Image inverse pour les $\mathcal{D}$-modules equivariants sur les espaces analytiques rigides

Théo Mangenot and Tobias Schmidt

Résumé

Soit G un groupe de Lie p-adique. On construit le foncteur image inverse pour les $\mathcal{D}$-modules equivariants coadmissibles sur les G-espaces rigides analytiques. On donne une application à la théorie de localisation de Beilinson-Bernstein pour les G-représentations localement analytiques.

Mots clés : Variétés analytiques rigides, groupes de Lie p-adiques, $\mathcal{D}$-modules equivariants, image inverse.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Opérateurs différentiels sur une variété rigide **4**
- 2.1 Opérateurs différentiels sur une algèbre affinoïde 4
- 2.2 Opérateurs différentiels sur une variété rigide 7
- 2.3 Foncteur image inverse de $\mathcal{D}$-modules 9

3 Structures d'espaces **11**
- 3.1 Espaces localement convexes 11
- 3.2 Algèbres de Fréchet-Stein et modules coadmissibles 13
- 3.3 Espaces bornologiques 14
- 3.4 Nucléarité et pseudo-nucléarité 19

4 Opérateurs G-équivariants **20**
- 4.1 Anneau de groupe tordu et trivialisation 20
- 4.2 Action de groupe sur une algèbre affinoïde 21
- 4.3 Opérateurs G-équivariants sur une algèbre affinoïde 23
- 4.4 Opérateurs d'ordre fini 25
- 4.5 $\mathcal{D}$-modules G-équivariants coadmissibles 30

5 Foncteur image inverse de G-$\mathcal{D}$-modules coadmissibles **32**
- 5.1 Bimodule de transfert équivariant local 32
- 5.2 Le foncteur image inverse 37

6 Application à la théorie de localisation de Beilinson-Bernstein **42**

Références **45**

1 Introduction

Le foncteur image inverse de faisceaux est un outil classique de la géométrie algébrique et apparaît dans des situations très variées. Il est toujours intéressant d'avoir des propriétés de faisceaux qui soient préservées par ce foncteur, et la construction de celui-ci diffère parfois en fonction de ces critères. On s'intéresse bien souvent au foncteur image inverse de faisceaux de modules, de $\mathcal{O}$-modules par exemple, ou dans le cas qui nous intéresse de $\mathcal{D}$-modules, où $\mathcal{D}$ désigne les opérateurs différentiels algébriques d'ordre fini. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés algébriques lisses. Alors

$$\mathcal{D}_{Y\to X} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$$

est un $(\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{D}_Y)$-bimodule de façon naturelle. On peut alors définir pour tout $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ le $\mathcal{D}_Y$-module

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{D}_{Y\to X} \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M}.$$

Ainsi f^* est appelé le foncteur image inverse de $\mathcal{D}_X$-modules par f. Dans le cadre complexe et d'un morphisme lisse, ce foncteur préserve la cohérence des $\mathcal{D}$-modules [14]. La raison est que le $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{D}_{Y\to X}$ lui-même est cohérent dans ce cas.

Dans le cadre de la géométrie analytique rigide, on fixe K un corps non-archimédien complet de caractéristique mixte $(0,p)$. Ardakov-Wadsley ont introduit [3] le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_X$ des opérateurs différentiels sur une K-variété analytique rigide lisse X, qui consiste en des opérateurs d'ordre potentiellement infini[1] , qui se prête donc bien à la topologie non-archimédienne. Une caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_X$-modules qu'on souhaite étudier est leur coadmissibilité, un bon analogue de la cohérence pour les $\widehat{\mathcal{D}}$-modules. La catégorie $\mathcal{C}_X$ des modules coadmissibles est abélien. Une construction d'un foncteur image inverse de $\widehat{\mathcal{D}}$-modules a été fait par Bode [9], qui préserve la coadmissibilité, si le morphisme en question est lisse. Cette construction se fait par l'introduction des K-espaces bornologiques. La propriété essentielle des modules bornologiques est leur bon fonctionnement par passage à la complétion : Soient E une K-algèbre bornologique et M un E-module bornologique. En notant $\widehat{(-)}^b$ le foncteur de la complétion bornologique, $\widehat{M}^b$ est un $\widehat{E}^b$-module bornologique.

