

Zum Gebrauch von MAPLE im Rahmen von SWP (Scientific WorkPlace)

Die Wirkungsweise von Umformungsbefehlen ist nicht im Einzelnen komplett vorhersagbar, daher sollte man im Einzelfall wissen, was man will, und nachsehen, ob ein Befehl das Gewünschte getan hat oder zumindest einen nützlichen Beitrag dazu geleistet hat. In einigen Fällen kommt man über eine Kombination erst zum Ziel und muss ein wenig probieren, was aber harmlos ist, da es so schnell geht.. Weiter bleibt 'Nachpolieren von Hand' wichtig und ist im Normalfall einfach zu erledigen.

Vorbemerkungen: Mathematikeingabe erscheint auf 'Ctr+t' in roter Schrift. Eingabe von Symbolen wie Bruchstrichen oder Integralzeichen usw.: Buttons oder 'Ctr+...'. Cursor grundsätzlich im Rechenausdruck oder in der Gleichung, auch unmittelbar am Ende, bevor mit Rollfenster oder Button eine Arbeit damit vorgenommen wird. Bei der Beschreibung geben wir jeweils den Ausdruck oder die Gleichung (bzw. das System von Gleichungen), anschließend das, was auf den zuvor genannten Befehl geschieht und von MAPLE hingeschrieben wird.

1 Evaluate (Werte aus, berechne - und zwar exakt)

$(x - y) + 2x = 3x - y$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{23}{30}$, dagegen:
 $0.5 - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = .766\ 666\ 67$ (also nur numerisch, da eine Dezimalzahl steht!)
 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, aber nicht vereinfacht wird:
 $\sin^2(x) + \cos^2(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, analog:
 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (hier also vereinfacht, dagegen geschieht nichts bei (vgl. dazu 'simplify' etc.)
 $(x + y)(x - y) = (x + y)(x - y)$
 $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$
Vektoren, lineare Operationen:
 $(1, 2, -2) + 2(-2, 1, 3) = (-3, 4, 4)$
 $(2, 1, -3) + \lambda(1, 2, 1) = (2 + \lambda, 1 + 2\lambda, -3 + \lambda)$
Skalarprodukt und Vektorprodukt:
 $(2, 1, 1) \cdot (3, 1, -2) = 5$ (auch ohne Mal-Punkt)
 $(1, 2, -3) \times (a, -2, 2) = (-2, -3a - 2, -2 - 2a)$
Spatprodukt:
 $(1, 2, -3) \cdot ((2, -1, 3) \times (2, 2, -4)) = 8$
Matrizen (Matrix mal Matrix, Matrix mal Vektor):
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ 3x + 4 \\ 4x - 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 & -3 \\ 3x + 4 & -1 \\ 4x - 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Komplizierteres:
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$, $\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x$, $\int_0^1 xe^x dx = 1$

2 Evaluate numerically (Berechne numerisch)

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = .707\ 106\ 78$
 $\frac{1}{3} + \int_0^1 xe^x dx = 1.333\ 333\ 3$ (da Integral nur numerisch berechnet wird)
 $\cos(2) = -.416\ 146\ 84$ (geht nur numerisch, 'evaluate' tut hier nichts!)
 $\int_0^1 e^{-x^2} dx = .746\ 824\ 13$ (geht nur numerisch, aber 'evaluate' tut etwas Sinnvolles, führt nämlich auf eine bekannte transzendente Funktion zurück)

3 Simplify (Vereinfache)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{x^2-1}{x+1} = x-1 \text{ (schon ganz gut, aber sehen Sie erst den nächsten an:)}$$

$$\frac{(x-1)(x+4)}{x^4+8x^3+17x^2-2x-24} = \frac{1}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{x^3-x^2+x-2}{2x^2-3x+4} = \frac{x^3-x^2+x-2}{2x^2-3x+4} \text{ (nichts, also nicht etwa Polynomdivision, das geht mit 'polynomials, divide')}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sin^3(t) dt \right) = -\sin x \cos^2 x + \sin x$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \text{ (dieselbe Wirkung wie bei 'evaluate'), analog:}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x, \text{ ebenso wird wunderbar ausgerechnet:}$$

$$\int_0^x \sin^3(t) dt = \frac{2}{3} - \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x, \text{ mehr noch:}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sin^3(t) dt \right) = \sin x - \sin x \cos^2 x, \text{ es ist dies nämlich gleich}$$

$$\sin(x) (1 - \cos^2(x)) = \sin^3(x), \text{ wie man als Resultat der Ableitung direkt sehen kann ohne Rechnung.}$$

Weitere erfolgreiche und zwei erfolglose Anwendungen von 'simplify':

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ (erster Schritt mit 'simplify', zweiter mit 'factor',}$$

'evaluate' liefert einen andern Ausdruck, ähnlich dem ersten, etwas schlechter)

$$\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 = 1.$$

Wenig eindrucksvoll:

$$\sin(2 \arctan(t)) = \frac{2t}{1+t^2} \text{ bekommt man nicht hin, nicht einmal, nachdem man } t \text{ als reelle Variable deklariert}$$

hat.

