung. $\square$

BEMERKUNG 5.5.8. *Das ist tatsächlich noch die einfachere Variante. Allgemeiner besagt der Whitney'sche Einbettungssatz, dass für jede n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2n}$ und eine Immersion nach $\mathbb{R}^{2n-1}$ existiert. (Zum Beispiel ist die Boy'sche Fläche eine konkrete Darstellung einer Immersion $\mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Man kann zeigen, dass keine Einbettung $\mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ existiert.)*

ÜBUNGSAUFGABE 5.5.9. Sei $h: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ eine symmetrische Bilinearform, für die $x \neq 0$ und $y \neq 0$ immer $h(x, y) \neq 0$ impliziert. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g: S^n \rightarrow S^{n+k}: x \mapsto h(x, x)/\|h(x, x)\|$ eine glatte Einbettung $\mathbb{RP}^n \rightarrow S^{n+k}$ induziert.

Die Bilinearform

$$h: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}: ([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_n]) \mapsto [z_0 : \dots : z_{2n}]$$

mit $z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j$ induziert eine Einbettung $\mathbb{RP}^n \rightarrow S^{2n}$.

ÜBUNGSAUFGABE 5.5.10. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen injektive Immersionen aber keine Einbettungen sind:

- (1) $\gamma_1: (-\pi/2, 3\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^2: t \mapsto (\sin 2t, \cos t)$
- (2) $\gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1: t \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i c t})$ für $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.6. Anwendungen

5.6.1. Fundamentalsatz der Algebra.

LEMMA 5.6.1. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, und sei M kompakt. Für einen regulären Wert $x \in N$ ist $f^{-1}(x)$ eine endliche Menge, und die Abbildung

$$\deg: R = \{x \in N \mid x \text{ regulärer Wert}\} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto \#f^{-1}(x)$$

ist lokal konstant.

BEWEIS. Sei $x \in N$ ein regulärer Wert von f . Da M kompakt ist, ist $f^{-1}(x)$ kompakt. Da x ein regulärer Wert ist, sind alle Urbilder $y \in f^{-1}(x)$ reguläre Punkte, und damit $f_*: T_y(M) \rightarrow T_x(N)$ ein Isomorphismus. Also ist für jeden Punkt $y \in f^{-1}(x)$ die Abbildung f ein lokaler Diffeomorphismus an y und damit sind alle Punkte in $f^{-1}(x)$ isoliert. Für einen regulären Wert $x \in N$ der Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist also die Menge $f^{-1}(x)$ endlich.

Für einen regulären Wert $x \in N$ ist an allen Punkten $y \in f^{-1}(x)$ das Differential $f_*: T_y M \rightarrow T_x N$ ein Isomorphismus. Für jeden der Punkte $y_1, \dots, y_l \in f^{-1}(x)$

existiert also eine offene Umgebung U_i von y_i , auf der f einen Diffeomorphismus $U_i \rightarrow f(U_i)$ induziert. Nach Konstruktion ist $\deg$ auf der offenen Umgebung $\bigcap_{i=1}^l f(U_i) \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^l U_i\right)$ von x konstant. $\square$

SATZ 5.6.2. *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom $F(z)$ hat eine Nullstelle.*

BEWEIS. Durch die stereographische Projektion $p: S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ identifizieren wir die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Das Polynom $F(z)$ liefert dann eine Abbildung

$$f: S^2 \rightarrow S^2: x \mapsto \begin{cases} (0, 0, 1) & x = (0, 0, 1) \\ p^{-1} \circ F \circ p(x) & x \neq (0, 0, 1) \end{cases}$$

Da f in der Karte durch ein Polynom gegeben ist, ist f auf $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ nach Definition glatt.

Wir müssen noch zeigen, dass f glatt in einer Umgebung von $(0, 0, 1)$ ist. Dazu benutzen wir die andere Karte $(S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}, q)$ mit der stereographischen Projektion $q: S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Wir kennen bereits die Kartenwechselabbildung $p \circ q^{-1}$; nach der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist $p \circ q^{-1}(z) = \bar{z}^{-1}$. Dann können wir f in der Karte $(S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}, q)$ berechnen:

$$q \circ f \circ q^{-1}(z) = q \circ p^{-1} \circ F \circ p \circ q^{-1}(z) = \overline{F(\bar{z}^{-1})}^{-1}.$$

Für $F(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ ist diese Abbildung gegeben durch

$$\frac{z^n}{\sum_{i=0}^n \overline{a_i} z^i}.$$

Damit ist die Funktion f auch glatt in der Karte $(S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}, q)$.

Die glatte Abbildung f hat nur eine endliche Anzahl von kritischen Punkten, da die kritischen Punkte genau die Nullstellen der Ableitung $F'(z)$ sind (und F nach Annahme nicht konstant ist). Damit ist die Menge $R \subset S^2$ der regulären Punkte von f das Komplement einer endlichen Teilmenge von S^2 , also zusammenhängend. Nach Lemma 5.6.1 ist die Funktion $x \mapsto \#f^{-1}(x)$ auf R lokal konstant, also konstant. Die Funktion kann nicht konstant 0 sein, da F nicht konstant ist. Also liegen alle regulären Werte im Bild von f , und da S^2 kompakt ist, muss f surjektiv sein. Die Elemente in $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ sind die Nullstellen des Polynoms F . $\square$

5.6.2. Brouwer'scher Fixpunktsatz. Sei X ein topologischer Raum und sei A ein Unterraum; wir bezeichnen die Inklusion von A in X mit $\iota: A \hookrightarrow X$. Eine Retraktion von X auf A ist eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$, so dass die Komposition $A \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{r} A$ die Identität ist.

SATZ 5.6.3. *Es gibt keine Retraktion $D^n \rightarrow \partial D^n = S^{n-1}$.*

BEWEIS. Sei $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ eine solche Retraktion. Die Abbildung

$$g: D^n \rightarrow S^{n-1}: x \mapsto \begin{cases} f\left(\frac{x}{|x|}\right) & \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1 \\ f(2x) & 0 \leq |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ist eine neue Retraktion, die in einer Umgebung des Randes glatt ist. Dann können wir (z.B. mit den Methoden der Übungsaufgabe 3.4.8) g durch eine glatte Abbildung $h: D^n \rightarrow S^{n-1}$ annähern, die mit g in einer Umgebung des Randes übereinstimmt. Wenn eine stetige Retraktion existiert, existiert also auch eine glatte Retraktion h .

Wir zeigen nun noch, dass eine glatte Retraktion nicht existieren kann. Der Satz von Morse–Sard 5.4.1 bzw. der Satz von Brown 5.4.2 sagt jetzt, dass die glatte Retraktion h einen regulären Wert $y \in S^{n-1}$ hat. Dann ist $h^{-1}(y)$ nach Proposition 5.3.5 eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit $V \subset D^n$ mit Rand

$\partial V = V \cap S^{n-1}$. Insbesondere ist y ein Randpunkt von V . Die Zusammenhangskomponente von V , die y enthält, muss ein abgeschlossenes Intervall sein, hat also noch einen anderen Randpunkt $z \in S^{n-1}$ mit $z \neq y$. Dann ist aber $h(z) = z$, was im Widerspruch zu $z \in h^{-1}(y)$ steht. $\square$

BEMERKUNG 5.6.4. *Mit demselben Argument sehen wir, dass für eine Mannigfaltigkeit M mit Rand keine Retraktion $M \rightarrow \partial M$ existieren kann.*

KOROLLAR 5.6.5 (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Wenn die stetige Abbildung f keinen Fixpunkt hat, können wir eine Abbildung $g: D^n \rightarrow S^{n-1}$ definieren, die jeden Punkt x auf den Schnittpunkt $g(x)$ des Strahls von $f(x)$ durch x mit dem Rand $\partial D^n = S^{n-1}$ abbildet. Diese Abbildung ist eine stetige Retraktion, was ein Widerspruch zum Satz 5.6.3 ist. $\square$

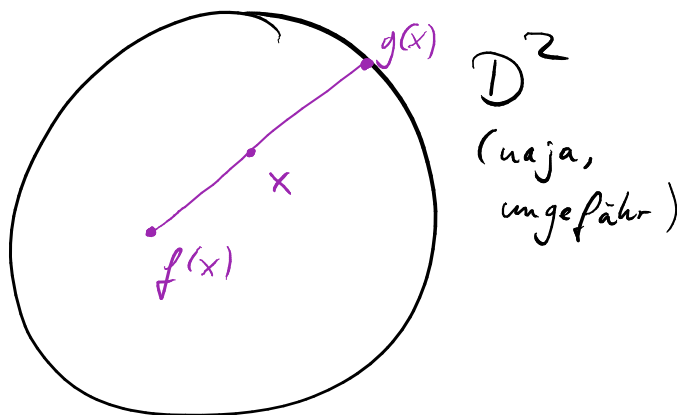


ABBILDUNG 26. Definition der Funktion g im Beweis des Brouwer-Fixpunktsatzes.

ÜBUNGSAUFGABE 5.6.6. Überlegen Sie sich genauer, warum die Abbildung g stetig ist.

5.6.3. Morse-Theorie.

DEFINITION 5.6.7. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Ein kritischer Punkt $p \in M$ heißt nicht-ausgeartet, wenn es eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ um p gibt, so dass die Hesse-Matrix

$$H(f)|_p = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p \right)_{i,j}$$

invertierbar ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.6.8. Zeigen Sie in den folgenden Schritten, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte ist.

- (1) Für Tangentialvektoren $v, w \in T_p M$ wählen wir Vektorfelder X und Y so, dass $X_p = v$ und $Y_p = w$. Dann definieren wir

$$\langle -, - \rangle: T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M: X_p(Yf),$$

d.h. f wird erst in Richtung Y und dann in Richtung X abgeleitet. Zeigen Sie, dass dies eine symmetrische Bilinearform auf $T_p M$ definiert (und insbesondere unabhängig von der Wahl der Vektorfelder ist).

- (2) Zeigen Sie, dass die Bilinearform $\langle -, - \rangle$ genau dann nicht-ausgeartet ist, wenn der kritische Punkt im Sinne von Definition 5.6.7 nicht-ausgeartet ist.

DEFINITION 5.6.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Morse-Funktion, wenn alle kritischen Punkte nicht-ausgeartet sind.

ÜBUNGSAUFGABE 5.6.10. Zeigen Sie, dass eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Morse-Funktion ist, wenn die glatte Abbildung

$$df: M \rightarrow TM^\vee: p \mapsto df|_p$$

transversal zum Nullschnitt des Kotangentialbündels ist.

DEFINITION 5.6.11. Der Index eines nicht-ausgearteten kritischen Punktes $p \in M$ ist die Dimension des maximalen Unterraums von $T_p M$, auf dem die Hesse-Form aus Übungsaufgabe 5.6.8 negativ definit ist.

BEMERKUNG 5.6.12. Wenn der Index mit der Dimension übereinstimmt, haben wir ein lokales Maximum, wenn der Index Null ist, ein lokales Minimum. Alles zwischendrin sind verschiedene Sorten von Sattelpunkten.

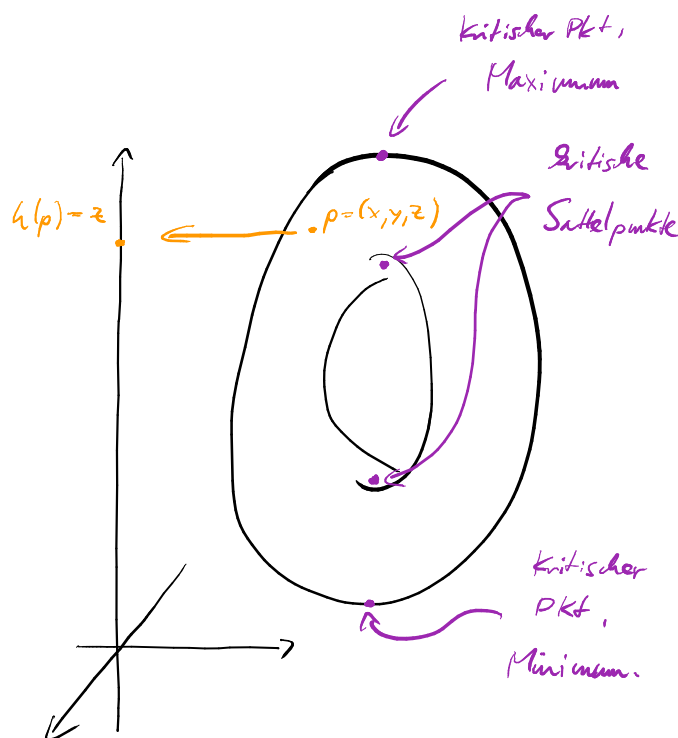


ABBILDUNG 27. Die Höhenfunktion auf dem Torus ist eine Morse-Funktion mit vier kritischen Punkten. Die Indizes der kritischen Punkte sind (von oben gelesen) 2,1,1,0.

LEMMA 5.6.13 (Morse-Lemma). Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung und sei p ein nicht-ausgearteter kritischer Punkt für f von Index λ . Dann existiert eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ um p , sodass $x^i(p) = 0$ und F auf U die folgende Form hat:

$$F = F(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2.$$

BEWEIS. Die Aussage folgt, wenn wir den Spezialfall $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $p = 0$ beweisen. Wir können F mit Taylor-Approximation 4.1.17 als

$$F(x^1, \dots, x^n) = F(0) + \sum_{i=1}^n x^i f_i(x^1, \dots, x^n)$$

mit glatten Abbildungen $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben. Da $p = 0$ ein kritischer Punkt ist, haben wir $f_i(0) = 0$. Dann können wir genau dasselbe Verfahren noch einmal auf die f_i anwenden und erhalten

$$F(x^1, \dots, x^n) = F(0) + \sum_{i,j=1}^n x^i x^j h_{ij}(x^1, \dots, x^n).$$

Die Matrix der Funktionen h_{ij} kann durch $H_{ij} = \frac{h_{ij} + h_{ji}}{2}$ symmetrisiert werden, und dann existiert eine Umgebung der 0, auf der die Matrix $(H_{ij})_{i,j}$ diagonalisiert werden kann. Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation können wir diese Diagonalisierung durch eine orthogonale Matrix auch explizit berechnen (dafür wird das Gram-Schmidt-Verfahren angewendet). Die orthogonale Matrix, die $(H_{ij})_{i,j}$ diagonalisiert, liefert die geforderte Koordinatentransformation. Die expliziten Transformationen wollen wir uns hier ersparen. $\square$

Insbesondere sind nicht-ausgeartete kritische Punkte isoliert, und eine Morse-Funktion auf einer kompakten Mannigfaltigkeit hat nur endlich viele kritische Punkte.

PROPOSITION 5.6.14. *Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es eine Morse-Funktion auf M .*

BEWEIS. Da M kompakt ist, existiert ein endlicher Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$ von M . Wir wählen eine der Überdeckung $\{U_i\}_i$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\lambda_i\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$, s. Proposition 3.4.6.

Wir definieren

$$\Phi: \mathbb{R}^n \times M \rightarrow TM^\vee: (\alpha_{j,i}, p) \mapsto df(p) + \sum_{j,i \in \{1, \dots, n\}} \alpha_{j,i} d(\lambda_j x_j^i)(p).$$

Hierbei sind x_j^i die Koordinatenfunktionen der Karte $(U_j, \phi_j = (x_j^1, \dots, x_j^n))$ und f ist eine beliebige glatte Abbildung. Die Abbildung Φ ist transversal zum Nullschnitt von $TM^\vee$: für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Kartenumgebung U_j , so dass $\lambda_j \neq 0$. Durch geeignete Wahl von $\alpha_{j,i}$ können wir dann alle Vektoren von $T_p M^\vee$ als Linearkombinationen der $d(\lambda_j x_j^i)(p)$ darstellen. Der Transversalitätssatz 5.4.8 sagt nun, dass die Menge der Parameter $\alpha = (\alpha_{j,i})$, für die Φ_α transversal zum Nullschnitt des Kotangentenbündels ist, dicht in $\mathbb{R}^{rn}$ ist. Wir können also beliebig kleine Parameter $\alpha = (\alpha_{j,i})$ wählen, so dass $f + \sum \alpha_{j,i} \lambda_j x_j^i$ eine Morse-Funktion ist. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 5.6.15 (Satz von Reeb). (*)

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand, und sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion mit genau zwei nicht-ausgearteten kritischen Punkten. Dann ist M homöomorph zur n -Sphäre.

ÜBUNGSAUFGABE 5.6.16. (*) *Geben Sie eine Morse-Funktion auf $\mathbb{RP}^2$, die genau drei kritische Punkte hat.*

5.7. Satz von Frobenius

Wir diskutieren noch kurz eine höherdimensionale Verallgemeinerung von Integralkurven und Vektorfeldern, die konkret auch für die Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungssystemen erster Ordnung benutzt werden kann.

Für glatte Abbildungen $g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ betrachten wir das System von partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= h(x, y, z) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= g(x, y, z).\end{aligned}$$

Eine Lösung $z = f(x, y)$ des Systems definiert eine Fläche

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Alternativ können wir die Fläche durch

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3: (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$$

parametrisieren. Der Tangentialraum an Σ für einen Punkt $F(x, y)$ wird von den Vektoren $dF\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und $dF\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ aufgespannt. Wir berechnen für eine glatte Abbildung $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned}dF\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi \circ F) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(F(x, y)) \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(F(x, y)) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial z}(F(x, y)) \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(F(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z}(F(x, y)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)|_{F(x, y)} \phi\end{aligned}$$

Dabei haben wir neben der erkennbaren Kettenregel benutzt, dass $z = f(x, y)$ eine Lösung des PDE-Systems ist, insbesondere ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h(x, y, f(x, y))$. Wir können eine analoge Rechnung für $dF\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ durchführen. Die Schlussfolgerung ist, dass für eine Lösung des Differentialgleichungssystems $z = f(x, y)$ die Vektorfelder $X = \frac{\partial}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial z}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial z}$ eine Basis des Tangentialraums an S bilden. Dies ist eine höher-dimensionale Variante der Aussage, dass die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{du}{dx} = F(x, u)$$

Integralkurven für das Vektorfeld $X = \frac{\partial}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial z}$ liefert.

