Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik
Seminar: Geschichte der Mathematik
Dozent: Prof. Dr. Klaus Volkert
Johanna Büscher (1246687)
Daniel Hein (1230220)

Grundlagen

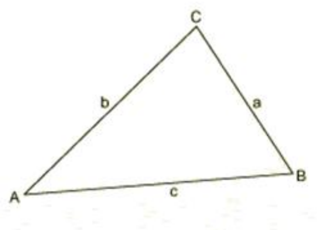
Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Ereignisraum Ω:

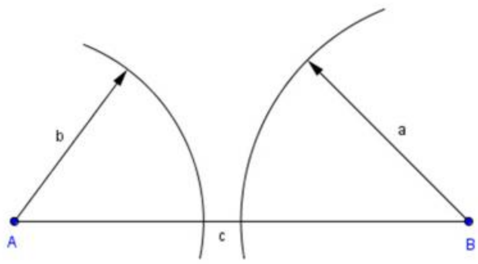
Eine auf dem Ereignisraum β(Ω) definierte Funktion P: $X \mapsto P(A)$, D_p = β(Ω)
heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung über dem Ergebnisraum Ω, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

i) Die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses ist eine Zahl aus dem Intervall [0;1], d.h., für alle ω ϵ Ω gilt: 0 ≤ P{ω} ≤ 1
ii) Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse ist 1, d.h., $\sum_{\omega\epsilon\Omega} P(\{\omega\}) = 1$
iii) Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist 0, d.h. P(Ø):=0
iv) Die Wahrscheinlichkeit eines möglichen Ereignisses A ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten seiner Elementarereignisse, d.h., P(A):= $\sum_{\omega\epsilon A} P(\{\omega\})$

Dreiecksungleichung:

Im allgemeinen Dreieck gilt: a+b > c





Satz von Viviani (1622 – 1703)

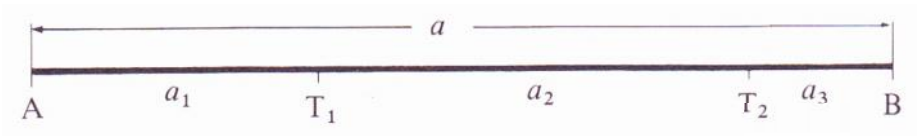
Für jeden Punkt P in einem gleichseitigen Dreieck gilt:
Die Summe der senkrechten p_i von P zu den Seiten des Dreiecks ΔABC ist gleich der Höhe h des Dreiecks ΔABC.

Beispiel 1: Problème du bâton brisé von Emile Michel Hyacinthe Lemoine (1840 – 1912)

Eine Strecke der Länge a soll „auf gut Glück" in 3 Teilstrecken zerlegt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich aus den 3 Teilstrecken ein Dreieck bilden lässt?

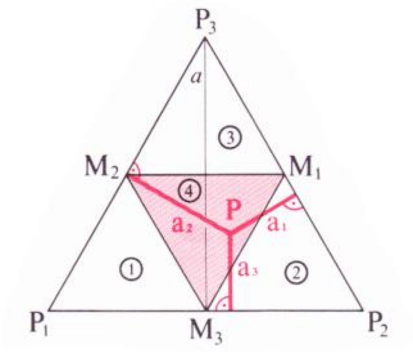
Lösung A, vorgeschlagen 1882 von Ernesto Cesàro (1859-1906)

Die beiden Teilpunkte $T_1 \neq T_2$ werden „willkürlich" auf die Strecke gesetzt; es entstehen die Teilstrecken a_1, a_2 sowie a_3. Es gilt $a_1 + a_2 + a_3$ = a



Mit Hilfe des oben stehenden Satzes von Vincenzio Viviani können wir jeder Zerlegung der Strecke a eindeutig einen Punkt P der Fläche des gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe a zuordnen. $\Delta M_1 M_2 M_3$ sei das Mittendreieck innerhalb des Dreiecks. Unter Berücksichtigung der Dreiecksungleichung lässt sich mit den a_i ein Dreieck genau dann bilden, wenn gilt: $a_i < \frac{a}{2}$

