

VORLESUNG EXPERIMENTELLE MATHEMATIK:
KNOTENTHEORIE UND MASCHINENLERNEN

Kurzzusammenfassung. Mathematische Knoten sind Einbettungen $S^1 \hookrightarrow S^3$, und die Knotentheorie beschäftigt sich mit der Frage nach Invarianten, die verschiedene Knoten voneinander unterscheiden können. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, Invarianten zu definieren: kombinatorisch aus Knotendiagrammen, mit Werkzeugen der algebraischen Topologie, aus der Darstellungstheorie von Quantengruppen, oder im Fall hyperbolischer Knoten metrische Invarianten.

Die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Invarianten sind komplex, und es gibt viele offene Fragen. In dieser Situation können Experimente mit Computeralgebrasystemen und Methoden des Maschinenlernens helfen, komplexe Zusammenhänge besser zu verstehen, um Vermutungen zu formulieren oder am Ende auch allgemeine Aussagen über Knoteninvarianten zu beweisen. Ein Beispiel für diesen experimentellen Ansatz ist die 2021 in Nature erschienene Arbeit “Advancing mathematics by guiding human intuition with AI”.

Ziel der Vorlesung ist es, Grundlagen der Knotentheorie kennenzulernen und Beispiele für Experimente mit Computeralgebrasystemen und Maschinenlern-Methoden in der reinen Mathematik zu sehen.

Vorlesungsthemen.

- Grundlagen Knotentheorie: Knotendiagramme, Vassiliev-Invarianten, hyperbolische Knoten und metrische Invarianten
- Knoteninvarianten in Computeralgebra-Systemen (Sage, SnapPy)
- zufällige Knoten: verschiedene Modelle, Knoteninvarianten als Zufallsvariablen
- Grundlagen einfacher Maschinenlern-Modelle mit `scikit-learn` und `pytorch`
- Experimente: Willerton-Fisch, Maschinenlern-Modelle zur Vorhersage von Knoteninvarianten, Attributionsanalyse, Variationen zum deepmind-Paper, eventuell generativ-adversarielle Techniken zum Finden interessanter Beispiele

Voraussetzungen. Einführung Topologie, Grundkenntnisse Programmierung in Python.

Organisatorische Informationen.

- 4stündige Vorlesung, Vorlesungstermine Di 16–18 und Fr 10–12
- Anrechenbar als fortgeschrittene Topologie-Vorlesung (Weiterführung Topologie im Studiengang BSc Mathematik, und spez. oder ausgew. Kapitel der Topologie im Studiengang MSc Mathematik).
- Es wird ein Vorlesungsskript (in Englisch) geben, außerdem Programmiermaterialien als Startpunkt für eigene Experimente. Materialien und weitere Informationen werden über die Moodle-Seite der Vorlesung
- Die Vorlesung ist teilweise projektorientiert geplant, mit Bearbeitung eines kleinen experimentellen Projekts im Verlauf des Semesters, parallel zur Vermittlung der theoretischen Grundlagen in der Vorlesung. Dabei sollen auch Methoden des wissenschaftlichen Arbeitens am Beispiel vermittelt werden.
- Bei Fragen schreiben Sie gern eine Email an mwendt@uni-wuppertal.de