Im Abschnitt zu Vektorfeldern und Integralkurven hatten wir mit der Lösungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen gesehen, dass glatte Vektorfelder auch immer zumindest lokal Integralkurven haben. Wir können uns nun auch hier fragen: Gegeben ein lineares PDE-System erster Ordnung wie oben, können wir eine Lösung finden? In der eben durchgeführten Betrachtung lieferte die Lösung $z = f(x, y)$ eine Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, deren Tangentialraum von den zum PDE-System gehörenden Vektorfeldern aufgespannt wurde. Mit dem inversen Funktionen-Satz 5.2.1 können wir dann natürlich auch von der Untermannigfaltigkeit zur Lösung zurückkommen. Die Frage ist also, ob wir von der Vektorfeldern zum PDE-System auch zur Untermannigfaltigkeit kommen können. Der Satz von

Frobenius gibt hier ein genaues Kriterium, für das wir ein paar allgemeinere Begriffe formulieren wollen.

DEFINITION 5.7.1. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Distribution von Rang k ist ein Rang k Untervektorbündel des Tangentialbündels. Konkreter ist eine Distribution dadurch gegeben, dass wir für jeden Punkt $p \in M$ einen k -dimensionalen Untervektorraum $V_p \subset T_p M$ festlegen, so dass für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung U und linear unabhängige Vektorfelder $X_1, \dots, X_k$ auf U existieren, so dass für alle $q \in U$ gilt $V_q = \text{span}\langle X_1|_q, \dots, X_k|_q \rangle$.*

BEMERKUNG 5.7.2. *Die Distributionen hier haben nichts mit den Distributionen zu tun, die sonst in der Analysis als Verallgemeinerungen von Funktionen benutzt werden.*

Später können wir diese Unterräume auch als Verschwindungsräume von Differentialformen auffassen.

DEFINITION 5.7.3. *Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Eine k -dimensionale Blätterung von M ist eine Zerlegung von M als disjunkte Vereinigung¹ von zusammenhängenden k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten B_α , $\alpha \in I$, den Blättern, so dass für jeden Punkt eine Karte $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ um p existiert, so dass für jedes Blatt B_α die Menge $B_\alpha \cap U$ durch Gleichungen $x^{k+1} = \text{const}, \dots, x^n = \text{const}$ gegeben ist.*

ÜBUNGSAUFGABE 5.7.4. *Sei M eine geblätterte Mannigfaltigkeit, d.h. eine Mannigfaltigkeit mit einer k -dimensionalen Blätterung. Zeigen Sie, dass die Tangentialräume an die Blätter eine Rang k Distribution bilden.*

Mit diesen beiden Begriffen können wir jetzt das PDE-Problem wieder aufgreifen. Aus dem PDE-System haben wir zugehörige Vektorfelder. Wenn die Koeffizienten des PDE-Systems glatt sind und wir der Einfachheit annehmen, dass die zugehörigen Vektorfelder linear unabhängig sind, dann bilden die von den Vektorfeldern aufgespannten Untervektorräume des Tangentialraums an $\mathbb{R}^3$ eine Distribution. Wenn wir das System mit Anfangsbedingungen lösen können, dann bilden die zugehörigen Mannigfaltigkeiten, die durch die Lösungen parametrisiert werden, eine Blätterung. Wir können die Frage nach der Lösbarkeit des Gleichungssystems also umformulieren: Wann kommt eine Distribution von einer Blätterung?

Wir können die relevante Bedingung bereits in unserem Beispiel sehen: Für eine glatte Lösung $z = f(x, y)$ des Systems, haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = h(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y).$$

Wir können dann weitere Ableitungen bilden und finden eine notwendige Lösungsbedingung aus dem Satz von Schwarz:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Wir erinnern uns, dass das Vertauschen von partiellen Ableitungen etwas mit der Lie-Klammer zu tun hatte. Genauer können wir die Bedingung umschreiben:

$$[X, Y] = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Die notwendige Bedingung ist also, dass $[X, Y] = 0$ gilt. Dies ist schon fast die richtige Bedingung, es geht aber noch etwas allgemeiner:

¹Disjunkte Vereinigung hier als Menge, nicht mit Topologie!

DEFINITION 5.7.5. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $E \subset TM$ eine Distribution von Rang k . Dann heißt E integrabel oder involutiv, wenn für je zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ auf M , deren Werte immer in E liegen, auch die Lie-Klammer $[X, Y]$ immer Werte in E hat.

ÜBUNGSAUFGABE 5.7.6. (1) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ tangential zu S^2 sind:

$$X = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, Y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, Z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

(2) Berechnen Sie die Lie-Klammern $[X, Y]$, $[Y, Z]$ und $[Z, X]$ und zeigen Sie, dass diese Klammern wieder tangential zu S^2 sind.

ÜBUNGSAUFGABE 5.7.7. Gegeben seien die beiden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$:

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$$

Zeigen Sie, dass es keine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ geben kann, so dass X und Y tangential zu S sind.

Der Satz von Frobenius gibt nun das genaue Kriterium, wann eine Distribution von einer Blätterung herkommt:

SATZ 5.7.8 (Satz von Clebsch, Deahna, Frobenius). Sei M eine Mannigfaltigkeit und E eine Distribution von Rang k . Dann ist E genau dann integrabel, wenn es eine Blätterung von M gibt, so dass die Distribution genau durch die Tangentialräume der Blätter gegeben ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.7.9. Zeigen Sie die einfache Richtung des Satzes: Wenn es eine Blätterung gibt, dann ist die zugehörige Distribution der Tangentialräume an die Blätter integrabel.

Die zwei wesentlichen Zutaten für die komplizierte Richtung des Satzes sind die folgenden: Wenn die Distribution die Integrabilitätsbedingung erfüllt, dann können wir lokal eine Basis von kommutierenden Vektorfeldern finden. Das ist im Prinzip lineare Algebra: wir nehmen irgendeine Basis von Vektorfeldern, die nicht notwendig kommutieren und invertieren die Matrix, deren Einträge durch die Kommutatoren gegeben sind, um kommutierende Vektorfelder zu erhalten. Die zweite wesentliche Zutat ist, dass wir für kommutierende Vektorfelder auch immer lokal Koordinaten x^i finden können, so dass die Vektorfelder einfach durch $\frac{\partial}{\partial x^i}$ gegeben sind. Das wollen wir aber hier jetzt nicht mehr im Detail diskutieren. Die Lektion ist aber, dass auch ganz konkrete Fragen nach Lösungen von PDE-Systemen zu interessanten, wenn auch eventuell etwas abstrakten, geometrischen Konzepten führen können. Die Differentialtopologie und Differentialgeometrie sind voll davon.

KAPITEL 6

Differentialformen

In diesem Kapitel geht es um Differentialformen. Das erste Beispiel einer Differentialform ist das Differential df einer glatten Funktion $f \in C^\infty(M)$. Wie bereits diskutiert, können wir df als Linearform auf Tangentialräumen oder besser als Schnitt des Kotangentialbündels betrachten. Differentialformen sind dann alternierende Multilinearformen auf Tangentialräumen; in Bündelformulierung sind glatte Differentialformen von Grad k glatte Schnitte von äußeren Potenzen des Kotangentialbündels: $\Omega^k(M) = \Gamma(M, \bigwedge^k TM^\vee)$. Die wesentlichen Operationen mit Differentialformen sind das Dachprodukt und die äußere Ableitung d , die das Differential von glatten Funktionen auf k -Formen verallgemeinert. Die äußere Ableitung führt zum De-Rham-Komplex, der Analysis und Topologie von Mannigfaltigkeiten verbindet.

6.1. Multilineare Algebra

Wir wiederholen die relevanten Aussagen aus LAII. Alle Vektorräume sind $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

Für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V mit Basis $e_1, \dots, e_n$ haben wir den Dualraum $V^\vee = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ mit der dualen Basis $\alpha^1, \dots, \alpha^n$, die durch $\alpha^i(e_j) = \delta_j^i$ charakterisiert ist. Anders gesagt, gilt $\alpha^i(v) = v^i$ für einen Vektor $v = \sum v^i e_i$.

Für zwei $\mathbb{R}$ -Vektorräume V und W klassifiziert das Tensorprodukt bilineare Abbildungen auf $V \times W$: Für jede bilineare Abbildung $f: V \times W \rightarrow U$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $V \otimes W \rightarrow U$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \longrightarrow & V \otimes W \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & U \end{array}$$

Allgemeiner klassifiziert das Tensorprodukt $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ für Vektorräume $V_1, \dots, V_n$ die multilinearen/ n -linearen Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow U$, d.h. die Abbildungen, die linear in jedem der n Argumente sind.

Für einen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V haben wir die *Tensoralgebra* $T^\bullet(V) = \bigoplus_{i \geq 0} V^{\otimes i}$, wobei $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ gesetzt wird. Die einzelnen $T^i(V) = V^{\otimes i}$ sind $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Mit der Multiplikation

$$V^{\otimes i} \times V^{\otimes j} \rightarrow V^{\otimes i+j}: (v_1 \otimes \dots \otimes v_i, w_1 \otimes \dots \otimes w_j) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_j$$

wird $T^\bullet(V)$ zu einer graduierten assoziativen $\mathbb{R}$ -Algebra.

In $T^n(V)$ betrachten wir den Untervektorraum

$$\mathcal{I}^n(V) = \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mid \exists 1 \leq i < j \leq n : v_i = v_j \rangle \subseteq T^n(V).$$

Wir definieren die *äußere Algebra*

$$\bigwedge^\bullet V = \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge^n V, \quad \bigwedge^n V = T^n(V) / \mathcal{I}^n(V).$$

Da $\mathcal{I}^\bullet(V)$ in $T^\bullet(V)$ ein zweiseitiges Ideal ist, induziert die Multiplikation der Tensoralgebra eine Multiplikation auf der äußeren Algebra.

Es gibt eine andere Beschreibung der äußeren Algebra. Auf $T^n(V) = V^{\otimes n}$ wirkt die symmetrische Gruppe Σ_n durch vertauschen der Tensorfaktoren, d.h. $\sigma \in \Sigma_n$ wirkt auf einem Elementartensor $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ durch

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}.$$

Wir nennen ein Element $a \in T^n(V)$ *alternierend*, wenn $\sigma(a) = \text{sgn}(\sigma) \cdot a$ für alle $\sigma \in \Sigma_n$ gilt. Wir bezeichnen mit $\text{Alt}^n(V) \subseteq T^n(V)$ den Untervektorraum der alternierenden Tensoren in $T^n(V)$.

Es gibt eine Antisymmetrisierungsabbildung

$$\text{Alt}: T^n(V) \rightarrow \text{Alt}^n(V): v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn}(\sigma) (v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}).$$

Die einzelnen Vektorräume $\text{Alt}^n(V)$ von alternierenden n -Tensoren können dann zu einer assoziativen $\mathbb{R}$ -Algebra zusammengefasst werden, deren Multiplikation durch die folgende Vorschrift gegeben ist:

$$\text{Alt}^i(V) \times \text{Alt}^j(V) \rightarrow \text{Alt}^{i+j}(V): (a, b) \mapsto a \wedge b = \frac{(i+j)!}{i!j!} \text{Alt}(a \otimes b).$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.1.1. Zeigen Sie: Die Komposition

$$\text{Alt}^\bullet(V) \rightarrow T^\bullet(V) \rightarrow \bigwedge^\bullet(V)$$

ist ein Isomorphismus von Algebren.

ÜBUNGSAUFGABE 6.1.2. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

- (1) Für zwei Elemente $a \in \text{Alt}^i(V)$ und $b \in \text{Alt}^j(V)$ gilt $a \wedge b = (-1)^{ij} b \wedge a$.
- (2) Für eine Basis $e_1, \dots, e_n$ von V ist $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$ eine Basis von $\bigwedge^k(V)$. Insbesondere ist $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{\dim V}{k}$ und $\dim \bigwedge^\bullet(V) = 2^{\dim V}$.

DEFINITION 6.1.3. Eine Multilinearform $f: V^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt symmetrisch, wenn für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ gilt $f(v_1, \dots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$.

Eine Multilinearform $f: V^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt alternierend, wenn für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ gilt $f(v_1, \dots, v_n) = \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$.

BEMERKUNG 6.1.4. Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V können wir dann die alternierenden k -Multilinearformen auf V mit $\text{Alt}^k(V^\vee)$ identifizieren. Wie oben erhalten wir dann eine assoziative graduiert-kommutative Algebra $\text{Alt}^\bullet(V^\vee)$. Das Dachprodukt für alternierende Multilinearformen $f \in \text{Alt}^p(V^\vee)$ und $g \in \text{Alt}^q(V^\vee)$ ist dann wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} & (f \wedge g)(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}) \\ &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

BEISPIEL 6.1.5. (1) Ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

(2) Die Determinante von $(n \times n)$ -Matrizen, aufgefasst als Abbildung

$$\det: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$$

auf dem Raum der Spaltenvektoren ist eine alternierende multilineare Abbildung.

(3) Das Kreuzprodukt $- \times -: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: (v, w) \mapsto v \times w$ ist alternierend.

(4) Für zwei lineare Abbildungen $f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Dachprodukt

$$f \wedge g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}: (u, v) \mapsto f(u)g(v) - f(v)g(u).$$

□

BEMERKUNG 6.1.6. Für die Anwendung auf Mannigfaltigkeiten, Vektorbündel und Differentialformen benötigen wir noch eine kurze Bemerkung zur Funktorialität. Für eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ von endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorräumen haben wir einen induzierten Homomorphismus der Vektorräume von alternierenden Multilinearformen $\text{Alt}^p(f^\vee): \text{Alt}^p(W^\vee) \rightarrow \text{Alt}^p(V^\vee)$. Diese induzierte Abbildung ist auch kompatibel mit dem Dachprodukt, so dass wir auch einen Homomorphismus der äußeren Algebren $\bigwedge^\bullet f^\vee: \bigwedge^\bullet W^\vee \rightarrow \bigwedge^\bullet V^\vee$ erhalten. Diese Zuordnungen sind funktoriell, wir erhalten also Funktoren $\text{Alt}^k: \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$; zusammengefasst ist $\text{Alt}^\bullet$ ein Funktor von der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume in die Kategorie der assoziativen graduert-kommutativen Algebren.

DEFINITION 6.1.7. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Für einen Vektor $v \in V$ definieren wir das innere Produkt (auch Kontraktion) mit v durch

$$i_v: \bigwedge^k V^\vee \rightarrow \bigwedge^{k-1} V^\vee: \beta \mapsto (i_v \beta)(v_2, \dots, v_k) := \beta(v, v_2, \dots, v_k)$$

wobei $v_2, \dots, v_k \in V$. Im Spezialfall $k = 1$ ist das innere Produkt mit v genau die Auswertungsabbildung für Linearformen, und per Konvention setzen wir $i_v \beta = 0$ für $\beta \in \bigwedge^0 V^\vee$.

ÜBUNGSAUFGABE 6.1.8. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $v \in V$ ein Vektor und $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^\vee$ Linearformen auf V . Zeigen Sie

$$i_v(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha^i(v) \alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \dots \wedge \alpha^k,$$

wobei wie üblich die Notation $\widehat{\alpha^i}$ bedeutet, dass der Faktor α^i im Dachprodukt weggelassen wird.

ÜBUNGSAUFGABE 6.1.9. Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $0 \neq \omega \in \text{Alt}^n(V)$ eine alternierende n -Form. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $v \mapsto \omega(v, -)$ einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\cong} \text{Alt}^{n-1} V^\vee$ induziert. Wie hängt der Isomorphismus von ω ab?

ÜBUNGSAUFGABE 6.1.10. (1) Auf dem $\mathbb{R}^3$ sei die alternierende Bilinearform ω durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir bezeichnen mit δ^i die zu e_i duale Basis des $\mathbb{R}^3$. Schreiben Sie ω als Linearkombination der Basisvektoren $\delta^i \wedge \delta^j$.

(2) Berechnen Sie den Wert von $\delta^1 \wedge \delta^3$ auf $v_1 = (2, 4, 5)$ und $v_2 = (-1, 0, 3)$.

ÜBUNGSAUFGABE 6.1.11. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Form $\phi \in \text{Alt}^q(V^\vee)$ heißt zerlegbar, wenn es Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in V^\vee$ gibt, so dass $\phi = \lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_q$ gilt.

(1) Zeigen Sie, dass für $\dim V \leq 3$ jede alternierende Multilinearform zerlegbar ist.

(2) Geben Sie im Fall $\dim V = 4$ eine nicht zerlegbare alternierende Multilinearform an.

6.2. Differentialformen

Definitionen und Beispiele. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M haben wir das Tangentialbündel $TM \rightarrow M$ und das dazu duale *Kotangentialbündel* $TM^\vee \rightarrow M$. Nach Bemerkung 6.1.6 können wir nun die Bündel-Konstruktionen aus Beispiel 4.5.12 anwenden, um die Bündel

$$\bigwedge^k TM^\vee \rightarrow M$$

zu erhalten. Die Faser des Bündels $\bigwedge^k(M)$ an einem Punkt $p \in M$ ist die k -te äußere Potenz $\bigwedge^k T_p M^\vee$ des Kotangentialraums am Punkt p .

DEFINITION 6.2.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge. Eine glatte Differentialform vom Grad k auf U (kurz: k -Form auf U) ist ein glatter Schnitt von $\bigwedge^k TM^\vee \rightarrow M$ über U . Der Vektorraum der k -Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet.