Le résultat clé de Bode est le théorème d'algébrisation $\widehat{\mathcal{D}}^b = \widehat{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}$ des opérateurs différentiels est obtenue en complétant bornologiquement l'algèbre $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels d'ordre fini. Il suffit alors de travailler sur les $\mathcal{D}$-modules bornologiques puis de passer au complété pour obtenir des résultats sur les $\widehat{\mathcal{D}}$-modules. Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse de variétés analytiques rigides lisses. On définit de cette façon un $(\widehat{\mathcal{D}}_Y, f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_Y)$-bimodule

$$\widehat{\mathcal{D}}_{Y\to X} := \mathcal{O}_Y \widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_X,$$

qui est coadmissible sur $\mathcal{D}_Y$ dans le cas d'un morphisme lisse. Si f est lisse

$$f^*\mathcal{M} := \widehat{\mathcal{D}}_{Y\to X} \widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\widehat{\mathcal{D}}_X} f^{-1}\mathcal{M}.$$

donne un foncteur $\mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_Y$ [9].

Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continument sur X. Dans [2] Ardakov introduit la catégorie $\mathcal{C}_{X/G}$ des $\widehat{\mathcal{D}}$-modules G-équivariants coadmissibles. Une motivation est la théorème de localisation de Beilinson-Bernstein pour $\mathcal{C}_{X/G}$ dans le cas d'un groupe semi-simple G et sa variété de drapeaux X, et son application à la théorie des représentations localement analytiques de G. Le but de notre travail est de construire le foncteur image inverse pour des $\widehat{\mathcal{D}}$-modules G-équivariants coadmissibles, en généralisant le cas non-équivariant $G = 1$ de Bode.

Le premier obstacle à un telle construction est locale. L'existence locale du bimodule de transfert equivariant et sa coadmissibilité sont plus délicate à établir en présence d'une action de groupe. Donnons quelques détails. Pour un affinoïde U de X et un sous-groupe ouvert compact H de G stabilisant U, Ardakov introduit dans [2] l'algèbre de groupe tordu complète $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$. Elle contient l'algèbre des opérateurs différentiels $\widehat{\mathcal{D}}_X(U)$ et reçoit une flèche de H. Pour certaines couples (U,H) cette algèbre est de Fréchet-Stein et un $\widehat{\mathcal{D}}_X$-module G-équivariant est coadmissible s'il est localement un $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-module coadmissible. Notre premier résultat est un théorème d'algébrisation équivariant local :

Théorème A (4.28)**.** *Soient U un sous-espace affinoïde de X et H un sous-groupe ouvert compact de G stabilisant U. On a*

$$\widehat{\mathcal{D}_X(U) \rtimes H}^b \simeq \widehat{\mathcal{D}}(U,H).$$

[1] Dans le cas d'une variété de drapeaux adique, le faisceau correspondant à $\widehat{\mathcal{D}}_X$ a été indépendamment introduit et étudié dans [15] où il est noté $\mathscr{D}_\infty$.

La preuve de ce théorème est similaire au cas $G = 1$, avec une difficulté supplémentaire : dans un premier temps, on établit que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}(U)_K \rtimes H$ est pseudo-nucléaire, ce qui entraîne que sa complétion de Hausdorff coïncide avec sa complétion bornologique. Ensuite on construit une suite de sémi-normes (q_k) sur $\widehat{\mathcal{D}}(U)_K \rtimes H$ et montre que leurs complétions définissent la structure de Fréchet-Stein de $\widehat{\mathcal{D}}(U, H)$. La difficulté par rapport au cas $G = 1$ (où tous les q_k sont des normes) est de contrôler les noyeaux $\ker q_k$.