⇨ Der zugeordnete Punkt P muss im Mitteldreieck liegen

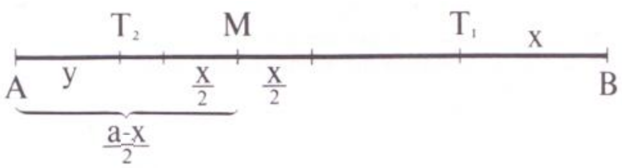


Unter der Annahme, dass jedes Teilungstripel a_1, a_2, a_3 gleich-wahrscheinlich ist, wird jedes der 4 kongruenten Dreiecke von P mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen.

⇨ Somit erhält man die für die gesuchte Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{4}$

Lösung B

Der Teilpunkt T_1 werde „willkürlich" platziert. Weiterhin wählt man „willkürlich" (z.B. durch Münzwurf) eine der beiden Teilstrecken und teilt diese wiederum „willkürlich" durch das Platzieren von T_2. Sofern T_2 die kleinere Teilstrecke x (< $\frac{a}{2}$) teilt, entsteht gemäß Dreiecksungleichung kein Dreieck. Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlich von $\frac{1}{2}$ ein.



Wir betrachten also nur noch die Fälle, bei denen T_2 auf dem größeren Teilstück liegt. Bei der nun durchgeführten zweiten Teilung durch T_2 sei y das kleinere Teilstück, sprich y ≤ $\frac{a-x}{2}$.

Damit nun ein Dreieck konstruiert werden kann, muss gelten: y + x > $\frac{a}{2}$

⇨ y > $\frac{a}{2}$ −x oder y > $\frac{a-x}{2} - \frac{x}{2}$

⇨ T_2 muss von der Mitte M des längeres Stückes weniger als $\frac{x}{2}$ entfernt sein

Nehmen wir an, dass alle Punkte des längeren Stückes als Teilpunkte T_2 gleichwahrscheinlich sind, dann erhalten wir als Wahrscheinlichkeit für die Konstruierbarkeit des Dreiecks die Dichtefunktion p(x) := $\frac{x}{a-x}$.

Weiterhin wird jeder X-Wert ∊ $[0;\frac{a}{2}]$ als gleichmöglich angenommen. Nach Mitteln aller möglichen x-Werte erhalten wir für die stetige Gleichverteilung:

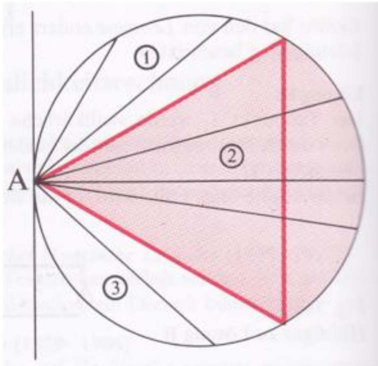
$$P = \frac{1}{0{,}5a} \int_0^{\frac{1}{2}a} \frac{x}{a-x}\,dx = \frac{2}{a}\left[-x - a\ln|a-x|\right]_0^{\frac{1}{2}a} = \frac{2}{a}\left(-\frac{a}{2} - a\ln\frac{a}{2} + a\ln a\right) = -1 + 2\ln 2$$

Berücksichtigen wir nun noch, dass T_2 nur in der Hälfte alle Fälle auf das größere Stück fällt, erhalten wir für die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit den Wert ln2 - $\frac{1}{2}$ ≈ 0,193

Beispiel 2: Paradoxon nach Joseph Bertrand (1822 – 1900)

In einem Kreis soll auf „Gut Glück“ eine Sehne s gezogen werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne s länger ist als die Seitenlängen a des im Kreis liegenden Gleichseitigen Dreiecks.
Im Folgenden stellen wir die drei von Bertrand entwickelten Lösungstheorien vor.