BEMERKUNG 6.2.2. Für eine gegebene Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ haben wir die Differentiale $dx^i|_p$ als Basis des Kotangentialraums $T_p U^\vee$. Damit bilden dann die Dachprodukte $dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ eine Basis des Raums der k -Formen $\bigwedge^k T_p U^\vee$ am Punkt p . Eine glatte k -Form auf U läßt sich dann in den durch die Karte gegebenen Koordinaten als

$$\omega = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \#I=k} a_I dx^I$$

schreiben, wobei für eine gegebene Indexmenge $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ das relevante Dachprodukt als $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ geschrieben wird, und die Koeffizienten a_I glatte Funktionen auf U sind.

BEISPIEL 6.2.3. Der einfachste Spezialfall ist $\Omega^0(U)$. Wegen $\bigwedge^0 T_p U^\vee \cong \mathbb{R}$ sind die 0-Formen einfach reell-wertige Funktionen auf U .

Der nächste Spezialfall einer Differentialform ist das Differential df einer Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Für einen Punkt $p \in M$ ordnet das Differential jedem Tangentialvektor $v \in T_p M$ eine reelle Zahl zu – den Wert der Richtungsableitung von f in Richtung des Tangentialvektors v . Diese Zuordnung ist linear, d.h. wir können das Differential als Schnitt des Kotangentialbündels, also als 1-Form auffassen. Wie in Beispiel 4.6.3 können wir das Differential df in den Koordinaten einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ darstellen:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

□

BEISPIEL 6.2.4. Für eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist das Kotangentialbündel $TM^\vee$ eine $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, und die Projektionsabbildung $\pi: TM^\vee \rightarrow M$ ist eine glatte Abbildung. Auf $TM^\vee$ existiert eine 1-Form λ , die wie folgt definiert ist. Ein Punkt $\omega_p \in TM^\vee$ ist eine Linearform $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum für einen Punkt $p \in M$. Für einen Tangentialvektor X_{ω_p} am Punkt ω_p ist das Bild $d\pi(X_{\omega_p})$ von X_{ω_p} unter dem Differential $d\pi: T_{\omega_p}(TM^\vee) \rightarrow T_p M$ ein Tangentialvektor am Punkt p . Dann können wir die Linearform ω_p auf dem Tangentialvektor $d\pi(X_{\omega_p})$ auswerten und erhalten eine glatte 1-Form:

$$\lambda(X_{\omega_p}) = \omega_p(d\pi(X_{\omega_p}))$$

Diese Form heißt Liouville-Form (oder Poincaré-Form), und ist das symplektische Potential für die symplektische Struktur des Kotangentialbündels. Diese 1-Form

(und ihre äußere Ableitung als symplektische Form) spielt eine wichtige Rolle in der Formulierung der klassischen Mechanik mittels symplektischer Mannigfaltigkeiten. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.5. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ haben wir euklidische Koordinaten x, y und Polarkoordinaten r, θ . Entsprechend haben wir für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ zwei Basen für den Kotangentenraum $(T_p^* \mathbb{R}^2)^\vee$: dx, dy und $dr, d\theta$. Die Koordinatentransformation von Polar- zu euklidischen Koordinaten ist durch $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$ gegeben. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix für den Übergang von Polar- zu euklidischen Koordinaten.

Differentialformen und Vektorfelder. Eine glatte 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ liefert eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$: für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten wir eine Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}$, indem wir am Punkt $p \in M$ die Linearform $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Tangentialvektor X_p auswerten. Dies liefert eine Abbildung

$$\Omega^1(M) \rightarrow \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)),$$

die wegen $\omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_p)$ auch $C^\infty(M)$ -linear ist.

Die Glattheit der Auswertungsabbildung impliziert bereits, dass die 1-Form glatt ist. (Dafür müssen wir über allgemeinere 1-Formen reden, die wir lokal in einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ als $\omega = \sum a_i dx^i$ schreiben, wobei die a_i nicht notwendigerweise glatte Abbildungen sind. Alternativ können wir über stetige 1-Formen als stetige Schnitte des Kotangentialbündels sprechen.)

LEMMA 6.2.6. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine 1-Form ω auf M ist genau dann glatt, wenn für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Auswertung $\omega(X)$ eine glatte Funktion auf M ist.

BEWEIS. ($\Rightarrow$) Sei $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte für M . Wir schreiben $\omega \in \Omega^1(M)$ als $\omega = \sum a_i dx^i$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ als $X = \sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ mit $a_i, b^j \in C^\infty(U)$. Dann ist

$$\omega(X) = \left(\sum a_i dx^i \right) \left(\sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum a_i b^j \delta_j^i = \sum a_i b^i$$

eine glatte Funktion auf U .

($\Leftarrow$) Sei ω eine (nicht notwendigerweise glatte) 1-Form auf M , so dass für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Auswertung $\omega(X)$ glatt auf M ist. In einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ schreiben wir $\omega = \sum a_i dx^i$, wobei die a_i a priori irgendwelche Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{R}$ sind. Für $1 \leq j \leq n$ benutzen wir Übung 4.6.17, um das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x^j}$ zu einem Vektorfeld X auf M auszudehnen, so dass es eine offene Umgebung $V(p, j)$ von p in U gibt mit $X|_{V(p, j)} = \frac{\partial}{\partial x^j}|_{V(p, j)}$. Auf dieser offenen Menge ist dann

$$\omega(X) = \left(\sum a_i dx^i \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = a_j.$$

Auf der offenen Umgebung $V = \bigcap_j V(p, j)$ von p sind dann alle a_j glatt, d.h., die 1-Form ω ist auf V glatt. Die Behauptung folgt. $\square$

Analog zu Satz 4.6.16 können wir dann die 1-Formen als $C^\infty(M)$ -Dual zu $\mathfrak{X}(M)$ identifizieren.

PROPOSITION 6.2.7. Die natürliche Abbildung

$$\Omega^1(M) \rightarrow \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$$

ist ein Isomorphismus von $C^\infty(M)$ -Moduln.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung injektiv ist; wir nehmen also an, dass $\omega \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form ist, die die Nullabbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ induziert. Sei $v \in T_p M$ ein beliebiger Vektor. Eine Variation zu Übungsaufgabe 4.6.17 zeigt, dass ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ existiert, für das $X_p = v$ ist. Insbesondere ist, nach Voraussetzung, $\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ die Nullabbildung. Nach Voraussetzung gilt dies auch für jeden Punkt $p \in M$, also ist $\omega = 0$.

Für die Surjektivität betrachten wir eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung $\alpha: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$.

(1) Wir zeigen zuerst, dass für eine offene Menge $U \subseteq M$ und ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X|_U \equiv 0$ auch $\alpha(X)|_U \equiv 0$ gilt. Mit Proposition 3.4.3 können wir eine Abbildung $f \in C^\infty(M)$ wählen, die an einem Punkt $p \in U$ verschwindet und auf $M \setminus U$ identisch 1 ist. Dann gilt $fX = X$ und $\alpha(X) = \alpha(fX) = f\alpha(X)$, woraus $\alpha(X)(p) = f(p)\alpha(X)(p) = 0$ folgt. Dies kann für alle Punkte $p \in U$ gemacht werden, woraus die Behauptung folgt.

(2) Wir konstruieren eine kanonische Abbildung

$$\alpha|_U \in \text{Hom}_{C^\infty(U)}(\mathfrak{X}(U), C^\infty(U)),$$

für die $\alpha|_U(X|_U) = \alpha(X)|_U$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt. Für $Y \in \mathfrak{X}(U)$ und $p \in U$ definieren wir $\alpha|_U(Y)(p)$ wie folgt: wir wählen mit Proposition 3.4.3 eine Funktion $f \in C^\infty(M)$, für die $f \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung $V \subseteq U$ von p und $f|_{M \setminus U} \equiv 0$ gilt. Dann kann fY als Vektorfeld durch 0 auf M fortgesetzt werden, und $fY|_V = Y_V$. Wir definieren $\alpha|_U(Y)(p) = \alpha(fY)(p)$. Aus Schritt (1) folgt, dass das wohldefiniert ist und nicht von der Wahl von V bzw. f abhängt.

(3) Aus Schritt (2) folgt, dass $\alpha(X)(p)$ nur von X_p abhängt: für eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ haben wir eine Wahl von Basen $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ für die Tangentialräume $T_p M$ für $p \in U$ und können ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ als $X|_U = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ schreiben. Dann ist

$$\alpha(X)(p) = \alpha|_U(X|_U)(p) = \sum_{i=1}^n a^i(p) \alpha|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) (p)$$

und das hängt nur von den Koordinaten $a^i(p)$ von X_p ab.

(4) Wir können nun ein Urbild für $\alpha \in \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ konstruieren. Für einen Punkt $p \in M$ und einen Tangentialvektor $v \in T_p M$ können wir (wie in Schritt (1)) ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ finden, für das $X_p = v$ gilt. Dann definieren wir

$$\omega_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}: v \mapsto \alpha(X)(p).$$

Nach Schritt (3) hängt $\alpha(X)(p)$ nur von $X_p = v$ ab, also ist ω_p wohldefiniert. Nach Lemma 6.2.6 ist die 1-Form ω glatt. $\square$

BEMERKUNG 6.2.8. *Ein zentraler Schritt im obigen Beweis ist die Aussage, dass für $\alpha \in \text{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$ der Wert $\alpha(X)(p)$ nur von X_p abhängt. Dies ist tatsächlich äquivalent zur $C^\infty(M)$ -Linearität – dadurch können die Funktionen aus Proposition 3.4.3 eingesetzt werden, um lokal definierte Vektorfelder auf ganz M auszudehnen. Ähnliche Argumente waren auch im Beweis von Satz 4.6.16 wichtig.*

Allgemeiner können Differentialformen als multilineare Formen auf Vektorfeldern angesehen werden. Für eine k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$ haben wir k -multilineare Abbildungen $\omega_p: \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_k \rightarrow \mathbb{R}$. Insbesondere können wir eine k -Form

auf k Vektorfeldern auswerten:

$$\omega: \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_k \rightarrow C^\infty(M): (X_1, \dots, X_k) \mapsto (p \mapsto \omega_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p)).$$

Da die Abbildungen ω_p Multilinearformen sind, gilt für eine glatte k -Form $\omega \in \Omega^k(M)$, Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$:

$$\omega(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_k) = f\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k).$$

Eine k -Form liefert also eine $C^\infty(M)$ -multilineare Abbildung

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_k \rightarrow C^\infty(M).$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.9. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von p . Für eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(U)$ existiert eine Differentialform $\tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$ und eine offene Umgebung $V \subseteq U$ von p , so dass $\omega|_V = \tilde{\omega}|_V$ gilt.

Dachprodukt. Die Algebrenstruktur der äußeren Algebra $\bigwedge^\bullet V$ induziert eine Algebrenstruktur auf Differentialformen. Das Dachprodukt $\alpha \wedge \beta$ für zwei Formen $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^l(M)$ ist punktweise durch $(\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p$ für $p \in M$ definiert.

PROPOSITION 6.2.10. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M ist das Dachprodukt von zwei glatten Formen wieder eine glatte Form, d.h. wir haben eine Abbildung

$$\wedge: \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M).$$

BEWEIS. In einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ schreiben wir $\alpha = \sum a_I dx^I$ und $\beta = \sum b_J dx^J$ für $a_I, b_J \in C^\infty(U)$. Das Dachprodukt ist

$$\alpha \wedge \beta = \left(\sum a_I dx^I \right) \wedge \left(\sum b_J dx^J \right) = \sum a_I b_J dx^I \wedge dx^J.$$

Wenn $I \cap J \neq \emptyset$, dann ist $dx^I \wedge dx^J = 0$; für $I \cap J = \emptyset$ ist $dx^I \wedge dx^J = \pm dx^{I \cup J}$, und das Vorzeichen hängt davon ab, wie viele Vertauschungen vorgenommen werden müssen, um aus I, J eine aufsteigende Sequenz K von Indizes zu machen. In jedem Fall können wir schreiben

$$\alpha \wedge \beta = \sum_K \left(\sum_{I \cup J = K, I \cap J = \emptyset} \pm a_I b_J \right) dx^K.$$

Alle Koeffizienten sind glatt, und die Behauptung folgt. $\square$

BEMERKUNG 6.2.11. Die Algebra $(\Omega^\bullet(M), \wedge)$ der Differentialformen ist assoziativ und graduiert-kommutativ, d.h. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$ für $\alpha \in \Omega^i(M)$ und $\beta \in \Omega^j(M)$.

PROPOSITION 6.2.12. Sei $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte für eine glatte Mannigfaltigkeit, und seien $f^1, \dots, f^k \in C^\infty(U)$. Dann ist

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^k = \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} \frac{\partial(f^1, \dots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial(f^{i_1}, \dots, f^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} = \det \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_{\alpha, \beta}$ für die Indexmengen $I = (i_1 < \dots < i_k)$ und $J = (j_1 < \dots < j_k)$.

BEWEIS. Wir schreiben die Differentialform als

$$df^1 \wedge \dots \wedge df^k = \sum c_J dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k},$$

und wir müssen die Koeffizienten c_J bestimmen. Um die Aussage zu beweisen, werten wir beide Seiten auf k -Tupeln von Vektorfeldern $\frac{\partial}{\partial x^j}$ aus:

$$\begin{aligned} df^1 \wedge \cdots \wedge df^k \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) &= \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_j}} \right) = \frac{\partial(f^1, \dots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})} \\ \sum c_J dx^J \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) &= \sum c_J \delta_I^J = c_I \end{aligned}$$

□

Insbesondere erhalten wir die Transformationsformel für Differentialformen: für zwei Karten $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ einer glatten Mannigfaltigkeit und eine Indexmenge $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ haben wir

$$dy^J = \sum_{I=\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}} \frac{\partial(y^{j_1}, \dots, y^{j_k})}{\partial(x^{i_1}, \dots, x^{i_k})} dx^I$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.13. Auf dem $\mathbb{R}^3$ haben wir die euklidischen Koordinaten x, y, z und die Kugelkoordinaten r, ϕ, θ , die durch die Transformationsformeln $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ und $z = r \cos \theta$ verbunden sind. Für einen Punkt $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ haben wir entsprechend zwei Erzeuger $dx \wedge dy \wedge dz$ und $dr \wedge d\phi \wedge d\theta$ für den 1-dimensionalen Vektorraum $\bigwedge^3(T_p \mathbb{R}^3)^\vee$. Berechnen Sie den skalaren Faktor λ , so dass $dx \wedge dy \wedge dz = \lambda dr \wedge d\phi \wedge d\theta$.

Pullback. Für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ haben wir für jeden Punkt $p \in M$ das Differential $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ als lineare Abbildung. Das Dual dieser Abbildung ist eine lineare Abbildung

$$df^\vee: T_{f(p)} N^\vee \rightarrow T_p M^\vee$$

zwischen den Kotangententialräumen.

DEFINITION 6.2.14. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Die vom Dual $df^\vee: T_{f(p)} N^\vee \rightarrow T_p M^\vee$ des Differentials induzierte Abbildung

$$f^*: \Omega^1(N) = \Gamma(N, TN^\vee) \rightarrow \Gamma(M, TM^\vee) = \Omega^1(M)$$

heißt Pullback/Rückzug von k -Formen.

PROPOSITION 6.2.15. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung.

- (1) Der Rückzug einer glatten 1-Form ist wieder eine glatte 1-Form.
- (2) Der Rückzug von Funktionen $f^*: C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$, s. Notation 3.3.6, induziert eine $C^\infty(N)$ -Modulstruktur auf $C^\infty(M)$. Bezüglich dieser Modulstruktur ist der Rückzug von 1-Formen linear.

BEWEIS. (1) Wir wählen eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^m)$ um $p \in M$ und eine Karte $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^n)$ um $f(p) \in N$ mit $f(U) \subseteq V$. Auf V können wir eine 1-Form als $\omega = \sum_i a_i dy^i$ schreiben. Der Rückzug ist dann

$$\begin{aligned} f^* \omega &= \sum_i (f^* a_i) f^*(dy^i) \\ &= \sum_i (f^* a_i) d(f^* y^i) \\ &= \sum_i (a_i \circ f) d(y^i \circ f) = \sum_i (a_i \circ f) \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind glatt, also ist die 1-Form $f^* \omega$ glatt auf U .

(2) Übungsaufgabe.

□

BEMERKUNG 6.2.16. Sei $i: M \hookrightarrow N$ eine Immersion. Als Spezialfall des Rückzugs von Differentialformen können wir Formen von N auf M einschränken.

BEISPIEL 6.2.17. Auf dem Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ haben wir das Vektorfeld

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Die dazu duale 1-Form ist $\omega = -ydx + xdy$. Dies kann z.B. auf $\mathbb{R}^2$ nachgerechnet werden, wo dx, dy die zu $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ duale Basis des Kotangentenraums ist. Die Behauptung für S^1 ergibt sich dann durch Einschränkung entlang der Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. $\square$

BEMERKUNG 6.2.18. Eine Bemerkung zur Stellung der Indizes: In der Differentialgeometrie ist es üblich, Vektoren in einem Vektorraum mit unteren Indizes zu schreiben (z.B. die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$) und Linearformen im Dualraum mit oberen Indizes. Angewendet auf Tangential- und Differentialformenbündel werden dann auch Vektorfelder mit unteren Indizes geschrieben (z.B. ∂_i als Kurzform für $\frac{\partial}{\partial x_i}$), Differentialformen mit oberen Indizes (wie dx^i).