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} = -\frac{2}{(-1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \text{ (ein unbefriedigendes Resultat, machen Sie es besser)}$$

$$(x-y)(x+y) = -(-x+y)(x+y) \text{ (also wieder nichts)}$$

4 Combine (Fasse zusammen)

Dieser Befehl führt einige nützliche Umformungen durch, gliedert sich in mehrere Rubriken, wovon die letzte die bei weitem interessanteste darstellt:

(Combine) **Exponentials:**

$$(e^{x+y})^z = e^{z(x+y)}, e^x e^y = e^{x+y} \text{ ('simplify' täte hier dasselbe)}$$

(Combine) **Logs:**

$\ln(x) + \ln(y) - \ln(z) = \ln x \frac{y}{z}$ (Beachte die Konvention, dass bei fehlender 'von'-Klammer ein Funktionszeichen wie sin, exp, ln auf ein Produkt als Ganzes anzuwenden ist. Der Deutlichkeit halber sollte man so aber nicht unbedingt schreiben.)

$$(Combine) \text{ Powers: } e^x e^y / e^z = e^{x+y-z}$$

(Combine) **Trigfunctions:** Es gibt eine Fülle von trigonometrischen Identitäten, die stets mit Pythagoras und vor allem mit den Additionstheoremen zusammenhängen. Das führt zuweilen zu verbüffenden Vereinfachungen trigonometrischer Ausdrücke, Beispiele:

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x, \text{ in dieser Form bequem exakt zu integrieren!}$$

$$\frac{\cos^2 x \sin x - 1}{\sin^3 x \cos x} = \frac{-2 \sin 3x - 2 \sin x + 8}{\sin 4x - 2 \sin 2x},$$

$$\begin{aligned} 3 \cos^4 x \sin^2 x - 2 \sin^5 x \cos^3 x &= -\frac{3}{16} \cos 4x + \frac{3}{32} \cos 2x - \frac{3}{32} \cos 6x \\ &+ \frac{3}{16} - \frac{1}{64} \sin 8x - \frac{3}{32} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 6x + \frac{1}{32} \sin 4x \end{aligned}$$

Formulieren Sie anhand dieser Beispiele selber *allgemein*, welche Umformung dieser Befehl durchführt.

5 Factor (Faktorisieren)

$$10125000 = 2^3 3^4 5^6$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) = (x - y)^2$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (x+1)(x^2 - x + 1)(1 + x + x^2), \text{ was geschieht hier?}$$

$2 - x + x^2 - 3x^3 = 2 - x + x^2 - 3x^3$ (also Arbeitsverweigerung - aber kann man das nicht auch faktorisieren?)
 $10x + x^2 - 3x^3 = -x(3x + 5)(x - 2)$ (na, also!)
 $x^2 - 5x + 1 = x^2 - 5x + 1$ (und wieder nichts)

6 Polynomials (Befehle zum Umgang mit Polynomen)

Vorbemerkung: 'Companion matrix' interessiert wenig und jetzt überhaupt nicht.

1. **Polynomials, collect:** Nach der Beantwortung der erscheinenden Frage nach den Variablen mit 'x' erscheint:

$$x^4(3x - 4 + 5ax^2) + 7x^2 - 2bx + 1 = 5ax^6 + 3x^5 - 4x^4 + 7x^2 - 2bx + 1$$

Was ist also geschehen? Zweites Beispiel (nach Nennung von 'y'):

$$x^4y(3xy^3 - 4 + 5ay^2x^2) + 7x^2y^4 - 2bx + 1 = (3x^5 + 7x^2)y^4 + 5ax^6y^3 - 4x^4y - 2bx + 1$$

2. **Polynomials, divide:**

$$\frac{x^5 - 2x + 2}{x^4 - 3x^3 + x + 1} = x + 3 + \frac{-1 - 6x - x^2 + 9x^3}{x^4 - 3x^3 + x + 1}$$

3. **Polynomials, partial fractions:**

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{(x-2)^2(3x-4)^3} = \frac{1}{8(x-2)^2} - \frac{1}{16(x-2)} - \frac{5}{12(3x-4)^3} - \frac{5}{12(3x-4)^2} + \frac{3}{16(3x-4)} \text{ (eindrucksvoll!)}$$

$\frac{x^5 - 2x + 2}{x^4 - 3x^3 + x + 1} = x + 3 - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4} \frac{5+31x+37x^2}{x^3 - 2x^2 - 2x - 1}$ Das ist nicht vollständig gelungen - erklären Sie, warum Probleme entstanden.

4. **Polynomials, roots** (d.h. Wurzeln, also Nullstellen):

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2x^2 + 1, \text{ roots: } & \left(\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \end{array} \right) \\
 x^5 - 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1, \text{ roots: } & \left(\begin{array}{c} -.641\,592\,15 - .235\,733\,5i \\ -.641\,592\,15 + .235\,733\,5i \\ .431\,897\,43 - .383\,257\,06i \\ .431\,897\,43 + .383\,257\,06i \\ 6.419\,389\,4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Erklären Sie, warum die Reaktion hier anders ist als im ersten Beispiel, und was das Resultat bedeutet.

5. **Polynomials, sort:**

$$x^4(3 - 2x^2y) + 3x^2(1 - x) = (-2yx^2 + 3)x^4 + 3(-x + 1)x^2$$

Erklären Sie die Wirkung.

7 Solve (Löse)

Bisher ging es um Umformen bzw. Ausrechnen (Auswerten) von Rechenausdrücken (Termen). Aber MAPLE kann auch Bestimmungsgleichungen lösen. Dabei werden wir sehen, dass MAPLE das Verständnis der Rollen 'Unbestimmte' und 'Äußerer Parameter' verlangt. Außerdem muss man natürlich wissen, was 'Lösen' heißt und die MAPLE-Resultate entsprechend verstehen und aufbereiten. Schließlich: Nur einfache Gleichungen bzw. Gleichungssysteme sind rechnerisch wirklich lösbar, Komplizierteres muss theoretisch / graphisch / numerisch behandelt werden. Das schlägt sich zum Teil in den Spezifikationen des 'solve'-Befehls nieder.

Vorbemerkung: Gleichungen schreibt man rot im Mathematikmodus wie Rechenausdrücke, der Cursor muss in der Gleichung sein für die Anwendung des Befehls zum Lösen. Wichtig: Gleichungssysteme bzw. Rekursionsgleichungen mit Anfangsbedingungen (s.u.), alles also, was mehr als eine Zeile verlangt, muss in eine Matrix geschrieben werden mit einer Spalte und so viel Zeilen, wie man braucht. Eingabe einer Matrix: Anklicken von Button 'Matrix' (3×3 Quadrate), dann erscheint Menu, in dem man Zeilen- und Spaltenzahl wählen kann. Gleichungen werden in die Zeilen geschrieben, nur eine in jede Zeile. Das kann dann verarbeitet werden.