Le théorème permet de définir le bimodule de tranfert équivariant local $\widehat{\mathcal{D}}^G_{A\to B} := B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{\mathcal{D}}(A, G)$ associé à un morphisme $A \to B$ lisse et G-équivariant entre des K-algèbres affinoïdes lisses muni d'une action d'un groupe compact G. Il s'agit d'un $(\widehat{\mathcal{D}}(B, G), \widehat{\mathcal{D}}(A, G))$-bimodule qui est coadmissible sur $\widehat{\mathcal{D}}(B, G)$. Cela donne un foncteur $f^* : \mathcal{C}_{X/G} \to \mathcal{C}_{Y/G}$ où $X = \mathrm{Sp}(A)$ et $Y = \mathrm{Sp}(B)$.

Le deuxième obstacle est qu'il n'y a pas de bimodule de tranfert équivariant global, donc la globalisation est plus compliquée : contrairement au cas $G = 1$, on ne dispose pas d'un faisceau $\widehat{\mathcal{D}}(\cdot, G)$ défini globalement. Pour expliquer la solution, soit G un groupe de Lie p-adique agissant continument sur des espaces rigides lisses X et Y. Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse G-équivariant. On définit tout d'abord le foncteur f^* globalement au niveaux des $\mathcal{O}$-modules

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_Y\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}$$

pour $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$ et montre qu'il prend ses valeurs dans les $\mathcal{D}_Y$-modules G-équivariants. Ensuite, on montre que f^* coïncide localement avec la construction précédente, ce qui donne le résultat principal suivant.

Théorème B (5.17)**.** *Pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$, la formation de $f^*\mathcal{M}$ donne un foncteur*

$$f^* : \quad \mathcal{C}_{X/G} \longrightarrow \mathcal{C}_{Y/G}$$

qu'on appelle foncteur image inverse de $\mathcal{D}$-modules équivariants coadmissibles par f.

Le foncteur f^* est compatible avec la composition. Soit $e : Z \to Y$ un deuxième morphisme lisses entre des espaces lisses, alors $(f \circ e)^* \simeq e^* \circ f^*$, comme foncteurs de $\mathcal{C}_X$ à $\mathcal{C}_Z$.

On termine l'article avec une application du foncteur image inverse à la théorie de localisation de Beilinson-Bernstein. Pour cela, soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique connexe semi-simple simplement connexe et déployé sur K et $\mathbb{B} \subset \mathbb{G}$ un sous-groupe de Borel. Soit $\mathbb{P} \subset \mathbb{G}$ un sous-groupe parabolique contenant $\mathbb{B}$. Soient $\mathfrak{b}, \mathfrak{p}, \mathfrak{g}$ les algèbres de Lie correspondantes. Soit $Y = (\mathbb{G}/\mathbb{B})^{\mathrm{an}}$ et $X = (\mathbb{G}/\mathbb{P})^{\mathrm{an}}$ les variétés de drapeaux analytiques rigides correspondantes, avec leur action naturelle du groupe de points rationnels $\mathbb{G}(K)$. La projection $g\mathbb{B} \mapsto g\mathbb{P}$ donne un morphisme lisse $f : Y \to X$ qui est $\mathbb{G}(K)$-équivariant. Soit G un groupe de Lie p-adique et $\sigma : G \to \mathbb{G}(K)$ un morphisme de groupes continu.

Théorème C (6.4)**.** *Le diagramme de foncteurs suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{X/G} \arrow[rr, "f^*"] & & \mathcal{C}_{Y/G} \\
\{M \in \mathcal{C}_{U(\mathfrak{g},G)} : \mathfrak{m} \cdot M = 0\} \arrow[u, "Loc_X^{U(\mathfrak{g},G)}"] \arrow[rr, "\subseteq"] & & \{M \in \mathcal{C}_{U(\mathfrak{g},G)} : \mathfrak{m}_0 \cdot M = 0\} \arrow[u, "Loc_Y^{U(\mathfrak{g},G)}"']
\end{tikzcd}$$