Für Koeffizienten in Linearkombinationen ergibt sich dann folgende Konvention: für einen Tangentialvektor $v = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ erhalten die Koeffizienten obere Indizes, da sie tatsächlich aus Linearformen extrahiert werden können, nämlich als Werte von dx^i . Analog schreiben wir die Koeffizienten für Linearformen mit unteren Indizes $\omega = \sum a_i dx^i$.

Diese Konvention hat den Vorteil, dass auf zwei Seiten einer Gleichung immer obere und untere Indizes zusammenpassen müssen. Daran kann man Kovarianz und Kontravarianz von Tensorfeldern ablesen und erhält eine elementare Probe der Sinnhaftigkeit von Gleichungen. Eine Weiterentwicklung dieser Indexkonvention ist die Einsteinsche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produkts wird summiert, wenn ein Index als oberer und der andere Index als unterer Index auftritt. Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ kann dann als $x^i y_i$ geschrieben werden: ausformuliert haben wir die Summe über alle $i = 1, \dots, n$ der Auswertungen der Linearform x^i auf dem Vektor y_i .

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.19. Wir bezeichnen mit r^1, r^2 und r^3 die Einschränkung der Standardkoordinaten von $\mathbb{R}^3$ auf S^2 . Aus Dimensionsgründen sind die Formen dr^1, dr^2 und dr^3 überall linear abhängig. Bestimmen Sie die Relation.

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.20. Sei $\omega = xdy - ydx$ die Volumenform auf S^1 , und

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1: t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

die Standardparametrisierung. Zeigen Sie, dass in $\Omega^1(\mathbb{R})$ gilt $\pi^*\omega = dt$.

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.21. Sei

$$f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}: (f, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi).$$

Berechnen Sie

$$f^* \left(\frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx \right), \text{ und } f^*(x dx + y dy).$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.22. Sei $\alpha = xdy - ydx + zdt - t dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von α auf $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ für keinen Punkt $p \in S^3$ die Nullform auf $T_p S^3$ ist.

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.23. Sei $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ eine surjektive Submersion. Zeigen Sie, dass der Pullback von Differentialformen $\pi^*: \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(\tilde{M})$ injektiv ist.

6.3. Äußere Ableitung

Die äußere Ableitung ist eine höherdimensionale Verallgemeinerung des Differentials, durch die wir k -Formen “ableiten” können.

DEFINITION 6.3.1. Eine äußere Ableitung auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $D: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$, für die gilt

(1) D ist eine Antiderivation, d.h. für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^l(M)$ gilt

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (D\beta),$$

(2) $D \circ D = 0$,

(3) für eine glatte Funktion f und ein glattes Vektorfeld X auf M gilt

$$(Df)(X) = Xf.$$

BEMERKUNG 6.3.2. Die letzte Bedingung impliziert insbesondere, dass für $f \in \Omega^0(M)$ gilt $Df = df$, d.h. die äußere Ableitung von glatten Funktionen ist das Differential.

Wir zeigen zuerst die lokale Existenz und Eindeutigkeit.

PROPOSITION 6.3.3. Sei $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte für eine glatte Mannigfaltigkeit M . Dann ist die äußere Ableitung für eine k -Form $\omega = \sum a_I dx^I \in \Omega^k(U)$ eindeutig definiert durch:

$$D\omega = \sum_I da_I \wedge dx^I = \sum_I \left(\sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^I \in \Omega^{k+1}(U).$$

BEWEIS. Die Eindeutigkeit sehen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} D\omega &= \sum (Da_I) \wedge dx^I + \sum a_I Ddx^I \\ &= \sum (Da_I) \wedge dx^I \\ &= \sum_I \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I. \end{aligned}$$

Dabei ist die erste Gleichheit die Antiderivationseigenschaft, die zweite Gleichheit folgt aus $Dx^j = dx^j$ und $D^2 = 0$, und die letzte Gleichheit auch wieder aus der Identifikation $Da_I = da_I$.

Für die Existenz benutzen wir die obige Formel als Definition, und müssen zeigen, dass die Eigenschaften erfüllt sind. Dabei ist (3) (die Identifikation von D und d) klar.

(1) Die Definition ist offensichtlich linear, also können wir annehmen, dass die beiden Formen durch $\alpha = f dx^I$ und $\beta = g dx^J$ gegeben sind. Dann ist

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg dx^I \wedge dx^J) \\ &= \sum \frac{\partial(fg)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} g dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J + \sum f \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I \wedge g dx^J + (-1)^k \sum f dx^I \wedge \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

(2) Es reicht, $d^2\omega = 0$ für $\omega = f dx^I$ zu zeigen.

$$\begin{aligned} d^2(f dx^I) &= d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I\right) \\ &= \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \end{aligned}$$

Die Terme mit $i = j$ verschwinden wegen $dx^i \wedge dx^i = 0$, die Terme mit $i \neq j$ sind heben sich weg:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^i \wedge dx^j = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i. \quad \square$$

PROPOSITION 6.3.4. *Sei D eine Antiderivation auf $\Omega^\bullet(M)$, und sei $\omega \in \Omega^k(M)$ eine glatte k -Form. Sei $U \subseteq M$ eine offene Menge mit $\omega \equiv 0$ auf U . Dann gilt $D\omega \equiv 0$ auf U .*

BEWEIS. Sei $p \in U$, wir zeigen $(D\omega)_p = 0$. Nach Proposition 3.4.3 existiert eine Funktion f mit $\text{supp } f \subset U$ und eine Umgebung V von p in U , so dass $f|_V \equiv 1$. Dann gilt $f\omega \equiv 0$ auf M und wir haben

$$0 = D(0) = D(f\omega) = (Df) \wedge \omega + (-1)^0 f \wedge (D\omega).$$

Am Punkt p verschwindet der erste Term wegen $\omega_p = 0$, und $f(p) = 1$ impliziert $(D\omega)_p = 0$. $\square$

BEMERKUNG 6.3.5. *Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen lokale Operatoren, vgl. auch Satz 4.6.16 und Proposition 6.2.7.*

Jetzt können wir die globale Existenz und Eindeutigkeit zeigen:

SATZ 6.3.6. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine eindeutig bestimmte äußere Ableitung $d: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(M)$.*

BEWEIS. Für die Existenz geben wir eine Konstruktion an. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k -Form und $p \in M$ ein Punkt. Wir wählen eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ um p ; in dieser Karte haben wir eine eindeutige äußere Ableitung nach Proposition 6.3.3. Wir müssen also noch die Unabhängigkeit von der Karte zeigen. Dies folgt aber auch aus der Eindeutigkeit der äußeren Ableitung auf $U \cap V$ für zwei Karten U und V in Proposition 6.3.3. Damit haben wir eine äußere Ableitung definiert, nach dem Existenzteil von Proposition 6.3.3.

Für die globale Eindeutigkeit auf $\Omega^0(M)$ sorgt die Eigenschaft (3) in Definition 6.3.1. Für ein Dachprodukt haben wir

$$\begin{aligned} D(df^1 \wedge \dots \wedge df^k) &= D(Df^1 \wedge \dots \wedge Df^k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} Df^1 \wedge \dots \wedge DDf^i \wedge \dots \wedge Df^k = 0. \end{aligned}$$

Sei nun $\omega \in \Omega^k(M)$ eine beliebige k -Form und $p \in M$. Wir wählen eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ um p und schreiben $\omega = \sum a_I dx^I$ auf U . Mit Proposition 3.4.4 können wir $a_I, x^1, \dots, x^n$ zu glatten Funktionen $\tilde{a}_I, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n$ auf ganz M ausdehnen. Wir erhalten eine Form $\tilde{\omega} = \sum \tilde{a}_I d\tilde{x}^I \in \Omega^k(M)$ und eine offene Menge $V \subseteq U$

mit $\omega|_V \equiv \tilde{\omega}|_V$. Nach Proposition 6.3.4 ist $D\omega = D\tilde{\omega}$ auf V und wir erhalten

$$\begin{aligned} (D\omega)_p = (D\tilde{\omega})_p &= \left(D \sum \tilde{a}_I d\tilde{x}^I \right)_p \\ &= \left(\sum D\tilde{a}_I \wedge d\tilde{x}^I + \sum \tilde{a}_I \wedge Dd\tilde{x}^I \right)_p \\ &= \left(\sum d\tilde{a}_I \wedge d\tilde{x}^I \right)_p \\ &= \left(\sum da_I \wedge dx^I \right)_p = (d\omega)_p. \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 6.3.7. Für die Form $\omega = f dx + g dy$ auf $\mathbb{R}^2$ ist

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

□

Wir kehren noch einmal zur Diskussion von Pullbacks zurück.

DEFINITION 6.3.8. Für eine lineare Abbildung von Vektorräumen $f: V \rightarrow W$ haben wir induzierte lineare Abbildungen $\bigwedge^k f: \bigwedge^k V \rightarrow \bigwedge^k W$. Für eine glatte Abbildung $f: M \rightarrow N$ haben wir dann für jeden Punkt $p \in M$ die vom Dual des Differentials $df^\vee: T_{f(p)}N^\vee \rightarrow T_pM^\vee$ induzierten Abbildungen

$$\bigwedge^k T_{f(p)}N^\vee \rightarrow \bigwedge^k T_pM^\vee$$

Wenn wir Elemente von $\bigwedge^k T_{f(p)}N^\vee$ als k -Multilinearformen auf $T_{f(p)}N$ interpretieren, ordnet der Pullback einer solchen Multilinearform die Auswertung auf $f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)$ für Tangentialvektoren $v_1, \dots, v_k \in T_pM$ zu.

PROPOSITION 6.3.9. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung.

(1) Die Abbildung aus Definition 6.3.8 induziert eine Abbildung

$$f^*: \Omega^k(N) = \Gamma(N, TN^\vee) \rightarrow \Gamma(M, TM^\vee) = \Omega^k(M).$$

(2) Die Abbildung aus (1) ist $C^\infty(N)$ -linear und verträglich mit dem Dachprodukt, d.h. ein Homomorphismus von $C^\infty(N)$ -Algebren.

(3) Die Abbildung aus (1) ist verträglich mit dem Differential, d.h. für $\omega \in \Omega^k(N)$ gilt $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

BEWEIS. (2): Übungsaufgabe.

Wir zeigen zuerst (3). Dafür benutzen wir bereits die Notation f^* , punktweise definiert wie in Definition 6.3.8, und setzen noch nicht voraus, dass diese Definition auch eine glatte Form in $\Omega^k(M)$ liefert.

Wir beginnen mit dem Fall $k = 0$, $\omega \in \Omega^0(M)$ ist einfach eine glatte Funktion. Es reicht zu zeigen, dass für jeden Punkt $p \in M$ und jeden Tangentialvektor $X_p \in T_pM$ gilt $(f^*d\omega)_p(X_p) = (df^*\omega)_p(X_p)$. Nach Definition haben wir

$$(f^*d\omega)_p(X_p) = (d\omega)_{f(p)}(f_*X_p) = (f_*X_p)(\omega) = X_p(\omega \circ f)$$

und $(df^*\omega)_p(X_p) = X_p(f^*\omega) = X_p(\omega \circ f)$, woraus die Behauptung folgt.

Auch für die Fälle $k \geq 1$ müssen wir die Aussage nur für den Tangentialraum an einem beliebigen Punkt $p \in M$ nachrechnen. Wir wählen eine Karte $(V, y^1, \dots, y^n)$ um den Punkt $f(p) \in N$ und schreiben $\omega = \sum a_I dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$ für glatte Funktionen $a_I \in C^\infty(V)$ und $I = (i_1 < \dots < i_k)$. Nach (2) ist

$$f^*\omega = \sum (f^*a_I)(f^*dy^{i_1}) \wedge \dots \wedge (f^*dy^{i_k}).$$

Aus dem Fall $k = 0$ haben wir $f^*dy^i = df^i =: df^i$, also

$$df^*\omega = \sum d(f^*a_I) \wedge df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k}.$$

Für die andere Seite der Gleichung haben wir, auch wieder unter Benutzung des Falles $k = 0$

$$\begin{aligned} f^*\omega &= f^*\left(\sum da_I \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) \\ &= \sum f^*da_I \wedge f^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*dy^{i_k} \\ &= \sum df^*a_I \wedge df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k} \end{aligned}$$

Damit ist (3) bewiesen.

(1) Jetzt können wir (3) benutzen, um die Glattheit für (1) zu zeigen. Dafür müssen wir zeigen, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung hat, auf der $f^*\omega$ glatt ist. Wir wählen eine Karte $(V, y^1, \dots, y^n)$ um $f(p)$ und eine Karte $(U, x^1, \dots, x^m)$ um p mit $f(U) \subseteq V$. Wir schreiben $\omega = \sum a_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$ für glatte Funktionen $a_I \in C^\infty(V)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum (f^*a_I)(f^*dy^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*dy^{i_k}) \\ &= \sum (f^*a_I)df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k} \\ &= \sum (f^*a_I)df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k} \\ &= \sum (f^*a_I) \frac{\partial(f^{i_1}, \dots, f^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} dx^J. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir (2) und (3) und die Notation $\frac{\partial(f^{i_1}, \dots, f^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} = \det \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_{\alpha, \beta}$ für die Indexmengen $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ und $J = (j_1 < \cdots < j_k)$. Die Koeffizienten der Form sind glatt, daraus folgt die Behauptung. $\square$

BEMERKUNG 6.3.10. Zusammenfassung: $M \mapsto \Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{i=0}^{\dim M} \Omega^i(M)$ ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildungen in die Kategorie der differentiell-graduierten $\mathbb{R}$ -Algebren, und ein Modul über dem Funktor $M \mapsto C^\infty(M)$.

ÜBUNGSAUFGABE 6.3.11. Berechnen Sie die äußere Ableitung folgender Funktionen und Differentialformen auf $\mathbb{R}^3$:

- $f = xyz$
- $g = ye^x$
- $\omega_1 = e^x \cos(y)dx + e^x \sin(y)dy$
- $\omega_2 = yzdx + zxdy + xydz$
- $\omega_3 = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$.
- $\omega_4 = \sin(-x^3 + y^2)dx \wedge dy \wedge dz$

ÜBUNGSAUFGABE 6.3.12. Gegeben seien folgende Differentialformen auf $\mathbb{R}^3$:

- $\phi = xdx - ydy$
- $\psi = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz$
- $\theta = xyzdy$.

Berechnen Sie $\phi \wedge \psi$, $d\phi$, $d\psi$, $d\theta$, $d\theta \wedge \phi$.

ÜBUNGSAUFGABE 6.3.13. Sei M eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass für die äußere Ableitung $d\lambda$ der Liouville-Form aus Beispiel 6.2.4 an allen Punkten $y \in TM^\vee$ gilt $(d\lambda)^{\wedge n}|_y \neq 0$. (Das bedeutet, dass $d\lambda$ eine symplektische Form ist, und TM mit $d\lambda$ eine symplektische Mannigfaltigkeit.)

DEFINITION 6.3.14. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Dann erhalten wir durch punktweises Anwenden des inneren Produkt ein inneres Produkt/Kontraktion mit X

$$i_X: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M): \omega \mapsto (i_X \omega)(X_2, \dots, X_k) := \omega(X, X_2, \dots, X_k).$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.3.15. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $v \in V$. Zeigen Sie, dass das innere Produkt $i_v: \bigwedge^\bullet V^\vee \rightarrow \bigwedge^{\bullet-1} V^\vee$ die folgenden Eigenschaften erfüllt und durch diese eindeutig bestimmt ist:

- (1) i_v ist eine Antiderivation von Grad -1 , d.h. für $\beta \in \bigwedge^k V^\vee$ und $\gamma \in \bigwedge^l V^\vee$ gilt $i_v(\beta \wedge \gamma) = (i_v \beta) \wedge \gamma + (-1)^k \beta \wedge i_v \gamma$.
- (2) $i_v \circ i_v = 0$.
- (3) Für eine Linearform $\alpha \in V^\vee$ ist $i_v(\alpha) = \alpha(v)$.

Damit folgt, dass Kontraktion mit einem Vektorfeld eine Antiderivation

$$i_X: \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^{\bullet-1}(M)$$

von Grad 1 mit $i_X \circ i_X = 0$ ist, die auf 1-Formen mit der Auswertungsabbildung $\text{ev}: \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow C^\infty(M): (X, \alpha) \mapsto \alpha(X)$ übereinstimmt. Die Kontraktion mit einem Vektorfeld ist dadurch eindeutig bestimmt.

ÜBUNGSAUFGABE 6.3.16. Sei $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ und $\alpha = dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Kontraktion $i_X \alpha$.

6.4. De-Rham-Komplex

DEFINITION 6.4.1. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^k(M)$ eine k -Form.

- (1) ω heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$ gilt.
- (2) ω heißt exakt, wenn es eine $(k-1)$ -Form β mit $d\beta = \omega$ gibt.

BEMERKUNG 6.4.2. Exakte 1-Formen sind also genau die Differentiale von glatten Funktionen. Aus physikalischer Motivation heraus heißt die Form β auch Potential für α ; das Potential ist nur bis auf geschlossene Formen eindeutig bestimmt.

DEFINITION 6.4.3. Ein Komplex (von Vektorräumen) besteht aus einer Folge $\{C^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von Vektorräumen und linearen Abbildungen $\partial_i: C^i \rightarrow C^{i+1}$, für die $\partial_{i+1} \circ \partial_i = 0$ gilt:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i-2}} C^{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C^i \xrightarrow{\partial_i} C^{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} \dots$$

Wir definieren die Kohomologievektorräume des Komplexes

$$H^i(C^\bullet) := \ker \partial_i / \text{Im } \partial_{i-1}$$

BEMERKUNG 6.4.4. Wegen $\partial_i \circ \partial_{i-1} = 0$ gilt $\text{Im } \partial_{i-1} \subseteq \ker \partial_i$. Die Kohomologie misst den Unterschied zwischen $\text{Im } \partial_{i-1}$ und $\ker \partial_i$. Ein Komplex heißt exakt, wenn alle Kohomologieräume verschwinden; exakte Sequenzen (evtl. aus LAII) sind Beispiele für exakte Komplexe.