7.1 Solve, exact: Löse exakt

1. Beispiel: $\frac{1}{2}x - 3(x - a) = 2x + 4a$, Solution is : $\{x = -\frac{2}{9}a\}$, dies erscheint, wenn man x als Unbestimmte spezifiziert hat (d.h. a als äußeren Parameter). Die Schreibweise ist nicht besonders gelungen, man gebe nichts darauf, vernünftig wäre etwa $L = \{-\frac{2}{9}a\}$. Wir wollen lieber in Worten sagen: Eindeutige Lösung ist $-\frac{2}{9}a$. Zum Vergleich: Wenn man im selben Beispiel a **und** x als Unbestimmte nennt, so erscheint:

$\frac{1}{2}x - 3(x - a) = 2x + 4a$, Solution is : $\{x = x, a = -\frac{9}{2}x\}$. Wieder ist die Schreibweise nicht gut, wichtig ist nur, dass wir verstehen: Man kann x beliebig wählen und erhält mit $(x, -\frac{9}{2}x)$ eine Lösung, und auf diese Weise erhält man alle Lösungen. Wir formulieren: Die Lösungsmenge ist parametrisiert mit:

$$\vec{u}(x) = \left(x, -\frac{9}{2}x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Natürlich hätte man auch aus der ersten Lösung (mit a als äußerem Parameter) schließen können, dass für die Gleichung in den zwei Unbestimmten x, a die Lösungsmenge auch parametrisiert ist mit

$$\vec{v}(a) = \left(-\frac{2}{9}a, a\right), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Es handelt sich um *verschiedene* Parametrisierungen *derselben* Menge von Zahlenpaaren. Es sollte nicht wundern, dass die Lösungsmenge geometrisch eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ darstellt, weil es sich um eine lineare Gleichung in zwei Unbestimmten handelt.

2. Beispiel: $x^2 - 3ax + 1 = 0$, Solution is : $\left\{x = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(9a^2 - 4)}\right\}, \left\{x = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(9a^2 - 4)}\right\}$, das erscheint nach Bestimmen von x als einziger Unbestimmter, womit a als äußerer Parameter aufgefasst ist. Wir nehmen an, dass a eine beliebige reelle Zahl ist. Wichtig ist nunmehr, dass wir verstehen und formulieren:

1. Fall: $3|a| > 2$, dann hat man die oben angegebenen zwei verschiedenen reellen Lösungen.
2. Fall: $3|a| = 2$, also $a = 2/3$ oder $a = -2/3$, dann gibt es nur eine Lösung, nämlich $x = \frac{3}{2}a$.
3. Fall: $3|a| < 2$, dann gibt es keine reelle Lösung der quadratischen Gleichung.

3. Beispiel: $\frac{3x^2 - 2x - 3}{5x^2 + 3x - 2} = 0$, Solution is : $\left\{x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{10}\right\}, \left\{x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{10}\right\}$, man muss also nicht Normalform von Hand herstellen, nur eben wissen, dass es sich um eine quadratische Gleichung handelt und im Falle eines äußeren Parameters so reagieren wie oben im ersten Beispiel.

4. Beispiel: $e^{4x} - 2e^{2x} - 1 = 0$, Solution is : $\left\{x = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2} + 1)\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}\ln(1 - \sqrt{2})\right\}$. So etwas 'erkennt' Maple also auch. Zu beachten: Nur die erste Lösung hat man im Reellen! Der Logarithmus negativer Zahlen ist nur im Komplexen zu bilden. (Können Sie auch die reelle Lösung finden?)

5. Beispiel: $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$, Solution is : $\left\{x = \frac{1}{6}\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})} + \frac{2}{\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})}} + 1\right\},$

$$\left\{x = -\frac{1}{12}\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})} - \frac{1}{\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})}} + 1\right\}, \left\{x = -\frac{1}{12}\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})} - \frac{1}{\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})}}\right\}$$

$$\left\{+ \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})} - \frac{2}{\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})}}\right)\right\}, \left\{+ 1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})} - \frac{2}{\sqrt[3]{(108 + 12\sqrt{69})}}\right)\right\}$$

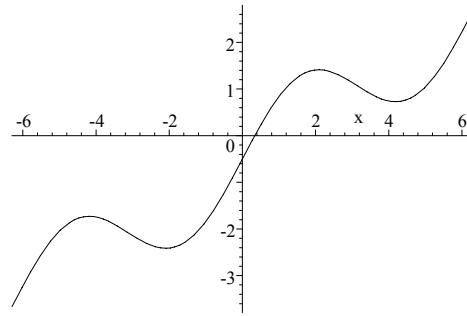
Donnerwetter! Erklären Sie die Struktur der Lösungen in diesem Fall.

5. Beispiel: $\sin(x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, Solution is : $\left\{x = \arctan \frac{\sqrt{2}}{-2 + \sqrt{2}}\right\}$, immerhin!

6. Beispiel: $\sin(x) + x/2 - 1/2 = 0$, Solution is : $\{x = \rho\}$ where ρ is a root of $Z + 2\sin Z - 1$, man lese und stelle die (berechtigte!) Arbeitsverweigerung fest.

7.2 Solve, numeric: Löse numerisch

$\sin(x) + x/2 - 1/2 = 0$, Solution is : $\{x = .33758371\}$, so bekommt man etwas im letzten Beispiel (Nummer 6). Grafisch kann man erkennen, dass es genau eine Lösung gibt und dass die angegebene Näherungslösung in Ordnung ist.