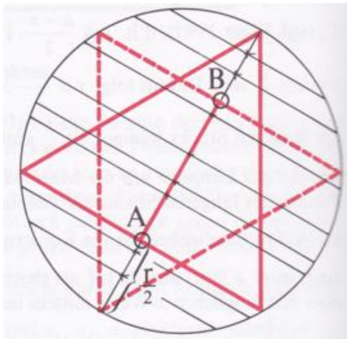
1. Lösungsvorschlag:



Die Sehne s werde von einem beliebigen Punkt P auf dem Kreis aus gezogen.
Dabei wird angenommen, dass jeder Winkel zwischen der Sehne s und der Tangente in Punkt P gleichwahrscheinlich ist.
Die Sehne s ist nur länger als a, wenn sie in Bereich 2 fällt.
Da wir wissen, dass der Winkel des Dreiecks 60° spitz ist, lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne in diesem Bereich liegt, wie folgt berechnen:

$$\frac{(60°)}{(180°)}=\frac{1}{3}$$

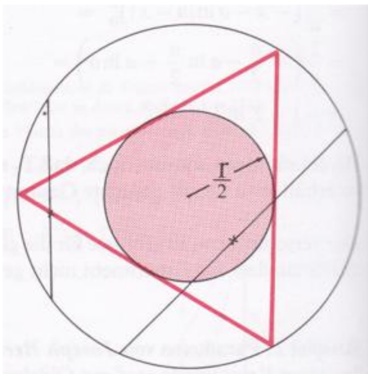
2. Lösungsvorschlag:



Man wähle auf dem Durchmesser des Kreises auf „Gut Glück“ einen Punkt P, auf dem man eine Senkrechte Sehne zieht. Für jede Sehne die durch einen Punkt P* geht, welcher weniger als r/2 vom Mittelpunkt entfernt ist, ist diese Sehne länger als die Seitenlänge a des Dreiecks.
O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit eines jedes Punktes auf dem Durchmesser gleichverteilt ist.
Der Punkt P* muss in dem Intervall $[\frac{D}{2}-\frac{r}{2};\frac{D}{2}+\frac{r}{2}]$ liegen.
Demnach ergibt sich folgende Rechnung:

$$P(s>a)=\frac{r}{(2*r)}=\frac{1}{2}$$

3.Lösungsvorschlag:



Man wähle einen beliebigen Punkt P in der Kreisfläche, durch welchen die Sehne s gespannt wir, sodass dieser der Mittelpunkt der Sehne ist.
Damit diese länger ist als die Seitenlänge a des Dreiecks muss der Punkt P* im Inneren des konzentrischen Kreises mit Radius r/2 liegen.
Da jeder Punkt P des Kreises mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird, ergibt sich die folgende Rechnung:

$$\frac{(\frac{r}{2})^2*\Pi}{(r^2*\Pi)}=\frac{1}{4}$$

Neben den von Bertrand entwickelten Lösungsansätzen gibt es eine weitere Möglichkeit zu einem Ergebnis zu kommen, welches sich wieder von den drei vorgestellten Ergebnissen unterscheidet.
Die Vorgehensweise bei dieser Lösung ist ähnlich der im 2. Lösungsvorschlag, dementsprechend verzichten wir an dieser Stelle auf deren Vorstellung.
Sie ist jedoch nachzulesen in dem Buch: Stochastik. Leistungskurs von Barth, Fr.; Haller, R. Erschienen 1996 beim Münchner Ehrenwirth Verlag S. 391.

Wir haben nun einmal 2 verschiedene Lösungswege mit 2 unterschiedlichen Ergebnissen (Beispiel 1) sowie 3 unterschiedliche Lösungswege mit 3 abweichenden Lösungen (Beispiel 2) gesehen, die mathematisch alle korrekt sind unter den gewählten Konkretisierungen der Anweisungen.

- ⇨ Fazit: Stochastische Paradoxa entstehen häufig durch zu unkonkrete Fragestellungen.