DEFINITION 6.4.5. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M definieren wir den De-Rham-Komplex:

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Die Kohomologie des De-Rham-Komplexes heißt De-Rham-Kohomologie:

$$H_{\text{dR}}^i(M) := H^i(\Omega^\bullet(M), d).$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.4.6. Sei $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i dx^i$ eine geschlossene Form auf $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die Funktion

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n) = & \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, \dots, x_n) dt + \int_0^{x_2} f_2(0, t, x_3, \dots, x_n) dt + \dots \\ & \dots + \int_0^{x_3} f_3(0, 0, t, x_4, \dots, x_n) + \int_0^{x_n} f_n(0, \dots, 0, t) dt. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $dg = \alpha$.

Integration auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir nun als Verallgemeinerung der Mehrfachintegrale aus der Analysis-Vorlesung allgemein auf n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten das Integral für n -Formen definieren. Wie immer soll dabei in Karten die Definition aus der Analysis-Vorlesung benutzt und dann auf geeignete Weise auf der Mannigfaltigkeit zusammengeklebt werden. Mit den Transformationsformeln für Mehrfachintegrale können wir zumindest bis auf Vorzeichen verstehen, was bei Kartenwechseln passiert. Um global auf der Mannigfaltigkeit ein wohldefiniertes Integral zu erhalten, müssen wir uns auf Mannigfaltigkeiten einschränken, für die wir einen Atlas finden können, dessen Kartenwechsel positive Jacobi-Determinante haben. Für solche orientierbaren n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten können wir dann n -Formen mit kompaktem Träger integrieren. Ein zentraler Satz hier ist der Satz von Stokes, der den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und einige weitere Integralsätze aus der Analysis 2 verallgemeinert.

7.1. Orientierung

DEFINITION 7.1.1. Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf angeordneten Basen von V durch

$$v = [v_1, \dots, v_n] \sim w = [w_1, \dots, w_n] \iff \exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : v = Aw, \det A > 0,$$

d.h. zwei angeordnete Basen sind äquivalent, wenn die zugehörige Basiswechselmatrix positive Determinante hat. Eine Orientierung auf V ist eine Äquivalenzklasse von angeordneten Basen für die Äquivalenzrelation $\sim$. Ein Vektorraum mit gegebener Orientierung heißt orientiert.

Für zwei orientierte Vektorräume V und W heißt eine lineare Abbildung $\phi: V \rightarrow W$ orientierungserhaltend, wenn die darstellende Matrix für ϕ (bezüglich angeordneter Basen, die die gewählten Orientierungen induzieren) positive Determinante hat. Andernfalls heißt ϕ orientierungsumkehrend.

Die Orientierung, die durch die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ induziert wird, heißt Standardorientierung.

BEMERKUNG 7.1.2. Jeder $\mathbb{R}$ -Vektorraum von Dimension $n \geq 1$ hat genau zwei Orientierungen. Dies entspricht genau den zwei Zusammenhangskomponenten von $\bigwedge^n V \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wenn wir eine angeordnete Basis $[v_1, \dots, v_n]$ auf $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ schicken.

Alternativ können wir Orientierungen mittels n -Formen definieren: der Raum der alternierenden n -Multilinearformen $\bigwedge^n V^\vee$ ist eindimensional. Für eine n -Form $0 \neq \alpha \in \bigwedge^n V^\vee$ und zwei angeordnete Basen $v = [v_1, \dots, v_n]$ und $w = [w_1, \dots, w_n]$ haben $\alpha(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$ und $\alpha(w_1 \wedge \dots \wedge w_n)$ das gleiche Vorzeichen, wenn die Basiswechselmatrix A mit $v = Aw$ positive Determinante hat. Die Wahl einer nicht ausgearteten n -Form ist also gleichbedeutend mit der Wahl einer Orientierung auf V , und zwei n -Formen definieren die gleiche Orientierung, wenn sie sich um einen positiven skalaren Faktor unterscheiden.

DEFINITION 7.1.3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi: E \rightarrow M$ ein glattes Vektorbündel von Rang n . Eine punktweise Orientierung von $\pi: E \rightarrow M$ ist die Wahl einer Orientierung der Faser E_p für jeden Punkt $p \in M$. Eine punktweise Orientierung heißt stetig, wenn es eine lokale Trivialisierung $\psi: E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$ gibt, so dass die induzierten Abbildungen $\psi_*: E_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist. (Dabei wird $\mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung ausgestattet.)

Wenn eine stetige Orientierung von $\pi: E \rightarrow M$ existiert, heißt das Vektorbündel orientierbar.

Eine glatte Mannigfaltigkeit heißt orientierbar, wenn das Tangentialbündel TM orientierbar ist. Eine Orientierung von M ist eine Orientierung von TM . Ein Diffeomorphismus $f: M \rightarrow N$ heißt orientierungserhaltend, wenn für jeden Punkt $p \in M$ das Differential $T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ orientierungserhaltend ist.

- BEISPIEL 7.1.4. (1) Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist als Mannigfaltigkeit orientierbar. Die Standardorientierung ist durch $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ gegeben.
 (2) Die n -Sphäre S^n ist orientierbar.
 (3) Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.

□

PROPOSITION 7.1.5. Eine zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit M hat genau zwei Orientierungen.

BEWEIS. Zwei Orientierungen μ und ν von M induzieren für jeden Punkt $p \in M$ Orientierungen μ_p und ν_p von $T_p M$. Wir definieren $f: M \rightarrow \{\pm 1\}$ durch $f(p) = 1$, wenn $\mu_p = \nu_p$ und $f(p) = -1$ wenn $\mu_p = -\nu_p$. Die Stetigkeit der Orientierungen bedeutet, dass für $p \in M$ eine offene Umgebung U von p und Vektorfelder $(X_1, \dots, X_n)$ und $(Y_1, \dots, Y_n)$ auf U existieren, die die Orientierungen $\mu|_U$ bzw. $\nu|_U$ induzieren. Dann existiert eine stetige Abbildung $A = (a_j^i)_{i,j}: U \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $Y_j = \sum a_j^i X_i$. Die Funktion f stimmt dann auf U mit dem Vorzeichen von $\det A$ überein. Damit ist $f: M \rightarrow \{\pm 1\}$ lokal konstant. Da M zusammenhängend ist, ist f konstant, und es gilt $\mu = \pm \nu$. □

LEMMA 7.1.6. Eine punktweise Orientierung (induziert durch eventuell nicht-stetige Rahmen $(X_1, \dots, X_n)$) von M ist genau dann stetig, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Koordinatenumgebung $(U, x^1, \dots, x^n)$ hat, so dass die Abbildung $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n)$ überall positiv ist.

BEWEIS. Eine punktweise Orientierung einer Mannigfaltigkeit M ist genau dann stetig, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U hat, auf der Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$ existieren, so dass $(X_1, \dots, X_n)$ an jedem Punkt $q \in U$ die gewählte Orientierung induziert. Für eine zusammenhängende Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ existiert dann eine Abbildung $A = (a_j^i)_{i,j}: U \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $X_j = \sum_i a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dann ist

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) = \det(a_j^i) \neq 0$$

auf ganz U . Da U zusammenhängend ist, ist $\det(a_j^i)$ entweder positiv oder negativ auf ganz U ; im letzteren Fall ändern wir die Koordinate x^1 in $-x^1$ ab. Dies zeigt die Äquivalenz. □

SATZ 7.1.7. Eine n -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn es eine glatte nirgends-verschwindende n -Form auf M gibt.

BEWEIS. Wenn M orientierbar ist, gibt es nach Lemma 7.1.6 um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ und Vektorfelder $(X_1, \dots, X_n)$, die die Orientierung induzieren, so dass gilt $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Aus diesen Karten

wählen wir $\{(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$, so dass $M = \bigcup U_\alpha$. Sei $\{\rho_\alpha\}$ eine glatte Zerlegung der Eins zu dieser Überdeckung. Durch $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$ wird eine glatte nirgends-verschwindende n -Form auf M definiert.

Umgekehrt können wir für eine nirgends-verschwindende glatte n -Form ω an jedem Punkt $p \in M$ eine orientierte Basis $(X_{1,p}, \dots, X_{n,p})$ wählen, für die

$$\omega(X_{1,p}, \dots, X_{n,p}) > 0$$

gilt. Für eine zusammenhängende Kartenumgebung $(U, x^1, \dots, x^n)$ von p ist dann $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, wobei f entweder überall positiv oder überall negativ auf U ist. Für $f > 0$ ist $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$, für $f < 0$ ist $(d(-x^1) \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Nach Lemma 7.1.6, ist dann die entsprechende Orientierung stetig. $\square$

DEFINITION 7.1.8. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M heißt ein glatter Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ orientiert, wenn für je zwei Karten $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ die Jacobi-Determinante $\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{i,j}$ überall auf $U \cap V$ positiv ist.

SATZ 7.1.9. Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es einen orientierten Atlas gibt.

BEWEIS. Wir nehmen an, dass M orientiert ist, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Kartenumgebung $(U, x^1, \dots, x^n)$ und Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$, die die Orientierung auf U induzieren, so dass gilt $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Für zwei solche Kartenumgebungen $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ ist

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Da sowohl die Vektorfelder $(X_1, \dots, X_n)$ als auch die Vektorfelder $(Y_1, \dots, Y_n)$ die Orientierung induzieren, gilt $(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$ und $(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Also ist $\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) > 0$ auf $U \cap V$ und wir haben einen orientierten Atlas.

Umgekehrt sei $(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ ein orientierter Atlas. Für jeden Punkt $p \in M$ induziert $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine angeordnete Basis von $T_p M$. Für zwei Karten $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ aus dem Atlas ist $\det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) > 0$ auf $U \cap V$, so dass wir durch $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine wohldefinierte stetige Orientierung erhalten. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.10. Seien M und N zwei orientierbare Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass das Produkt $M \times N$ orientierbar ist.

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.11. Sei M eine Mannigfaltigkeit, die sich mit zwei offenen Karten U und V so überdecken läßt, dass $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass M orientierbar ist.

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.12. Zeigen Sie, dass S^n orientierbar ist: Für einen Punkt $p \in S^n$ identifizieren wir den Tangentialraum von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ an p mit $p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben ist, s. Übungsaufgabe 4.4.13. Zeigen Sie, dass eine Orientierung auf S^n dadurch gegeben ist, dass eine angeordnete Basis $[v_1, \dots, v_n]$ von $T_p S^n$ orientiert ist, wenn $[p, v_1, \dots, v_n]$ eine orientierte Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.13. Für welche n ist $S^n \rightarrow S^n: p \mapsto -p$ orientierungserhaltend?

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.14. Sei G eine Lie-Gruppe von Dimension n . Zeigen Sie, dass es eine links-invariante nicht-triviale n -Form auf G gibt. Insbesondere ist eine Liegruppe G orientierbar.

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.15. Wenn zwei der Bündel $\pi: E \rightarrow M$, $\pi': E' \rightarrow M$ und $\pi \oplus \pi': E \oplus E' \rightarrow M$ orientierbar sind, dann auch das dritte.

PROPOSITION 7.1.16. Sei M eine orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und $p \in \partial M$. Sei X ein glattes nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M . Wir definieren die induzierte Orientierung auf ∂M wie folgt: für einen Punkt $p \in M$ wird die Orientierung induziert durch eine angeordnete Basis $(v_1, \dots, v_{n-1})$ von $T_p(\partial M)$, für die die angeordnete Basis $(X_p, v_1, \dots, v_{n-1})$ von $T_p M$ die Orientierung von M induziert.

Wenn ω die Orientierungsform auf M ist, dann ist die Orientierungsform auf ∂M durch $\omega(X, -, \dots, -)$ gegeben.

7.2. Integration

Zur Erinnerung: Sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf einem abgeschlossenen n -dimensionalen Quader $A = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n] \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist. Eine Partitionierung P eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ ist eine Folge $P = (p_0, \dots, p_n)$ von reellen Zahlen mit $a = p_0 < p_1 < \dots < p_n = b$. Eine solche Partitionierung P der Intervalle $[a^i, b^i]$ in Teilintervalle liefert eine Unterteilung von A in kleinere n -dimensionale Quader A_j . Für eine solche Einteilung können wir Unter- und Obersumme definieren

$$US(f, P) = \sum_{A_j} (\inf_{A_j} f) \operatorname{vol} A_j, \quad OS(f, P) = \sum_{A_j} (\sup_{A_j} f) \operatorname{vol} A_j$$

Dabei ist das Volumen des n -dimensionalen Quaders $A = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ durch

$$\operatorname{vol}(A) = \prod_{i=1}^n (b^i - a^i)$$

gegeben. Es gilt $US(f, P) \leq OS(f, P)$.

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.1. Zeigen Sie, dass für eine Verfeinerung P' der Partitionierung P gilt $US(f, P) \leq US(f, P')$ und $OS(f, P') \leq OS(f, P)$. Insbesondere gilt

$$\sup_P US(f, P) \leq \inf_P OS(f, P).$$

DEFINITION 7.2.2. Die Funktion heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\sup_P US(f, P) = \inf_P OS(f, P).$$

Der gemeinsame Wert heißt Riemann-Integral von f über A und wird mit

$$\int_A f(x) dx^1 \cdots dx^n$$

bezeichnet.

BEMERKUNG 7.2.3. Die Definition des Riemann-Integrals setzt implizit eine Wahl von Koordinaten voraus. Die zentrale Information für eine allgemeiner Definition des Integrals auf Mannigfaltigkeiten ist das Volumen $\operatorname{vol}(A)$ der n -dimensionalen Quader. Diese Information werden wir aus der zu integrierenden n -Form erhalten.

Für eine beliebige beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ können wir eine beschränkte Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ durch 0 zu einer Funktion $\tilde{f}: B \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen n -dimensionalen Quader $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \supset A$ fortsetzen und

$$\int_A f(x) dx^1 \cdots dx^n := \int_B \tilde{f}(x) dx^1 \cdots dx^n$$

definieren, wenn die rechte Seite existiert.

SATZ 7.2.4 (Lebesgue). Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen der erweiterten Funktion $\tilde{f}$ eine Nullmenge ist.

BEMERKUNG 7.2.5. Insbesondere gilt: für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist f auf U Riemann-integrierbar.

DEFINITION 7.2.6. Für gewählte Koordinaten $x^1, \dots, x^n$ auf $\mathbb{R}^n$ und eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir eine n -Form $\omega \in \Omega^n(U)$ immer als $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ mit einer eindeutigen glatten Funktion $f \in C^\infty(U)$ schreiben. Wenn die Funktion f Riemann-integrierbar auf $A \subset U$ ist, definieren wir

$$\int_A \omega = \int_A f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n := \int_A f(x) dx^1 \dots dx^n.$$

Diese Definition ist invariant unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen (also in gewissem Maße unabhängig von der Wahl der Koordinaten): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Insbesondere sind U und $\phi(U)$ offene Teilmengen mit unterschiedlichen Wahlen von Koordinatenfunktionen $(x^1, \dots, x^n)$ und $(y^1, \dots, y^n)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_V \phi^* \omega &= \int_V (\phi^* f) \phi^* dy^1 \wedge \dots \wedge \phi^* dy^n \\ &= \int_V (f \circ \phi) d(y^1 \circ \phi) \wedge \dots \wedge d(y^n \circ \phi) \\ &= \int_V (f \circ \phi) \det(J(\phi)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \int_V (f \circ \phi) \det(J(\phi)) dx^1 \dots dx^n, \end{aligned}$$

wobei $J(\phi)$ die Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j}\right)$ bezeichnet. Bis auf das Vorzeichen der Jacobi-Determinante ist das genau die Transformationsformel für das Riemann-Integral. Insbesondere ist das Integral invariant unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen (für die Jacobi-Determinante dann nach Definition positiv ist).

DEFINITION 7.2.7. Sei M eine glatte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem orientierten Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, und sei $\omega \in \Omega_c^n(M)$ eine glatte n -Form mit kompaktem Träger.

In einer Karte (U, ϕ) ist $(\phi^{-1})^*(\omega)$ eine n -Form mit kompaktem Träger auf $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ und wir definieren

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\omega).$$

Aufgrund der Invarianz des Integrals unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen ist dies wohldefiniert und unabhängig von der Wahl der Karte.

Wir wählen eine lokal endliche Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M durch Karten (U_α, ϕ_α) und eine glatte Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}$ zu dieser Überdeckung. Das Integral ist dann definiert als

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

BEMERKUNG 7.2.8. Die Summe ist endlich: ω hat kompakten Träger und an jedem Punkt sind nur endlich viele ρ_α von Null verschieden sind. Daraus folgt, dass insgesamt nur endlich viele $\rho_\alpha \omega$ verschieden von Null sind. Außerdem ist $\text{supp } \rho_\alpha \omega$ abgeschlossen, also kompakt in U_α , so dass $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$ definiert ist.

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte und der Zerlegung der Eins. Sei $\{V_\beta\}$ ein anderer orientierter Atlas mit zugehöriger Zerlegung der Eins $\{\chi_\beta\}$. Dann erhalten wir die verfeinerten Atlanten $\{(U_\alpha \cap V_\beta, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V_\beta})\}$ und $\{(U_\alpha \cap V_\beta, \psi_\alpha|_{U_\alpha \cap V_\beta})\}$ und rechnen

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sum_\beta \chi_\beta \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \chi_\beta \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V_\beta} \rho_\alpha \chi_\beta \omega.$$

Dabei benutzen wir die Eigenschaften der Zerlegung der Eins und die Additivität des Integrals. Analog ist

$$\sum_\beta \int_{V_\beta} \chi_\beta \omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V_\beta} \rho_\alpha \chi_\beta \omega,$$

also ist das Integral wohldefiniert.