7.3 Solve, integer: Nur ganzzahlige Lösungen gesucht

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ Solution is : } \left\{ \begin{array}{l} a = N_3 \frac{-N_1^2 + N_2^2}{\text{igcd}(-N_1^2 + N_2^2, N_1^2 + N_2^2, -2N_1 N_2)}, \\ c = N_3 \frac{N_1^2 + N_2^2}{\text{igcd}(-N_1^2 + N_2^2, N_1^2 + N_2^2, -2N_1 N_2)}, b = -2N_3 N_1 \frac{N_2}{\text{igcd}(-N_1^2 + N_2^2, N_1^2 + N_2^2, -2N_1 N_2)} \end{array} \right\}$$

Beachtlich! Man hat hier eine Parametrisierung aller ganzzahligen pythagoreischen Tripel, in den freien Parametern N_1, N_2, N_3 . 'igcd' bedeutet: 'größter gemeinsamer Teiler'. (Das vorangestellte 'i' für 'integer' - man kann auch größte gemeinsame Teiler für Polynome berechnen.) Wir müssen aber 'gcd' schreiben, um mit MAPLE in diesem Rahmen auszuwerten. Wählen wir einmal $N_1 = 1, N_2 = 5, N_3 = 3$, dann sollte also $a = 36, b = -15, c = 39$ ein solches Tripel sein, tatsächlich: $36^2 + 15^2 = 1521 = 39^2$.

7.4 Solve, recursion:

Rekursive Bedingungen, welche eindeutig eine Funktion definieren, werden in dem Sinne 'gelöst', dass man (im Erfolgsfalle) einen expliziten Ausdruck für die Funktion erhält. Wir zeigen das an einem vertrauten Beispiel:

$$\begin{array}{l} f(n+1) = (n+1)f(n) \\ f(0) = 1 \end{array}, \text{ Solution is : } \{f(n) = \Gamma(n+1)\} \text{ Dazu ist zu sagen: } \Gamma(n+1) \text{ ist dasselbe wie } (n+1)!, \text{ für } n \in \mathbb{N}. \Gamma \text{ ist die 'Gammafunktion' und interpoliert eben die Fakultäten.}$$

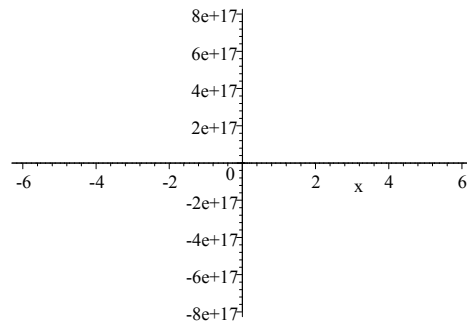
8 Plot2d (Funktionsgraphen und Kurven Zeichnen)

Vorbemerkung: Es kommt (wie in der richtigen Mathematik) nicht auf die Buchstaben für die unabhängigen Variablen bzw. freien Parameter an.

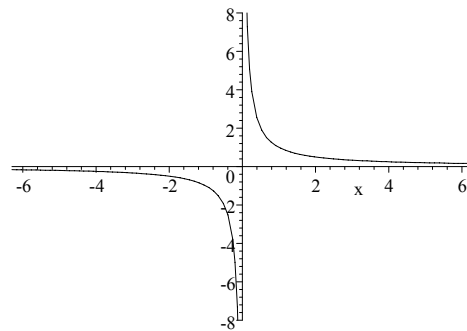
8.1 Rectangular (Funktionsgraphen)

Man schaue in 'settings', plot2d, rectangular den x -Bereich nach und ändere ihn passend. Anschließend setze man den Befehl 'plot2d, rectangular' auf den betreffenden Rechenausdruck an. Dann erscheint der Graph. Achtung, y -Bereich einschränken besonders beim Auftreten von Ploen, sonst sieht man nichts! Dazu Bild anklicken und auf blaues Fenster unten rechts klicken. Nun kann man unter 'view' das Feld 'default' anklicken und dann den y -Bereich wählen.

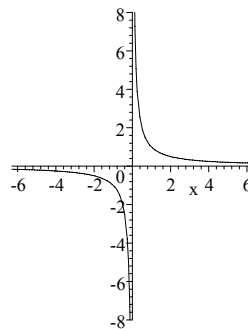
Probieren wir das aus mit $1/x$:



So sieht die Grafik aus, nicht erschrecken, sondern wie beschrieben y -Bereich auf -8 bis 8 wählen, dann erscheint:



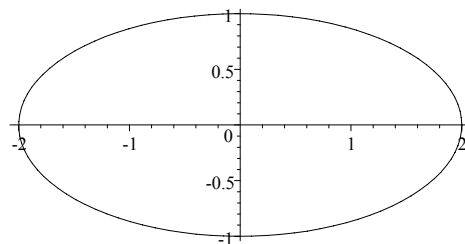
Man beachte die Stauchung, man kann 'equal scaling' wählen unter 'axes', um die Steigungen im Original zu finden:



Weitere Optionen sind da, schauen Sie nach und probieren aus. Hier noch der Hinweis: Um die Grafik sauber vom Text zu trennen und genau an der gewünschten Textstelle die Grafik zu haben, setze man unter 'frame' auf 'displayed'. Das ist hier jeweils geschehen.

8.2 Parametric (Parametrisierte Kurven)

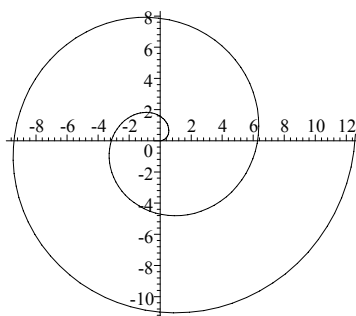
Hier setze man den Bereich für den freien Parameter unter 'settings', 'plot2d', 'parametric' wie gewünscht. Nun wende man den Befehl 'plot2d' mit dem Zusatz 'parametric' auf z. B. $(2 \cos t, \sin t)$ an, Resultat (nach 'equal scaling'):



Das ist die zu erwartende Ellipse mit Halbachsenlängen 2 und 1.