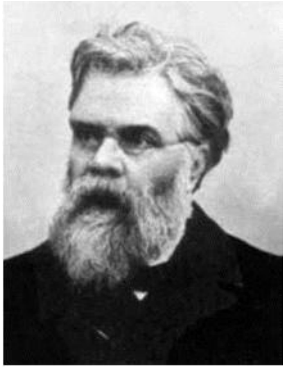
Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Kernlehrplan NRW (Stand 2014)

Beim Vergleich mit dem Kernlehrplan (Sekundarstufe 2) 2014 des Landes NRW und aktuellen Stochastikbüchern ist klar geworden, dass Paradoxa dieser Art nicht für den Unterricht vorgesehen sind.
Die Inhaltlichen Schwerpunkte der Stochastik sind in der Sekundarstufe 2 laut Kernlehrplan:

- Mehrstufige Zufallsexperimente
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung
- stochastische Prozesse
- Testen von Hypothesen

Historischer Hintergrund

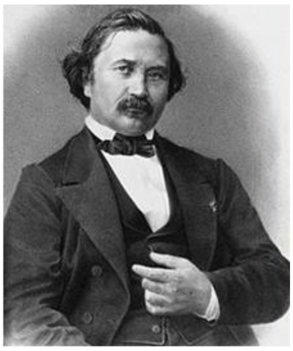
Emile Michel Hyacinthe Lemoine:



- Geboren 22. Nov. 1840 in Quimber, Frankreich
- Abschluss am École Polytechnique in Paris im Jahr 1860, dort lehrte er im Anschluss für einige Jahre als Professor
- Als Ingenieur arbeitete er als Verantwortlicher für die Gasversorgung von Paris
- Weiterhin verfolgte er die mathematische Forschung, vor allem in Themengebieten der Geometrie und pflegte außerdem seine, bereits in Schulzeiten entdeckte, Leidenschaft für Musik.
- Er veröffentlichte Artikel in verschiedenen Magazinen und war an der Gründung und Erstellung des Magazins „Intermédiare des mathématiciens“ beteiligt.
- Lemoine bewies in seinem Buch „Note sur les propriétés du centre des médianes antiparallèles dans un triangle“, dass sich die Symmedianen in einem Punkt schneiden (Lemoinepunkt)
- Gestorben 21. Feb. 1912 in Paris.

* Aufgrung von unterschiedlichen Daten in verschiedenen Quellen, haben wir die Jahreszahlen größten Teils ausgelassen.

Joseph Louis François Bertrand:



- Geboren am 11.03.1822 in Paris
- Durfte bereits als 11jähriger am Unterricht in der École Polytechnique teilnehmen
- Promotion im Jahre 1839 in Thermodynamik und Tätigkeit als Lehrer an der École Polytechnique
- Ingénieur des Mines 1841
- Von 1841 – 1848 lehrte er Elementarmathematik am Lycée St. Louis
- Im Jahre 1856 wird er Nachfolger von Jacques Sturm an der École Polytechnique
- 1862 wird er als Nachfolger von Jean-Baptiste Biot Professor für Allgemeine Physik und Mathematik am Collège de France
- Aufnahme in die Académie française 1884
- Bertrand beschäftigte sich u.a. mit Kurven doppelter Krümmung (1850) und schrieb wissenschaftsgeschichtliche Werke und Lehrbücher
- 1889 erschien sein Calcul des Pohabilités mit dem nach ihm benannten Paradoxon (vlg. Beispiel 2)
- Gestorben 05.04.1900 in Paris

Quellen:

Buch: Stochastik. Leistungskurs von Barth, Fr.; Haller, R. Erschienen 1996 beim Münchner Ehrenwirth Verlag

Buch: Das große Tafelwerk, Cornelsen

http://www.wolframalpha.com/input/?i=viviani's+theorem (letzter Zugriff 19.Mai, 18 Uhr)

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Lemoine.html (letzter Zugriff 20.Mai, 15:30 Uhr)

http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/lemoine.html (Letzter Zugriff 20.Mai, 15:40 Uhr)

Kernlehrplan:
www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/lehrpläne/upload/klop_SII/mGost_Mathe_Erfassung.pdf