BEMERKUNG 7.2.9. Die Definition des Integrals für n -Formen mit kompaktem Träger funktioniert genauso für orientierte Mannigfaltigkeiten mit Rand.

PROPOSITION 7.2.10. Sei M eine glatte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit, und sei $\omega \in \Omega_c^n(M)$ eine glatte n -Form mit kompaktem Träger. Wir bezeichnen mit $-M$ die Mannigfaltigkeit M mit der umgekehrten Orientierung. Dann gilt

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.11. Wir betrachten die 2-Form auf $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (z - x^2 - xy)dx \wedge dy - dy \wedge dz - dz \wedge dx.$$

Berechnen Sie $\int_D i^* \omega$, wobei i die folgende Inklusionsabbildung ist:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3.$$

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.12. Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Ellipse mit Hilfe der Transformationsformel für das Integral.

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.13. Berechnen Sie $\int_{S^2} \omega$ für $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy \in \Omega^2(S^2)$.

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.14. Wir betrachten die Form

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

(1) Zeigen Sie $d\omega = 0$.

(2) Berechnen Sie $\int_{S^2} \omega$. Dafür eignet sich die Parametrisierung in Kugelkoordinaten

$$\tau: [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3: (u, v) \mapsto (\sin u \cdot \cos v, \sin u \cdot \sin v, \cos u).$$

(3) Welche Rolle spielt ω für den Flächeninhalt von S^2 ?

(4) Was kann man mit Hilfe von ω über $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ sagen?

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.15. Seien M und N zwei orientierte Mannigfaltigkeiten von Dimension m und n . Für $\omega \in \Omega_c^m(M)$ und $\eta \in \Omega_c^n(N)$ definieren wir $\omega \wedge \eta := \text{pr}_1^*(\omega) \wedge \text{pr}_2^*(\eta) \in \Omega_c^{m+n}(M \times N)$. Für $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ sei $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definiert durch $g(x) := \int_N f(x, -) \eta$. Zeigen Sie

$$\int_{M \times N} f \cdot \omega \wedge \eta = \int_M g \cdot \omega.$$

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.16. (*) Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und V eine endlich-dimensionale Darstellung, d.h. ein endlich-dimensionaler (reeller) Vektorraum zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Zeigen Sie, dass es auf V ein G -invariantes Skalarprodukt gibt.

7.3. Satz von Stokes

SATZ 7.3.1. Sei M eine glatte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, sei ∂M der Rand mit der von M induzierten Orientierung. Für eine glatte $(n-1)$ -Form $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ mit kompaktem Träger gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Hierbei ist die rechte Seite nach Konvention 0, wenn $\partial M = \emptyset$.

BEWEIS. Wir betrachten zuerst den Fall $M = \mathbb{H}^n$ und führen dann den allgemeinen Fall über Karten auf diesen Fall zurück.

Für $M = \mathbb{H}^n$ ist $\partial M = \mathbb{R}^{n-1}$ und wir können eine $(n-1)$ -Form $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$ als

$$\omega = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} f_j dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n$$

schreiben, wobei f_j , $1 \leq j \leq n$ glatte Funktionen mit kompaktem Träger sind, und die Notation $\widehat{dx^j}$ bedeutet, dass dx^j im entsprechenden Dach-Produkt weggelassen wird. Die Einschränkung von ω auf $\partial \mathbb{H}^n$ ist dann

$$\omega|_{\partial M} = f_n|_{\partial M} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1},$$

und die äußere Ableitung von ω auf M ist

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Für $1 \leq j \leq n-1$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (und der Tatsache, dass f_j kompakten Träger hat)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^j \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^j} \cdots dx^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}^n} d\omega &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_n}{\partial x^n} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{-\infty}^\infty \cdots \int_{-\infty}^\infty \underbrace{f_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)}_{f_n|_M} dx^1 \cdots dx^{n-1} \\ &= \int_{\partial \mathbb{H}^n} \omega|_{\partial M} \end{aligned}$$

Wir wählen nun einen Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ für M , sodass alle U_α orientiert diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{H}^n$ sind. Dies ist möglich, da offene Kreisscheiben diffeomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind. Sei $\{\rho_\alpha\}$ eine glatte Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von

M . Wir haben bereits nachgerechnet, dass die Aussage vom Satz von Stokes in den Karten des Atlas gilt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\partial M} \rho_{\alpha} \omega = \sum_{\alpha} \int_{\partial U_{\alpha}} \rho_{\alpha} \omega \\ &= \sum_{\alpha} \int_{U_{\alpha}} d(\rho_{\alpha} \omega) = \sum_{\alpha} \int_M d(\rho_{\alpha} \omega) = \int_M d\left(\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega\right) \\ &= \int_M d\omega. \end{aligned}$$

Im ersten und letzten Schritt benutzen wir die Definition der Zerlegung der Eins, im zweiten und vorletzten Schritt, dass die Additivität des Integrals für die endliche Summe $\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \omega$. Im dritten und fünften Schritt benutzen wir, dass der Träger $\text{supp } \rho_{\alpha} \omega$ in U_{α} enthalten ist, und der zentrale vierte Schritt folgt aus dem obigen Spezialfall von Stokes für $\mathbb{H}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$. $\square$

Einige Integralsätze aus Analysis 1 und 2 sind Spezialfälle des Satzes von Stokes. Hier diskutieren wir nur den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Sätze von Green und Gauß diskutieren wir im nächsten Abschnitt.

BEISPIEL 7.3.2. *Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist der einfachste Spezialfall (und wurde ja auch für den Beweis von Satz 7.3.1 benutzt). Die Mannigfaltigkeit in diesem Fall ist $[a, b]$. Für eine glatte Abbildung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Stammfunktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ haben wir $dF = f dx$. Der Satz von Stokes sagt dann*

$$\int_{[a, b]} f dx = \int_{[a, b]} dF = \int_{\partial[a, b]} F = F(b) - F(a).$$

Hierbei kommen einige Randfälle zum Einsatz: eine zusammenhängende 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Punkt, und eine Orientierung darauf ist die Wahl eines Vorzeichens $+$ oder $-$. Das Integral einer glatten 0-Form (d.h., einer glatten Funktion) über die Mannigfaltigkeit $M = \text{pt}$ ist einfach der Funktionswert (für Orientierung $+$) bzw. das Negative des Funktionswerts (für Orientierung $-$). Im letzten Gleichheitszeichen kommt das Vorzeichen vor $F(a)$ dadurch zustande, dass wir auf $\partial[a, b] = \{a, b\}$ die induzierte Orientierung haben (dadurch hat $\{b\}$ die Orientierung $+$ und $\{a\}$ die Orientierung $-$). $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 7.3.3. Berechnen Sie das Integral von $\omega = (x - y^3)dx + x^3 dy$ entlang S^1 mit Hilfe des Satzes von Stokes.

7.4. Integration und De-Rham-Kohomologie

SATZ 7.4.1. *Sei M eine orientierte kompakte n -dimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Dann ist*

$$\int_M : H_{\text{dR}}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

eine wohl-definierte $\mathbb{R}$ -lineare Surjektion.

BEWEIS. Da $\Omega^{n+1}(M) = 0$ sind alle n -Formen geschlossen. Für eine exakte n -Form $\omega = d\eta$ gilt dann nach dem Satz von Stokes 7.3.1

$$\int_M \omega = \int_{\partial M} \eta = 0,$$

damit induziert das Integral eine wohldefinierte Abbildung $H_{\text{dR}}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Linearität ist klar. Für die Surjektivität reicht es, eine n -Form mit Integral ungleich 0 zu finden. Dafür können wir eine Karte $(U_{\alpha}, x^1, \dots, x^n)$ wählen, dann gibt es eine glatte Funktion f mit kompaktem Träger in U , die überall nicht-negativ ist und

irgendwo auch echt positive Werte annimmt. Die Form $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ kann dann durch 0 auf M ausgedehnt werden und erfüllt $\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f > 0$. $\square$

BEMERKUNG 7.4.2. *Allgemeiner kann Integration für k -Formen über singuläre k -Ketten (formale Linearkombination von k -Simplizes $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$) definiert werden. Dies liefert eine Paarung*

$$\int : H_k^{\text{sing}}(M, \mathbb{R}) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R} : (\sum n_i [\sigma_i], \omega) \mapsto \sum n_i \int_{\sigma_i} \omega$$

von De-Rham-Kohomologie mit singulärer Homologie mit reellen Koeffizienten (s. Vorlesung Topologie I). Der Satz von de Rham besagt, dass die zugehörige lineare Abbildung

$$H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_k^{\text{sing}}(M, \mathbb{R})^\vee$$

für alle k ein Isomorphismus ist. Dies bedeutet, dass man mit Differentialformen topologische Phänomene sehen kann, und dass andererseits die Analysis auf Mannigfaltigkeiten sehr stark von der Topologie der Mannigfaltigkeit bestimmt wird.

PROPOSITION 7.4.3 (Poincaré-Lemma). *Die Abbildung*

$$\text{pr}_1^* : H_{\text{dR}}^\bullet(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^\bullet(M \times \mathbb{R})$$

ist ein Isomorphismus.

KOROLLAR 7.4.4. *Für eine zusammenziehbare Mannigfaltigkeit M gilt*

$$H_{\text{dR}}^i(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für eine zusammenhängende, orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit M ohne Rand können wir durch Integration eine Paarung zwischen k -Formen und $(n - k)$ -Formen definieren:

$$\int_M : \Omega_c^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R} : \omega \otimes \eta \mapsto \int_M \omega \wedge \eta.$$

Wir benutzen hier k -Formen mit kompaktem Träger, damit das Integral definiert ist. Diese Paarung induziert eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$\Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)^\vee.$$

Nach dem Satz von Stokes haben wir für $\omega = d\gamma$, $\gamma \in \Omega_c^{k-1}(M)$ und $d\eta = 0$

$$\int_M \omega \wedge \eta = \int_M d(\gamma \wedge \eta) = 0.$$

Eine analoge Aussage gilt für ω geschlossen und η exakt. Damit erhalten wir eine induzierte Paarung

$$\int_M : H_{\text{dR},c}^k(M) \otimes H_{\text{dR}}^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

SATZ 7.4.5 (Poincaré-Dualität). *Sei M eine zusammenhängende kompakte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist die induzierte lineare Abbildung*

$$H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^{n-k}(M)^\vee$$

ein Isomorphismus für alle k .

Abbildungsgrad, Satz vom Igel

Differentialformenkalkül und Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

Am Schluss der Vorlesung wollen wir noch diskutieren, wie die in der Vorlesung diskutierten Konzepte mit den Aussagen aus den Analysis-Vorlesungen zusammenhängen. Insbesondere wollen wir den Zusammenhang zwischen dem Kalkül der Differentialformen und der Vektoranalysis sowie den Zusammenhang zwischen dem Satz von Stokes und den klassischen Integralsätzen klären. Dafür müssen wir auch kurz auf den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeiten eingehen, um insbesondere den Hodge-Stern-Operator und eine koordinatenfreie Version des Laplace-Operators definieren zu können. Zum Abschluss diskutieren wir noch kurz, wie einige relevante Differentialgleichungen aus der Physik mit Hilfe des Differentialformenkalküls formuliert werden können.

8.1. Skalarprodukte und Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Wir erinnern an ein paar Aussagen zu Skalarprodukten aus der Linearen Algebra. Ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$ -Vektorraum V induziert einen Isomorphismus

$$V \rightarrow V^\vee: v \mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle)$$

Auf den äußeren Potenzen gibt es dann ein induziertes Skalarprodukt

$$\bigwedge^k V \times \bigwedge^k V \rightarrow \mathbb{R}: \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_k, w_1 \wedge \cdots \wedge w_k \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

und daraus resultierend eine induzierte Identifikation $\bigwedge^k V \cong \bigwedge^k V^\vee$.

Für eine Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ von V ist $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ mit $i_1 < \cdots < i_k$ eine Orthonormalbasis für $\bigwedge^k V$. Der Betrag eines Vektors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \bigwedge^k V$ für dieses Skalarprodukt ist das Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren $v_1, \dots, v_k$ aufgespannt wird.

ÜBUNGSAUFGABE 8.1.1. *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeigen Sie, dass Dachprodukt und Kontraktion bezüglich des Skalarprodukts auf der äußeren Algebra adjungiert sind:*

$$\langle x \wedge v, w \rangle = \langle v, i_{\phi_x} w \rangle$$

wobei $x \in V, v \in \bigwedge^{k-1} V, w \in \bigwedge^k V$ und $\phi_x(y) = \langle x, y \rangle$ die zu x duale Linearform $\phi_x \in V^\vee$ ist.

DEFINITION 8.1.2. *Sei V ein orientierter n -dimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Dann hat $\bigwedge^n V$ einen ausgezeichneten Erzeuger $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, wobei $e_1, \dots, e_n$ eine orientierte Orthonormalbasis von V ist. Dieser Erzeuger liefert einen ausgezeichneten Isomorphismus*

$$\det: \bigwedge^n V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}: \omega \mapsto 1.$$

Dieser Isomorphismus ist ein ausgezeichneter Erzeuger von $\bigwedge^n V^\vee$ und wird als Volumenform bezeichnet.

DEFINITION 8.1.3. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik auf M ordnet jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ zu, so dass für eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ die Abbildungen

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle$$

glatt auf U sind. Die Metrik wird oft auch mit $g = (g_{ij})$ bezeichnet

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Mannigfaltigkeit M mit einer Riemannschen Metrik g .

BEISPIEL 8.1.4. Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eine Riemannsche Metrik. Das Skalarprodukt wird dabei vom Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ durch den kanonischen Isomorphismus $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ induziert. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 8.1.5. Zeigen Sie (mit Hilfe einer Zerlegung der Eins), dass auf jeder glatten Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik existiert.

BEMERKUNG 8.1.6. Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind der richtige Kontext für geometrische Fragestellungen (die relevanten Teilgebiete der Mathematik sind Differentialgeometrie bzw. Riemannsche Geometrie). Zum Beispiel können wir mit der Riemannschen Metrik die Länge $\|v\|$ von Tangentialvektoren $v \in T_p M$ definieren, und durch das bekannte Integral $\int_\gamma \|\dot{\gamma}\| dt$ auch die Länge einer Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow M$. Darüberhinaus gibt es verschiedene Krümmungsbegriffe auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die insbesondere in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielen.

All diese Aspekte werden in der Vorlesung nicht mehr diskutiert, wir benötigen hier nur die Identifikationen von Vektorfeldern und Differentialformen, die für die Spezialisierung des Differentialformenkalküls zur klassischen Vektoranalysis eine Rolle spielen.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann erhalten wir durch die Metrik g Identifikationen $TM \xrightarrow{\cong} TM^\vee$ bzw. $\bigwedge^k TM \xrightarrow{\cong} \Omega^k(M)$ sowie ein Skalarprodukt auf k -Formen

$$\langle -, - \rangle: \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Für eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit erhalten wir auch eine ausgezeichnete n -Form, die *Volumenform*. Für eine orientierte Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ haben wir die Koeffizientenfunktionen

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right\rangle$$

der Riemannschen Metrik auf U . Die Matrix $(g_{ij})_{i,j}$ ist die symmetrische Matrix, die das Skalarprodukt beschreibt, insbesondere ist $|g| = \det(g_{ij})$ eine glatte Funktion mit $|g| > 0$ auf U . Für die zu $\partial_1, \dots, \partial_n$ duale Basis $dx^1, \dots, dx^n$ können wir dann die Volumenform auf U wie folgt definieren:

$$d\text{vol} = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

ÜBUNGSAUFGABE 8.1.7. Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der orientierten Karte ist.

ÜBUNGSAUFGABE 8.1.8. Durch die Einbettung $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ erhält S^n eine Riemannsche Metrik (Einschränkung des Skalarprodukts von $T_p \mathbb{R}^{n+1}$ auf $T_p S^n$). Bestimmen Sie für S^n die Volumenform $d\text{vol}_{S^n}$ und das Volumen $\int_{S^n} d\text{vol}_{S^n}$.

8.2. Hodge-Stern und Laplace-Operator

DEFINITION 8.2.1. Sei V ein n -dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Mit der rekursiven Definition $i_{\alpha\wedge\beta} = i_\beta \circ i_\alpha$ definiert das innere Produkt einen kanonischen Isomorphismus

$$\bigwedge^k V \otimes \bigwedge^n V^\vee \rightarrow \bigwedge^{n-k} V^\vee.$$

Für eine beliebige n -Form $\omega \in \bigwedge^n V$ erhalten wir dann eine Abbildung

$$\bigwedge^k V \rightarrow \bigwedge^{n-k} V^\vee: \alpha \mapsto i_\alpha \omega.$$

Haben wir zusätzlich auf V ein Skalarprodukt gegeben, dann können wir die daraus resultierende Identifikation $V \cong V^\vee$ benutzen, um den Hodge-Stern-Operator

$$\star: \bigwedge^k V^\vee \rightarrow \bigwedge^{n-k} V^\vee$$

zu definieren.

BEMERKUNG 8.2.2. Die Idee hinter dieser Definition ist, dass für einen orientierten reellen Vektorraum V mit Skalarprodukt der Hodge-Stern eine orientierte Orthonormalbasis eines k -dimensionalen Unterraums (bzw. die dazugehörige Volumenform) auf eine orientierte Orthonormalbasis des $(n-k)$ -dimensionalen orthogonalen Komplements (bzw. die dazugehörige Volumenform) abbildet.

Die obige Definition des Hodge-Sterns hängt von zwei Informationen ab, einmal von der gewählten n -Form $\omega \in \bigwedge^n V$ und einmal vom Skalarprodukt $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, das für die Identifikation $V \cong V^\vee$ benutzt wird. Häufig wird für den Hodge-Stern die Volumenform $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ des Skalarprodukts benutzt, die sich als Dachprodukt einer Orthonormalbasis $e_1, \dots, e_n$ von V ergibt, s. Definition 8.1.2.