8.3 Polar (Polare Darstellung)

Dabei hat man sich vorzustellen, dass zu jedem Winkel t ein Punkt durch $\vec{x}(t) = f(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bestimmt wird. Das ergibt mit $f(t) = t$, also den Befehl 'plot2d' angesetzt auf den Ausdruck t , folgendes Bild der archimedischen Spirale nach 'equal scaling':



$|f(t)|$ ist also der Radius in Abhängigkeit vom Winkel t , und MAPLE stellt auf den Befehl 'plot2d, polar' die wie oben mit $\vec{x}$ parametrisierte Kurve dar, nach Eingabe des Ausdrucks $f(t)$. Stellen Sie sich vor, wie Sie mit solchen Mitteln eine immer schneller nach außen wandernde Spirale basteln können. Was passiert, wenn man $f(t)$ durch $-f(t)$ ersetzt?

8.4 Implicit

Eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ kann man auch mit einer Gleichung beschreiben, z.B. den einfachsten Kreis mit $x^2 + y^2 = 1$. 'Implizite Gleichung' heißt das, weil man gewöhnlich nicht nach x oder y auflösen kann. Aber es ist ohne weiteres möglich, mathematisch daraus die betreffende Kurve zu produzieren. MAPLE tut das allerdings langsam und nicht sehr befriedigend. Dennoch kann man immerhin Information erhalten, wie so etwas aussieht in nicht so offensichtlichen Fällen wie eine Ellipse. Der Befehl 'plot2d, implicit' wird eben auf eine solche Gleichung angesetzt.

9 plot3d (Graphen und Flächen im dreidimensionalen Raum)

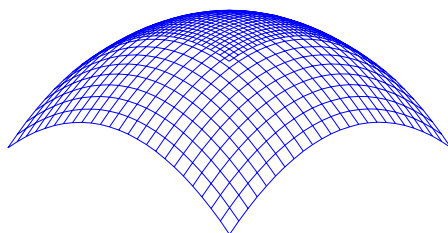
Hier gibt es entsprechende Optionen wie im zweidimensionalen Fall:

9.1 Rectangular (Graphen von Funktionen zweier unabhängiger Veränderlicher)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$. Eine Funktion

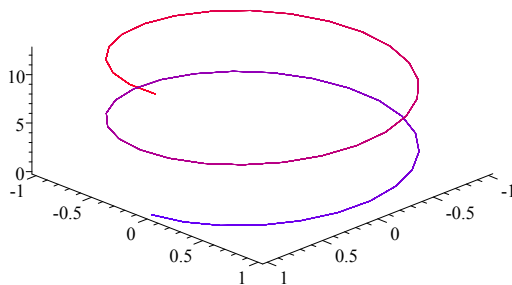
$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Der plot3d - Befehl mit der Option 'rectangular' zeichnet den Graphen von f , das ist definitionsgemäß die Punktmenge $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ als Gebirgsfläche (z - Koordinaten für die Funktionswerte). Wieder kann man unter 'settings' den Definitionsbereich einstellen. Beispiel: $f(x, y) = -x^2 - y^2$ (wie üblich setzt man den Befehl nur auf den Rechenausdruck an):



9.2 Tube (Raumkurven als Schläuche zeichnen)

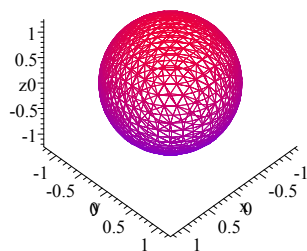
Die Bahn einer parametrisierten Kurve wie die Schraubenlinie zu $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ kann man damit zeichnen: $(\cos t, \sin t, t)$



(Farbig kommt die Sache besser heraus.)

9.3 Implicit (Flächen zu impliziten Gleichungen $f(x, y, z)=0$)

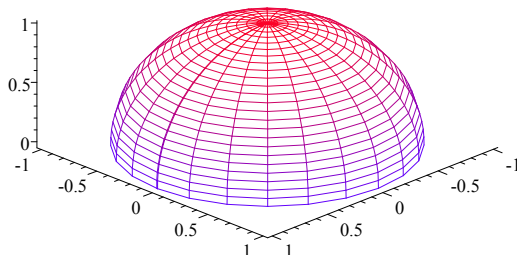
Das funktioniert prinzipiell analog zum zweidimensionalen Fall, in dem $f(x, y) = 0$ eine Kurve definiert, allerdings auch analog schlecht. Versuchen wir es mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:



Schöner bekommt man das hin, nämlich mit einem angemesseneren Netz, wenn man folgenden Befehl verwendet:

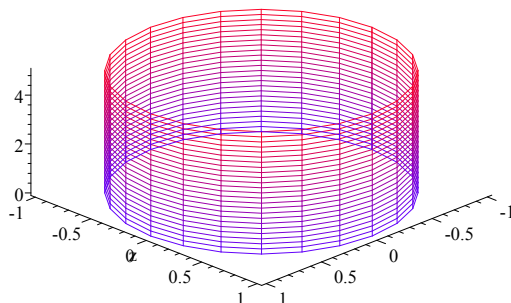
9.4 Spherical (in Polarkoordinaten definierte Flächen)

Die dreidimensionalen Polarkoordinaten r , θ , ϕ sind: r = Abstand zum Ursprung, θ = Winkel zur z -Achse (von der Positivrichtung der z -Achse an gemessen), also $0 \leq \theta \leq \pi$, ϕ = Winkel (von der Positivrichtung der x -Achse an gemessen) der Projektion auf die xy -Ebene, also der Polarwinkel der xy -Ebene. Also $0 \leq \phi < 2\pi$. So beschreibt dann $(1, \theta, \phi)$ die Oberfläche der Einheitskugel. Jetzt müssen wir nur noch daran denken, dass bei MAPLE die Bezeichnungen θ, ϕ genau vertauscht sind, schreiben also: $(1, \phi, \theta)$ und erhalten bei Einschränkung von ϕ auf $0 \leq \phi \leq \pi/2$ korrekt die obere Halbkugel:



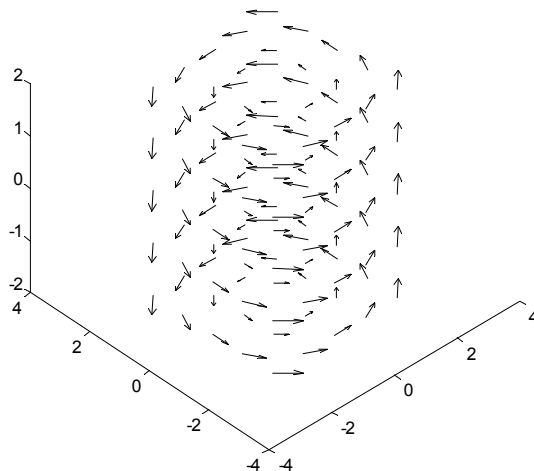
9.5 Cylindrical (Flächen in Zylinderkoordinaten)

Die Zylinderkoordinaten sind die Polarkoordinaten der Ebene zusammen mit der z -Koordinate, also beschreibt $(1, \phi, z)$ die Zylinderoberfläche, versuchen wir das:



9.6 Gradient und Vector Field

(Vorsicht, diese Befehle brauchen lange Zeiten!) Ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$. Deutung: An jedem Punkt des Raums in D wird ein Vektor angeheftet. So hat man sich etwa Kraftfelder vorzustellen. Für $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ ergibt das - Geschwindigkeitsfeld einer Drehbewegung!):



Insbesondere hat man zu einem Skalarfeld $s(x, y, z) = \dots$ (Rechenausdruck für eine Zahl in x, y, z) ein Vektorfeld, das Gradientenfeld. Zum Ausdruck $s(x, y, z)$ wird mit der Option 'Gradient' eben dies Feld gezeichnet, also implizit auch der Gradient berechnet.

10 Rechnen mit Einheiten (Units) mit MAPLE

10.1 Grundlegendes zum Rechnen mit Einheiten

Eine physikalische Größe ist ein Produkt $Zahl \cdot Einheit$, Beispiele: 220 V, 6400 km. Bei Einheitenwechsel ergibt sich ein Zahlfaktor, etwa: 1 km = 1000 m. Entsprechend sind $6400 \text{ km} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Grundlegend für das Rechnen mit Einheiten: Man rechnet mit ihnen wie mit Zahl Faktoren, also z.B.:

$$\begin{aligned} 2 \text{ m} + 10 \text{ m} &= 12 \text{ m}, \text{ analog zu } 2x + 10x = 12x, \\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s} &= \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ wie gewöhnliches Kürzen,} \\ 2 \text{ A} \cdot 3 \text{ V} &= 6 \text{ V A} = 6 \frac{\text{N m}}{\text{s}} = 6 \text{ W} \end{aligned}$$

Man hat daher folgende allgemeinen Grundregeln:

1. Addition und Subtraktion bei Größen mit Einheiten macht nur Sinn bei gleichen Einheiten, das Resultat hat wieder dieselbe Einheit.
2. Multiplikation bzw. Division von Größen mit Einheiten ist sinnvoll und führt zu Größen mit dem entsprechenden Einheitenprodukt bzw. Einheitenquotienten.

Daraus folgt die nützliche **Einheitenkontrolle beim Rechnen:** Hat man etwa einen komplizierten Wechselstromwiderstand ausgerechnet, so kann (i ist die reine komplexe Zahl, R ein Ohmscher Widerstand (Einheit:

Ohm Ω , C eine Kapazität (Einheit: Farad, $1\text{ F} = 1\frac{\text{s}}{\Omega}$), L eine Induktivität (Einheit: Henry, $1\text{ H} = 1\Omega\text{s}$), ω eine Kreisfrequenz, Einheit: s^{-1})

$$\frac{R}{(1 - \omega^2 LC)^2 + R^2 \omega^2 C^2} (1 + i(\omega L(1 - \omega^2 LC) - R^2 \omega C))$$

korrekt sein, weil $\omega^2 LC$ die Einheit 1 hat, d.h. einheitenfreie Zahl ist, ebenso $R^2 \omega^2 C$, schließlich $R^2 \omega C$ ebenso wie ωL und R die Dimension eines Widerstandes haben, also Ω (Ohm oder Vielfache davon). Jede falsche Potenz von ω oder R, L, C würde dagegen sofort einen Fehler in der Rechnung aufzeigen, da die Einheitenkontrolle nicht mehr passiert wird.