ÜBUNGSAUFGABE 8.2.3. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Zeigen Sie, dass für den Hodge-Stern $\star: \bigwedge^k V^\vee \rightarrow \bigwedge^{n-k} V^\vee$ (mit Volumenform zum Skalarprodukt) gilt $\star \circ \star = (-1)^{k(n-k)} \text{id}_V$.

BEMERKUNG 8.2.4. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $\omega \in \bigwedge^n V^\vee$ eine n -Form. Der Hodge-Stern zur n -Form ist die eindeutige lineare Abbildung $\star: \bigwedge^k V^\vee \rightarrow \bigwedge^{n-k} V^\vee$, so dass für $\alpha, \beta \in \bigwedge^k V$ gilt:

$$\omega(\alpha \wedge \star \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

ÜBUNGSAUFGABE 8.2.5. Wir können für $\omega \in \bigwedge^n V$ auch einen Hodge-Stern $\star: \bigwedge^k V \rightarrow \bigwedge^{n-k} V$ definieren. Zeigen Sie, dass dieser eindeutig durch die beiden äquivalenten Bedingungen

$$\alpha \wedge (\star \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega \text{ bzw. } \langle \beta \wedge \star \alpha, \omega \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$$

bestimmt ist.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann können wir den Hodge-Stern auf Formen

$$\star: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

durch die Gleichung $\langle \omega, \eta \rangle \text{dvol}_g = \omega \wedge \star \eta$ für Formen $\omega, \eta \in \Omega^k(M)$ definieren.

BEISPIEL 8.2.6. In $\mathbb{R}^2$ mit Koordinaten x, y und dem Standard-Skalarprodukt haben wir als Volumenform $\star 1 = dx \wedge dy$. Auf Ω^1 haben wir $\star dx = dy$ und $\star dy = -dx$. Insbesondere ist der Hodge-Stern kompatibel mit der komplexen Struktur, die durch die Identifikation $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}: (x, y) \mapsto x + iy$ gegeben ist. $\square$

BEISPIEL 8.2.7. In $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten x, y, z und dem Standard-Skalarprodukt ist der Hodge-Stern auf 1-Formen durch

$$\star dx = dy \wedge dz, \quad \star dy = dz \wedge dx, \quad \text{und} \quad \star dz = dx \wedge dy$$

gegeben (zum Merken: zyklische Vertauschung!). $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 8.2.8. Zeigen Sie für $\mathbb{R}^3$ mit Koordinaten x, y, z und dem Standard-Skalarprodukt, dass der Hodge-Stern die folgenden Beziehungen zwischen Dachprodukt und Kreuzprodukt von Vektoren vermittelt:

$$\star(v \wedge w) = v \times w \quad \text{und} \quad \star(v \times w) = v \wedge w.$$

DEFINITION 8.2.9. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren das Kodifferential

$$\delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

ist durch $\delta = (-1)^{n(k-1)+1} \star d \star$.

BEMERKUNG 8.2.10. Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) können wir das sogenannte L^2 -Skalarprodukt auf Formen mit kompaktem Träger definieren:

$$\langle -, - \rangle_{L^2}: \Omega_c^k(M) \times \Omega_c^k(M) \rightarrow \mathbb{R}: (\omega, \eta) \mapsto \int_M \langle \omega, \eta \rangle d\text{vol}_g.$$

Das Kodifferential ist bezüglich des L^2 -Skalarprodukts adjungiert zur äußeren Ableitung:

$$\langle d\omega, \eta \rangle_{L^2} = \langle \omega, \delta\eta \rangle_{L^2}$$

für $\omega \in \Omega_c^{k-1}(M)$ und $\eta \in \Omega_c^k(M)$.

ÜBUNGSAUFGABE 8.2.11. Zeigen Sie $\delta^2 = 0$. Ist δ eine Antiderivation?

ÜBUNGSAUFGABE 8.2.12. Zeigen Sie $\langle d\omega, \eta \rangle_{L^2} = \langle \omega, \delta\eta \rangle_{L^2}$ (mit Hilfe des Satzes von Stokes).

DEFINITION 8.2.13. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren den Laplace-Operator $\Delta: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ durch $\Delta = \delta d + d\delta$.

BEMERKUNG 8.2.14. Formen $\omega \in \Omega^k(M)$ mit $\Delta\omega = 0$ heißen harmonische Formen. Für geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind harmonische Formen geschlossen. Der Satz von Hodge sagt, dass für geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) jede Kohomologieklass in $H_{\text{dR}}^k(M)$ einen eindeutigen harmonischen Repräsentanten hat, d.h. dass die Inklusion

$$\{\omega \in \Omega^k(M) \mid \Delta\omega = 0\} \hookrightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$$

ein Isomorphismus ist.

8.3. Klassischer Vektorkalkül

Wir diskutieren kurz den De-Rham-Komplex für $\mathbb{R}^3$. Dieser Komplex kodiert viele wesentliche Aussagen aus der klassischen Vektoranalysis. Um die Beziehung herstellen zu können, benötigen wir allerdings den Hodge-Stern. Wir betrachten also $\mathbb{R}^3$ als Riemannsche Mannigfaltigkeit wie in Beispiel 8.1.4.

Der De-Rham-Komplex für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ hat die folgende Form:

$$0 \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \rightarrow 0$$

Dabei sind $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ einfach die glatten Funktionen.

Mit Hilfe der Riemannschen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ können wir für einen Punkt p den Tangentialraum $T_p\mathbb{R}^3$ und den Kotangentialraum $(T_p\mathbb{R}^3)^\vee$ identifizieren, indem die

Basis $\frac{\partial}{\partial r^1}, \frac{\partial}{\partial r^2}, \frac{\partial}{\partial r^3}$ auf die Basis dr^1, dr^2, dr^3 geschickt wird. Dabei sind r^1, r^2, r^3 die Standardkoordinaten und für das Standard-Skalarprodukt gilt $\langle \frac{\partial}{\partial r^i}, dr^j \rangle = \delta_i^j$.

Durch das Skalarprodukt erhalten wir eine Identifikation

$$\Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3): f_1 dr^1 + f_2 dr^2 + f_3 dr^3 \mapsto f_1 \frac{\partial}{\partial r^1} + f_2 \frac{\partial}{\partial r^2} + f_3 \frac{\partial}{\partial r^3},$$

wobei $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann können wir den Hodge-Stern $\star: \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ benutzen, um auch 2-Formen mit Vektorfeldern zu identifizieren:

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3): f_1 dr^2 \wedge dr^3 + f_2 dr^3 \wedge dr^1 + f_3 dr^1 \wedge dr^2 \mapsto f_1 \frac{\partial}{\partial r^1} + f_2 \frac{\partial}{\partial r^2} + f_3 \frac{\partial}{\partial r^3}.$$

(Zum Merken der Indizes in der Differentialformen: zyklische Vertauschung von (123).)

Zuletzt identifizieren wir noch die 3-Formen mit glatten Funktionen

$$\Omega^3(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} C^\infty(\mathbb{R}): f dr^1 \wedge dr^2 \wedge dr^3 \mapsto f.$$

Dies entspricht der Wahl eines globalen Erzeugers von $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ als $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ -Modul bzw. der Wahl einer Volumenform $dvol_{\mathbb{R}^3} = \star 1$ (s. auch die Diskussion im Kapitel zur Integration).

PROPOSITION 8.3.1. *Mit diesen Identifikationen erhalten wir dann für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kommutatives Diagram*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \longrightarrow & C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

BEWEIS. (1) Die Kommutativität des ersten Quadrates ist die Identifikation des Differentials mit dem Gradienten der Funktion f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial r^1} dr^1 + \frac{\partial f}{\partial r^2} dr^2 + \frac{\partial f}{\partial r^3} dr^3 \quad \leftrightarrow \quad \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r^1} \frac{\partial}{\partial r^1} + \frac{\partial f}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r^3} \frac{\partial}{\partial r^3}$$

(2) Die Kommutativität des zweiten Quadrates ist die Identifikation der äußeren Ableitung einer 1-Form mit der Rotation:

$$\begin{aligned} d(f_1 dr^1 + f_2 dr^2 + f_3 dr^3) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial r^2} - \frac{\partial f_2}{\partial r^3} \right) dr^2 \wedge dr^3 \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_3}{\partial r^1} - \frac{\partial f_1}{\partial r^3} \right) dr^3 \wedge dr^1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial r^1} - \frac{\partial f_1}{\partial r^2} \right) dr^1 \wedge dr^2 \end{aligned}$$

Die Komponenten des entsprechenden Vektorfeldes sind genau die Komponenten der Rotation.

(3) Zuletzt brauchen wir noch die äußere Ableitung einer 2-Form:

$$d(f_1 dr^2 \wedge dr^3 + f_2 dr^3 \wedge dr^1 + f_3 dr^1 \wedge dr^2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial r^1} + \frac{\partial f_2}{\partial r^2} + \frac{\partial f_3}{\partial r^3} \right) dr^1 \wedge dr^2 \wedge dr^3.$$

Dies ist genau die Beschreibung der Divergenz eines Vektorfeldes. $\square$

BEMERKUNG 8.3.2. *Die Aussage $d^2 = 0$ für den De-Rham-Komplex übersetzt sich unter den obigen Identifikationen in klassische Aussagen aus der Vektoranalysis:*

- (1) $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$
- (2) $\text{div} \circ \text{rot} = 0$

BEMERKUNG 8.3.3. Die De-Rham-Kohomologie von $\mathbb{R}^3$ kann berechnet werden. Die etwas allgemeinere Aussage des Poincaré-Lemmas 7.4.3 ist, dass für jede sternförmige offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$H_{\text{dR}}^i(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies beinhaltet verschiedene Aussagen:

- (1) $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ ist die Aussage, dass genau die konstanten Funktionen triviales Differential haben.
- (2) $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{R}^3) = 0$ ist die Aussage, dass ein Vektorfeld genau dann Gradientenfeld einer glatten Funktion ist, wenn die Rotation trivial ist. (Wirbelfreie Vektorfelder haben ein Potential.)
- (3) $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{R}^3) = 0$ ist die Aussage, dass quellenfreie Vektorfelder als Rotation eines Vektorpotentials dargestellt werden können.
- (4) $H_{\text{dR}}^3(\mathbb{R}^3) = 0$ ist die Aussage, dass eine skalare Felddichte als Divergenz eines Vektorfelds dargestellt werden kann.

In diesem Sinne ist die De-Rham-Kohomologie für Mannigfaltigkeiten eine weitreichende Verallgemeinerung des klassischen Vektorkalküls. Ausserdem sieht man dann (aus dem Satz von de Rham), dass es Mannigfaltigkeiten (oder einfach nur offene Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, die nicht sternförmig sind) gibt, bei denen aufgrund der Topologie nicht jedes wirbelfreie Vektorfeld in Potential hat:

BEISPIEL 8.3.4. Auf $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ haben wir das Vektorfeld

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Das Vektorfeld ist wirbelfrei (da die z -Achse in U fehlt), aber es gibt kein Potential. Wenn es ein Potential gäbe, wäre jedes Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve 0. Aber für den Einheitskreis um den Ursprung in der (x, y) -Ebene ist das Integral 2π . Die Form $\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$ ist geschlossen, aber nicht exakt. $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 8.3.5. Zeigen Sie, dass unter den Identifikationen in Proposition 6.5.2 das Dachprodukt von zwei 1-Formen dem Kreuzprodukt von zwei Vektorfeldern entspricht.

ÜBUNGSAUFGABE 8.3.6. (1) Wir bezeichnen mit

$$\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1: x \mapsto (\cos x, \sin x)$$

die normale Parametrisierung der Kreislinie. Zeigen Sie, dass der Pullback $\pi^*: \Omega^i(S^1) \rightarrow \Omega^i(\mathbb{R})$ für $i = 0, 1$ eine Identifikation zwischen glatten i -Formen auf S^1 und glatten 2π -periodischen i -Formen auf $\mathbb{R}$ induziert. (Dabei sind 2π -periodische 1-Formen durch $f dr^1$ mit 2π -periodischem $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ gegeben.)

- (2) Sei $g \in C^\infty(S^1)$, und sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ so dass $\pi^* dg = f dr^1$. Zeigen Sie, dass dann gilt $\int_0^{2\pi} f dr^1 = 0$.
- (3) Geben Sie eine 1-Form auf S^1 an, die nicht Differential einer Funktion ist.

ÜBUNGSAUFGABE 8.3.7. Zeigen Sie, dass für den n -dimensionalen Torus T^n gilt $\dim H_{\text{dR}}^1(T^n) \geq n$.

Wir können zum Schluss noch den Laplace-Operator im $\mathbb{R}^3$ mit der aus der Analysis 2 bekannten Form identifizieren:

$$\Delta f = \star d \star f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$$

8.4. Klassische Integralsätze

BEISPIEL 8.4.1. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine einfache geschlossene orientierte Raumkurve, und sei X ein glattes Vektorfeld, das in einer Umgebung U von γ definiert ist. Wir bezeichnen mit ξ die 1-Form zum Vektorfeld X , s. Abschnitt 8.3 und mit T das Einheitstangentienvektorfeld der Kurve γ . Das Integral des Vektorfelds X über die Kurve γ ist dann

$$\oint_{\gamma} X \cdot ds = \oint_{\gamma} \langle X, T \rangle ds = \int_{\gamma} \xi.$$

□

BEISPIEL 8.4.2. Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte orientierte Fläche mit Rand, und sei X ein Vektorfeld, das in einer Umgebung von Σ definiert ist. In Analysis wird das Integral des Vektorfelds über die Fläche definiert als Integral der Funktion $\langle X, N \rangle$ bezüglich des Flächenelements dS , dabei bezeichnet N das Einheitsnormalenvektorfeld der Fläche Σ . Bezeichnen wir mit ω die 2-Form, die zum Vektorfeld X gehört, s. Abschnitt 8.3, haben wir

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle dS.$$

□

BEISPIEL 8.4.3. Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, die in einer Umgebung U von γ definiert ist. In dieser Situation ist der Satz von Stokes

$$\int_{\gamma} \text{grad } f \cdot ds = \int_{\gamma} df = \int_{\partial\gamma} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

die Wegunabhängigkeit eines Kurvenintegrals für ein Gradientenvektorfeld. □

BEISPIEL 8.4.4 (Satz von Kelvin–Stokes). Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und X ein glattes Vektorfeld auf U . Sei $\Sigma \subset U$ eine in U enthaltene glatte orientierte Fläche mit Rand $\partial\Sigma$. Wir bezeichnen mit N das Einheitsnormalenvektorfeld entlang Σ und mit T das Einheitstangentienvektorfeld entlang der Randkurve $\partial\Sigma$ (mit der induzierten Orientierung). In dieser Situation gilt

$$\int_{\Sigma} \langle \text{rot } X, N \rangle dS = \oint_{\partial\Sigma} \langle X, T \rangle ds$$

Dabei ist $dS = \text{dvol}_{\Sigma}$ das Flächenelement/die Volumenform auf der Fläche Σ und $ds = \text{dvol}_{\partial\Sigma}$ das Linienelement/die Volumenform auf der Randkurve $\partial\Sigma$. Der Fluss des Vektorfelds $\text{rot } X$ durch die Fläche Σ ist das Kurvenintegral von X über den Rand.

Wir überlegen uns, wie die Aussage aus dem Satz von Stokes 7.3.1 folgt. Wir können die Vektorfelder X und $\text{rot } X$ mit 1-Formen ξ bzw. ρ identifizieren. Dann gilt nach den Überlegungen in Abschnitt 8.3 $\star\rho = d\xi$. Aus dem Satz von Stokes haben wir

$$\oint_{\partial\Sigma} \langle X, T \rangle ds = \oint_{\partial\Sigma} \xi = \int_{\Sigma} d\xi = \int_{\Sigma} \star\rho = \int_{\Sigma} \langle \text{rot } X, N \rangle dS.$$

□

BEISPIEL 8.4.5 (Satz von Green). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet in der Ebene mit glatter Randkurve ∂G . Sei in einer Umgebung U von G definiertes glattes Vektorfeld, dargestellt durch zwei Abbildungen $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{\partial G} (Pdx + Qdy) = \int_R d(Pdx + Qdy) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Kelvin–Stokes. $\square$

BEISPIEL 8.4.6 (Satz von Gauß, Divergenzsatz). Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, dessen Rand ∂V eine stückweise glatte geschlossene orientierte Fläche ist. Wir bezeichnen das Einheitsnormalenvektorfeld für ∂V mit N . Sei X ein glattes Vektorfeld, das in einer Umgebung U von V definiert ist. Dann gilt

$$\int_V \operatorname{div} X \, d\operatorname{vol}_V = \int_{\partial V} \langle X, N \rangle d\operatorname{vol}_{\partial V}.$$

Der Fluss des Vektorfelds X durch die Oberfläche ∂V ist das Integral von $\operatorname{div} X$ über das Gebiet V . $\square$

8.5. Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung von Temperaturen und Ausbreitung von Wärme in einem Material. Wir wollen diese Gleichung mit Hilfe von Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit formulieren.

Wir modellieren wie folgt: Gegeben ist eine glatte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M – der Raum, auf dem wir die Wärmeleitung untersuchen wollen. Die Temperaturverteilung ist durch eine glatte Abbildung $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Das Differential $du \in \Omega^1(M)$ beschreibt den Temperaturgradienten, und für einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ ist der Temperaturunterschied zwischen $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$ durch $\int_0^1 \gamma^*(du)$ gegeben. Nach den Gesetzen von Newton und Fourier ist die Wärmestromdichte proportional zum Temperaturgradienten

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad}(u),$$

der Proportionalitätsfaktor ist dabei die Wärmeleitfähigkeit λ . Das negative Vorzeichen bedeutet, dass Wärme in Richtung fallender Temperaturen fließt und sich dadurch Wärmeunterschiede tendenziell ausgleichen. In der Formulierung mit Differentialformen ist der Wärmestrom pro Fläche pro Zeit durch eine $(n-1)$ -Form $Q(t) \in \Omega^{n-1}(M)$ gegeben:

$$Q = -\star_1 du \in \Omega^{n-1}(M).$$

Dabei bildet der Hodge-Stern $\star_1$ die temperaturwertige 1-Form du auf die Energiepro-Zeitwertige $(n-1)$ -Form ab Q ab. Der Hodge-Stern hier hängt von der Wahl einer n -Form ab, die die Wärmeleitfähigkeit des Materials beschreibt. (Bild)

Aus der Energieerhaltung folgt, dass für einen gegebenen Wärmestrom Q die zeitliche Änderung der Temperatur durch

$$\star_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -dQ$$

gegeben ist. Der Hodge-Stern $\star_0: \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^n(M)$ identifiziert hier eine glatte Abbildung, die zeitliche Temperaturänderung $\frac{\partial u}{\partial t}$, mit einer n -Form, die die Wärmekapazität beschreibt. Auch hier hängt der Hodge-Stern wieder von der Wahl der n -Form ab, die die lokale Wärmekapazität des Materials beschreibt.

Der Satz von Stokes besagt in dieser Situation

$$\int_U \star_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_{\partial U} Q.$$

Die linke Seite beschreibt dabei den Wärmestrom durch den Rand eines Gebietes U , und die rechte Seite, die für kleine Gebiete U näherungsweise $\operatorname{vol}(U) \frac{\partial u}{\partial t}$ ist, sagt, dass dieser Wärmestrom zu einer Temperaturänderung proportional zum Volumen von U führt. Das negative Vorzeichen bedeutet hier wieder, dass ein Zufluss von Energie zu einer Erhöhung der Temperatur führt.

Die Kombination der beiden Gleichungen (Newton–Fourier und Energieerhaltung) liefert nun die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \star_0^{-1} d\star_1 u = a\Delta u,$$

wobei die glatte Abbildung a die Koeffizienten der beiden Hodge-Sterne (Wärmeleitfähigkeit für $\star_1$ und Wärmekapazität für $\star_0$ widerspiegelt).

Die totale thermische Energie des gegebenen thermodynamischen Systems ist durch das Integral $E = \int_M \star_0 u$ gegeben. Die Energieerhaltung für das Gesamtsystem folgt nun auch aus dem Satz von Stokes

$$\frac{dE}{dt} = \int_M \frac{\partial \star_0 u}{\partial t} = - \int_M dQ = - \int_{\partial M} Q = 0$$

Die Entropiedichte ist eine n -Form $\sigma \in \Omega^n(M)$, die durch

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = - \frac{dQ}{u}$$

gegeben ist. Dabei ist Q der Wärmestrom und $-dQ$ die infinitesimale Energiezufuhr. Mit der Energieerhaltung $\star_0 \frac{\partial}{\partial t} u = -dQ$ erhalten wir

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \star_0 \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} = \star_0 \frac{\partial \log u}{\partial t}.$$

Die Entropie ist dann bis auf additive Konstante durch $\sigma = \star_0 \log u$ gegeben, hängt also (bis auf die Wärmekapazität) vom Logarithmus der Temperatur ab. Die totale Entropie des Systems ist dann durch $\int_M \sigma$ gegeben. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt nun, dass für eine geschlossene Mannigfaltigkeit M ohne Wärmequellen die totale Entropie nicht kleiner werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \int_M \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \int_M - \frac{dQ}{u} = \int_M \frac{1}{u} d\star du \\ &= - \int_M d\left(\frac{1}{u}\right) \wedge \star du = \int_M \frac{1}{u^2} du \wedge \star du = \int_M \star \frac{1}{u^2} |du|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Leibniz-Regel $d\left(\frac{1}{u} \star du\right) = d\left(\frac{1}{u}\right) \wedge \star du + \frac{1}{u} d\star du$ und den Satz von Stokes

$$\int_M d\left(\frac{1}{u} \star du\right) = \int_{\partial M} \frac{1}{u} \star du = 0.$$

Hieraus folgt auch $\frac{dS}{dt} = 0$ genau dann, wenn $du \equiv 0$, d.h. die Entropie bleibt nur konstant, wenn sich das System im thermischen Gleichgewicht befindet.

8.6. Maxwell-Gleichungen des Elektromagnetismus

Wir diskutieren die klassischen (nicht-relativistischen) Maxwell-Gleichungen. Zugrundeliegender Raum für das System ist wieder eine n -dimensionale glatte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit M .

Die elektrische Ladungsdichte im System wird modelliert durch eine n -Form $\rho \in \Omega^n(M)$. Das Vorzeichen der Ladung erhalten wir durch Vergleich mit der Orientierung $\star 1$. Die totale elektrische Ladung in einem Gebiet $D \subset M$ ist dann durch das Integral $\int_D \rho$ gegeben. Der elektrische Strom wird modelliert durch eine $n-1$ -Form $j \in \Omega^{n-1}(M)$ und beschreibt die infinitesimale Ladungsänderung pro Fläche pro Zeit.

Allgemein haben wir (wie schon bei der Wärmeleitung), dass Dichten (wie die Ladungsdichte, Massendichten in der allgemeinen Relativitätstheorie oder die Entropiedichte in der Wärmeleitung) durch n -Formen beschrieben werden, und Flüsse/Ströme (wie der elektrische Strom j oder der Wärmestrom Q) durch $(n-1)$ -Formen, die über den Hodge-Stern als Vektorfelder veranschaulicht werden können.

Die Erhaltung der elektrischen Ladung kann dann durch

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + dj = 0$$

formuliert werden. Durch Integration und Stokes folgt daraus

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho = - \int_{\partial D} j,$$

was bedeutet, dass Ladungsänderungen nur durch Zu-/Abfluss von Ladung durch den Rand des Gebietes D zustandekommen können. (Analog zur Erhaltung der thermischen Energie bei der Wärmeleitungsgleichung.)

Das elektromagnetische Feld wird beschrieben durch seine Wirkung auf die Bewegung geladener Teilchen im Feld. Wir betrachten dazu eine Punktladung q am Punkt p , die sich mit Geschwindigkeitsvektor $v \in T_p M$ durch das elektromagnetische Feld bewegt. Die Wirkung einer Kraft wird modelliert durch eine Energiewertige 1-Form $f \in \Omega^1(M)$; das Integral $\int_\gamma f$ dieser 1-Form entlang einer glatten Kurve ist dann die Arbeit im Kraftfeld. Das Lorentz-Gesetz beschreibt die Wirkung des elektromagnetischen Felds auf die Bewegung der Punktladung durch

$$f = q(E - i_v B).$$

Dabei ist i_v die Kontraktion mit v aus Definition 6.1.7, die 1-Form $E \in \Omega^1(M)$ beschreibt das elektrische Feld und die 2-Form $B \in \Omega^2(M)$ das magnetische Feld.

Wir erhalten dann die Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned} dB &= 0 \\ dE &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ d\star_1 E &= \rho \\ d\star_2 B &= j + \star_1 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

Keine magnetischen Ladungen: Die erste Aussage $dB = 0$, also dass die 2-Form $B \in \Omega^2(M)$ geschlossen ist, bedeutet, dass es keine magnetischen Ladungen gibt. Im Spezialfall $\mathbb{R}^3$ können wir den Hodge-Stern und die Identifikationen aus Abschnitt 8.3 benutzen, um das magnetische Feld als Vektorfeld $\vec{B}$ dual zur 1-Form $\star B$ zu schreiben. Dann übersetzt sich $dB = 0$ in die Divergenzfreiheit des magnetischen Felds $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Faraday-Gesetz/Induktionsgesetz: Die zweite Aussage $dE = -\frac{\partial B}{\partial t}$ beschreibt, wie zeitliche Veränderungen im Magnetfeld elektrische Ströme induzieren. Unter den Identifikationen mit den Operationen der Vektoranalysis können wir das Faraday-Gesetz als $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ schreiben. Die Wirbel des elektrischen Feldes sind durch die zeitlichen Änderungen der magnetischen Flussdichte abhängig.

Gauß-Gesetz: Die dritte Aussage $d\star_1 E = \rho$ ist das Gauß-Gesetz. Auch hier taucht wieder ein Hodge-Stern $\star_1: \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{n-1}(M)$ auf, der die elektrische Feldstärke $E \in \Omega^1(M)$ mit der elektrischen Flussdichte $D = \star_1 E$ in Beziehung setzt. Diese Beziehung wird durch die Permittivität/dielektrische Leitfähigkeit $\epsilon \in \Omega^n(M)$ des Materials beschrieben. Betrachten wir ein Gebiet V und integrieren die Gleichung haben wir mit dem Satz von Stokes

$$\int_{\partial V} \star_1 E = \int_V \rho.$$

Auf der linken Seite steht dabei der elektrische Strom durch den Rand des Gebiets V , auf der rechten Seite die Gesamtladung im Gebiet V .

Das Gauß-Gesetz beschreibt also die Beziehung zwischen elektrischer Feldstärke bzw. elektrischer Flussdichte und Ladung in einem Gebiet.

Im Spezialfall $\mathbb{R}^3$ können wir wieder die Identifikationen aus Abschnitt 8.3 benutzen, um die elektrische Flussdichte D als Vektorfeld $\vec{D}$ aufzufassen. Dann besagt das Gauß-Gesetz $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, d.h. die Ladungsdichte ist die Quelle des elektrischen Felds.

Ampère–Maxwell-Gesetz/Durchflutungsgesetz: Zuletzt haben wir das Ampère–Maxwell-Gesetz $d\star_2 B = j + \star_1 \frac{\partial E}{\partial t}$. Der Hodge-Stern $\star_2: \Omega^2(M) \rightarrow \Omega^{n-2}(M)$ hier ist die magnetische Permeabilität, die die magnetische Flussdichte $B \in \Omega^2(M)$ mit der magnetischen Feldstärke $H = \star_2 B$ in Beziehung setzt. In der Vektoranalysis-Formulierung erhalten wir $\operatorname{rot} \vec{H} = j + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Die Wirbel des Magnetfelds hängen von der elektrischen Stromdichte und der zeitlichen Änderung der elektrischen Flussdichte $\vec{D}$ (Verschiebungsstromdichte) ab.

Es gibt auch Integralformulierungen der Maxwell-Gleichungen, die über den Satz von Stokes aus den obigen Differentialformen-Versionen bzw. Vektoranalysis-Versionen abgeleitet werden können.

Wir leiten noch kurz die Wellengleichung für das elektromagnetische Feld aus den Maxwell-Gleichungen ab. Wir betrachten den Fall $\rho = j = 0$ ohne freie Ladungen oder Ströme. Aus dem Durchflutungsgesetz (Ampère–Maxwell) folgt durch Ableitung nach t

$$d\star_2 \frac{\partial B}{\partial t} = \star_1 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Kombiniert mit dem Induktionsgesetz (Faraday) erhalten wir

$$-\delta dE = -\star_1^{-1} d\star_2 dE = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Aus dem Gauß-Gesetz folgt $-\star_2^{-1} d\star_1 E = 0$ und damit $d\delta E = 0$. Fassen wir alles zusammen, erhalten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = a \Delta E,$$

wobei die glatte Funktion a die dielektrische Leitfähigkeit und die magnetische Permeabilität des Materials beschreibt. Analog können wir die Wellengleichung für B ableiten:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = d\star_1^{-1} d\star_2 B.$$

Grundlagen Kategorientheorie und Analysis

A.1. Kategorien und Funktoren

DEFINITION A.1.1. Eine Kategorie $\mathbf{C} = (\text{Obj}(\mathbf{C}), \text{Hom}_{\mathbf{C}}, \circ)$ ist ein Tupel, wobei

- $\text{Obj}(\mathbf{C})$ eine Ansammlung von Objekten ist,
- $(A, B) \in \text{Obj}(\mathbf{C}) \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ je zwei Objekten die Morphismen von A nach B zuordnet, und
- $\circ: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C): (f, g) \mapsto g \circ f$ eine Kompositionsvorschrift ist, die einem Paar von Morphismen ihre Zusammensetzung zuordnet,

so dass gilt:

- (1) Es gibt einen Identitätsmorphismus $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ für jedes Objekt $A \in \mathbf{C}$, so dass für alle $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ und alle $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ gilt

$$f \circ \text{id}_A = f, \quad \text{id}_A \circ g = g.$$

- (2) Die Komposition $\circ$ ist assoziativ.

BEMERKUNG A.1.2. Die Objekte $\text{Obj}(\mathbf{C})$ bilden nicht notwendigerweise eine Menge. Man kann also auch von der Kategorie der Mengen sprechen.

In der Notation wird oft $\text{Obj}(\mathbf{C})$ mit $\mathbf{C}$ verwechselt. Für $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ kann auch $\mathbf{C}(A, B)$ geschrieben werden.

BEISPIEL A.1.3.

- **Set**, die Kategorie der Mengen mit Mengenabbildungen
 - **Grp**, die Kategorie der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen
 - **Vect_K**, die Kategorie der K -Vektorräume mit K -linearen Abbildungen
 - **Top**, die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.
- Modifikationen:
- **Top_{*}**, die Kategorie der punktierten topologischen Räume mit punktierten Abbildungen
 - **Top²**, die Kategorie der Raumpaare (X, A) mit $A \subset X$.
 - **Man**, die Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildungen.
 - Für eine Kategorie $\mathbf{C}$ haben wir die Kategorie $\mathbf{C}^{\text{op}}$, bei der einfach die Richtungen der Pfeile vertauscht werden: $\mathbf{C}^{\text{op}}(A, B) = \mathbf{C}(B, A)$.
 - Δ , die simpliziale Kategorie (endliche Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen)
 - **Ch(Mod- R)**, die Kategorie der Kettenkomplexe von Rechts- R -Moduln.

□

DEFINITION A.1.4. Sei $\mathbf{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt

- Monomorphismus, wenn für je zwei Morphismen $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ aus $f \circ g_1 = f \circ g_2$ schon $g_1 = g_2$ folgt,
- Epimorphismus, wenn für je zwei Morphismen $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon $g_1 = g_2$ folgt,
- Isomorphismus, wenn es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$ gilt.

DEFINITION A.1.5. Ein Funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ besteht aus einer Zuordnung

$$F: \text{Obj}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{D})$$

und Abbildungen

$$F: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$$

für alle $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, so dass gilt

- (1) $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, und
- (2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ und $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C)$.

BEMERKUNG A.1.6. Solche Funktoren heißen kovariant. Funktoren $F: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$ heißen kontravariante Funktoren (da die Richtungen der Pfeile umgedreht werden).

BEISPIEL A.1.7.

- für Vektorräume: Dualraum, symmetrische Potenz, äußere Potenz von Vektorräumen sind Endofunktoren von $\mathbf{Vect}_K$. Tensorprodukt ist ein Funktor $\mathbf{Vect}_K \times \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$.
- Derivationen $\text{Der}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$ -Algebren sind ein kontravarianter Funktor $\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.
- für Mannigfaltigkeiten: Tangentialraum an einem gewählten Punkt ist ein Funktor $\mathbf{Man}_{\bullet} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ von der Kategorie der punktierten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der Vektorräume. Tangentialbündel ist ein Endofunktor der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. glatte Abbildungen kontravarianter Funktor von Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}$ -Algebren:

$$\mathbf{Man}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}: M \mapsto C^{\infty}(M).$$

- Eine simpliziale Menge ist ein Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Allgemeiner kann man simpliziale Objekte in anderen Kategorien betrachten.
- Homologie ist ein Funktor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ von topologischen Räumen in $\mathbb{Z}$ -graduierte abelsche Gruppen.

□

DEFINITION A.1.8 (natürliche Transformationen). Seien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ zwei Kategorien. Eine natürliche Transformation $\alpha: F \Rightarrow G$ zwischen zwei Funktoren $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ ordnet jedem Objekt $X \in \mathbf{C}$ einen Morphismus $\alpha_X: F(X) \rightarrow G(X)$ in $\mathbf{D}$ zu, so dass für alle Morphismen $f: X \rightarrow Y$ in $\mathbf{C}$ das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

BEMERKUNG A.1.9. Für zwei Kategorien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ haben wir eine Funktorkategorie $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$, deren Objekte Funktoren und deren Morphismen natürliche Transformationen sind. Ein natürlicher Isomorphismus zwischen Funktoren ist ein Isomorphismus in der Funktorkategorie.

BEISPIEL A.1.10.

- Die Identifikation von $T_p M$ und $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^{\infty}(M), \mathbb{R})$ ist ein Beispiel für eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren $\mathbf{Man}_{\bullet} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

□

adjungierte Funktoren und universelle Eigenschaften: Beispiele Produkte, Quotienten, Kern

Literatur

- [Con01] Lawrence Conlon. *Differentiable manifolds*. Second. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001, S. xiv+418. ISBN: 0-8176-4134-3. DOI: 10.1007/978-0-8176-4767-4. URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4767-4>.
- [Hir94] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Bd. 33. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1976 original. Springer-Verlag, New York, 1994, S. x+222. ISBN: 0-387-90148-5.
- [Mil97] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, S. xii+64. ISBN: 0-691-04833-9.
- [Tu11] Loring W. Tu. *An introduction to manifolds*. Second. Universitext. Springer, New York, 2011, S. xviii+411. ISBN: 978-1-4419-7399-3. DOI: 10.1007/978-1-4419-7400-6. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7400-6>.