10.2 Schreiben von Einheiten und Rechnen mit Einheiten in Scientific Workplace (SWP)

Man kann in SWP Einheiten schreiben und mit Einheiten rechnen. Das Schreiben geht so: Man schreibt u (im Mathematikmodus), es erscheint also rot, dann kommt ein Buchstabe bzw. eine Buchstabenfolge für die Einheit. Die Sache ist gelungen, wenn die gewöhnliche Einheitenbezeichnung in grüner Schrift (!) erscheint. Eine Größe schreibt sich dann als Zahl (im Mathematikmodus!), gefolgt von grün geschriebener Einheit. Damit kann man dann ganz normal rechnen, also etwa

$$10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3\text{ s} = 30\text{ m},$$

über die vertrauten Befehle wie 'evaluate' und 'simplify'. Aber mehr noch: Auch die Befehle zum Lösen von Gleichungen funktionieren, man kann sie z.B. zur Abfrage von Einheiten verwenden:

$$1\text{ F}^{-1} = x\Omega, \text{ Solution is: } \left\{ x = \frac{1}{\text{s}} \right\}, \text{ also gilt}$$

$$1\text{ F} = 1 \frac{\text{s}}{\Omega}.$$

Wie ist die Beziehung zwischen Joule (eine Energieeinheit) und Watt (eine Leistungseinheit) um? $1\text{ J} = x\text{ W}$, Solution is: $\{x = \text{s}\}$, also $1\text{ J} = 1\text{ W s}$. Sehr praktisch: Man kann auch Einheitengleichungen dem Befehl 'Check Equality' unterziehen, er liefert etwa bei $\text{Nm} = \text{J}$: is true.

Einige Buchstabenfolgen für das Schreiben von Einheiten: Stets mit u (rot) beginnen, gleich anschließend den Code für die Einheit schreiben - man beachte Klein- und Großschreibung). Für manche braucht man nur einen Buchstaben, etwa Farad: Großes F nach ' u ' schreibt man ' F ', es erscheint das grüne F Analog Newton, N. Die meisten benötigen jedoch eine Kombination: ' me ' für Meter, m, ' se ' für Sekunde, s, ' ohm ' für Ω , ' Wa ' für Watt, W, ' Co ' für Coulomb, C, ' Pa ' für Pascal, $1\text{ Pa} = 1\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, Druckeinheit (Kraft pro Fläche, Einheiten Newton und m^2). Weitere nützliche: ' kg ' und ' gr ' für kg und g. Exponenten, Produkte und Quotienten bei Einheiten schreibt man wie auch sonst im Mathematikmodus.

Einige mit SWP gerechnete Beispiele: Wie folgt die Erdbeschleunigung auf Meereshöhe bei einem Erdradius von 6400 km und einer Erdmasse von $5.98 \cdot 10^{24}\text{ kg}$ mit der Gravitationskonstanten $G = 6.67259 \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$ aus dem Gravitationsgesetz? Mit 'simplify' kommt:

$$\frac{5.98 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{6378^2\text{ km}^2} \cdot 6.67259 \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2} = 9.809042 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Das kann man sogar noch weiter betreiben: Die mittlere Beschleunigung durch die Anziehungskraft der Erde im Bereich von 10000 km – 6378 km = 3622 km über Meereshöhe bis zur Meereshöhe beträgt

$$\frac{1}{(10000 - 6378)\text{ km}} \int_{6378}^{10000} \left(\frac{5.98 \cdot 10^{24}\text{ kg}}{x^2\text{ km}^2} \cdot 6.67259 \times 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2} \right) \text{ km} dx$$

$$= 6.256207 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Wenn wir nunmehr die Fallzeit **ungenau** grob so bestimmen, dass wir die gerade berechnete mittlere Beschleunigung als **konstant** während des Falls vorliegend annehmen, so erhalten wir:

Die Fallzeit beträgt näherungsweise

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 3622\text{ km}}{6.256207 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 1076.053\text{ s}.$$

Sie ist so immer noch (deutlich) zu kurz angegeben - warum? Mit der konstanten Erdbeschleunigung am Erdboden gerechnet erhielte man eine Fallzeit von

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 3622 \text{ km}}{9.809042 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 895.36 \text{ s, viel zu kurz.}$$

Später werden wir sehen, wie man das Problem genauer angehen kann - es handelt sich um ein Differentialgleichungssystem.

Auch das kommt richtig mit den Einheiten heraus. **Allerdings sollte man so nicht von Hand rechnen - der Grund: Die Einheiten sind etwas Triviales gegenüber den etwa zu rechnenden Integralen, auch in SWP gibt es zu viel Schreibaarbeit. Stattdessen führe man Buchstaben ein, m für die Erdmasse, G für die Gravitationskonstante. Weiter noch h_1, h_2 für die beiden Höhen. Dann hat man zu rechnen (und ein viel allgemeineres Resultat - und beachten Sie: Hier steht *alles*, was mit geringsten Kenntnissen der Integralrechnung **von Hand** zu rechnen und zu schreiben wäre!):**

$$\frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} \frac{mG}{x^2} dx = mG \left[-\frac{1}{x} \right]_{h_1}^{h_2} = \frac{mG}{h_1 h_2}.$$

Wie einfach ist das! Nun setzt man etwa für das Beispiel oben die Zahlenwerte in den **passenden** Einheiten (d.h. hier m, kg, s ein, weiß, was für eine Einheit herauskommt und arbeitet nur mit den absoluten Zahlen:

$$\frac{mG}{h_2 h_1} = \frac{5.98 \cdot 10^{24} \cdot 6.67259 \times 10^{-11}}{6378 \cdot 10000 \cdot 10^6} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = 6.256207 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right].$$

Widerstand eines Reihenschwingkreises bei $\nu = 50 \text{ Hz}$, also $\omega = 50 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1}$, $C = 1 \text{ mF}$, $L = \frac{1}{10} \text{ H} = \frac{1}{10} \Omega \text{ s}$ und $R = 100 \text{ m}\Omega$:

$100 \text{ m}\Omega + i \cdot 50 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1} \cdot \frac{1}{10} \text{ H} + \frac{1}{i \cdot 50 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1} \cdot 1 \text{ mF}} = (0.1 + 28.232i) \Omega$. Der Betrag der komplexen Zahl gibt als reellen Wert das Verhältnis: Betrag der Spannung : Betrag der Stromstärke. Auch hier gilt wieder die Bemerkung zum Rechnen ohne Einheiten, wenn man mit Komplizierterem zu tun hat.

Fazit: Niemals rechne man wirklich mit Einheiten, sondern nur mit absoluten Zahlen, lediglich nutze man die Möglichkeiten von SWP, um Einheitengleichungen zu verifizieren und zu finden. Nach Rechnung ohne Einheiten bringe man erst im Ergebnis die Einheit an, achte jedoch beim Einsetzen von Zahlenwerten darauf, dass die Einheiten zueinander passen, füge bei auftretenden andersartigen Einheiten die entsprechenden Zahlfaktoren ein, wie im Beispiel 10^3 jeweils bei den Angaben der Höhen in km, für das Produkt also 10^6 .

10.3 Rechnen mit konkreten Zahlen MAPLE, praktische Grundregeln

Die folgenden Regeln geben eine gewisse Anleitung, Regeln 1 bis 4 gelten auch schon für die Arbeit mit dem Taschenrechner. 5 und 6 erst sind spezifisch für MAPLE bzw. MAPLE im Rahmen von SWP. Allerdings werden wir Nummern 2 und 3 im Hinblick auf SWP noch etwas ergänzen.

1.	Zuerst entscheiden: Wäre besser von Hand zu rechnen?
	vielfach: ein Teil von Hand, ein anderer mit dem Rechner !
2.	Auch bei Rechnung in MAPLE: <i>Abkürzende Buchstaben nutzen</i> (Definitionen!)
	ohnehin für allgemeine Probleme, <i>aber auch für konkrete:</i>
	a. für konkrete Zahlenwerte
	b. für konkrete Zahlenwerte mit Einheit
3.	In SWP / MAPLE und auch schon mit dem Taschenrechner die Rechengenauigkeit nutzen und viel weniger Stellen im Text schreiben
4.	Niemals eine ungenaue Zahl wieder eingeben oder kopieren für eine Rechnung, ebenso beim Umgang mit SWP die eingebauten Naturkonstanten nutzen.
5.	In SWP die automatische Funktion des Formelrechnens nutzen.

Ergänzungen zu 2. und 3.

Wir definieren etwa: $G = 6.67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ und $m = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, weiter $h_1 = 6378 \text{ km}$, $h_2 = 6379 \text{ km}$, jeweils durch Ansetzen von 'define' auf jede dieser Gleichungen. Nunmehr können wir Ausdrücke wie $\frac{mG}{h_1 h_2}$ (mittlere Erdbeschleunigung zwischen 1 km Höhe über dem Meer und Meereshöhe) auswerten mit 'simplify'. Resultat: $9.8075 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Übrigens lohnt es sich, in Beispielen wie diesem zwei mal 'simplify' hintereinander auszuführen, da erst mit dem zweiten Schritt die Vereinheitlichung der Längeneinheiten 'm' und 'km' zu 'm' vorgenommen wird. Dazu: Mit einer vernünftig niedrigen Einstellung für die Stellenzahl bei numerischer Anzeige kann man solche Resultate günstig darstellen. (Im vorigen Abschnitt waren es zu viele Stellen!)

Bemerkung zur Genauigkeit der Naturkonstanten: Konstanten wie G (Gravitationskonstante) sind durch Experimente gemessen, also nicht genau, sondern mit kleinem Fehler behaftet, in einem guten gängigen Physik-Lehrbuch finden Sie etwa: $G = (6.6726 \pm 0.00009) 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Hinter dem Zeichen $\pm$ finden Sie den 'mittleren' Fehler, mit dem man also zu rechnen hat. Dazu später mehr. Das bedeutet in diesem Falle, dass man die Ziffern 6.672 für genau halten kann. Beachten Sie in diesem Beispiel den Faktor 10^{-11} , dann können Sie ermessen, dass es schon nicht so selbstverständlich ist, diese Konstante auch nur so genau zu kennen! Entsprechend finden Sie in SWP auch bei Einstellung höherer Dezimalstellenzahlen nicht mehr Stellen von G . Daher sollte man zuweilen bei Rechnungen anschauen, wie weit sich bereits solche Messfehler auswirken könnten.

Zu 4. und 5.

So genau man sie hat (es kann aber durchaus noch zukünftige Verbesserungen geben!), findet man die fertig eingebauten Naturkonstanten. Rechnet man mehrfach darauf zurückgreifend damit, sollte man sie zuvor wie oben geschehen durch eine Definition mit abkürzendem Buchstaben bezeichnen und nur noch den schreiben - selbstverständlich sollte man die übliche Bezeichnung aus ordentlichen Physiklehrbüchern wählen. Insbesondere gebe man niemals so etwas Ungenaues wie $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ für G ein, ebenso, wie man mit $\sqrt{2}$ statt 1.414 rechnen sollte.

Das Rechnen in SWP erlaubt nicht nur die Formulierung von allgemeinen Definitionen und das Auswerten von allgemeinen sowie konkreten Einsetzungen. Dazu hier noch einmal ein Beispiel: Definiert man $f(x) = x \sin(x)$ mit 'define', so erhält man mit $f(x + \frac{1}{10})$ konsequent $(x + \frac{1}{10}) \sin(x + \frac{1}{10})$, ebenso $f(\pi/4) = \frac{1}{8} \pi \sqrt{2}$. Weiter $f'(x) = \sin x + x \cos x$, usw., usw. Sondern SWP erlaubt auch, einen längeren Rechenweg *automatisch* mit anderen Anfangseingaben zu konkretisieren. Das funktioniert so:

Man schreibt unter 'insert', 'formula' einen Rechenausdruck (das ist natürlich keine Formel!). Dann erscheint das im Text gelblich unterlegt. Wenn man anschließend irgendeine Konkretisierung der beteiligten unabhängigen Variablen oder äußeren Parameter vornimmt, so wird das eingesetzt und ausgewertet (typisch hat man als angekoppelte Aktion 'evaluate' oder 'simplify'.