Ici, $Loc_Y^{U(\mathfrak{g},G)}$ est l'équivalence de Beilinson-Bernstein pour les modules $\mathcal{D}$-modules équivariants coadmissibles dans sa forme [2, Thm. 6.4.9]. La définition de l'algèbre $U(\mathfrak{g}, G)$ est un peu trop technique pour cette introduction, mais soulignons que, dans le cas où $\mathbb{G}$ est défini sur une extension finie $\mathbb{Q}_p \subset L \subset K$ de $\mathbb{Q}_p$ et $G \subset \mathbb{G}(L)$ ouvert, l'algèbre est canoniquement isomorphe à l'algèbre des distributions localement analytiques $D(G, K)$ sur G à valeurs dans K. L'existence de l'équivalence $Loc_X^{U(\mathfrak{g},G)}$ est une conséquence de $Loc_Y^{U(\mathfrak{g},G)}$ et de propriétés du morphisme f. Finalement, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathbb{P}}$ est l'annihilateur dans $U(\mathfrak{g})$ du module de Verma parabolique classique du poids $2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho$ et $\mathfrak{m}_0 := \mathfrak{m}_{\mathbb{G}}$. On se réfère au texte principal pour plus de détails.

Finissons cette introduction en décrivant brièvement le contenu des sections individuelles. Après avoir rappelé des notions de base sur les variétés rigides et leurs opérateurs différentiels dans la section 2, on discute des résultats et compléments autour des espaces et algèbres localement convexes et bornologiques dans la section 3. Section 4 est le coeur technique de ce travail. On prépare la preuve du théorème A, qui est démontré dans 4.4. En 4.5 et 4.6 on prépare la globalisation. En 5.1 on établit d'abord quelques propriétés du bimodule de transfert équivariant local. En 5.2 on globalise et démontre le théorème B. L'application à la théorie de localisation se trouve en section 6.

Notations

Dans cet article, K désigne un corps non archimédien complet de caractéristique mixte $(0, p)$, d'anneau de valuation discrète R et d'uniformisant π. On note $|\cdot|$ sa norme et ν sa valuation, et $\overline{K}$ désigne la clôture algébrique de K. Sauf mention explicite, les modules sont supposés à gauche. Les anneaux et les algèbres mentionnés sont associatifs, unitaires excepté en ce qui concerne les algèbres de Lie, et sont généralement non commutatifs.

2 Opérateurs différentiels sur une variété rigide

2.1 Opérateurs différentiels sur une algèbre affinoïde

Le but de cette section est de rappeler la construction d'une algèbre des opérateurs différentiels d'ordre infini associé à une K-algèbre affinoïde munie d'un système local de coordonnées, cf. l'article [3] d'Ardakov-Wadsley, et de fixer quelques notations. Nos références pour la géométrie non archimédienne sont [11, 12].

Définition 2.1. *Soit A une K-algèbre affinoïde. Une sous-R-algèbre topologiquement de type fini $\mathcal{A}$ de A est un modèle formel de A si $A \simeq \mathcal{A} \otimes_R K$ en tant que K-algèbres.*

Un modèle formel de A existe toujours, car si $K\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle \twoheadrightarrow A$ est un morphisme surjectif, on peut choisir comme modèle formel l'image de $R\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle$ par ce morphisme.

Proposition 2.2. *Soient A une K-algèbre affinoïde et $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. Alors il existe sur A une norme de K-algèbre définissant la topologie de A tel que $\mathcal{A}$ est la boule unité de A, qu'on appelera la norme jauge de $\mathcal{A}$ sur A.*

Démonstration. En tant que R-algèbre topologiquement de type fini, il existe $k \in \mathbb{N}$ et un idéal I de $R\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle$ tel que $\mathcal{A} \simeq R\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle / I$. Comme K est R-plat, on a

$$A \simeq \mathcal{A} \otimes_R K \simeq (R\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle / I) \otimes_R K \simeq T_k/(K.I).$$

On munit ainsi $A \simeq T_k/(I \otimes_R K)$ d'une norme quotient, dont la topologie est équivalente à celle de A, et la boule unité pour cette norme est $R\langle \xi_1, \ldots, \xi_k \rangle / I \simeq \mathcal{A}$. □

La norme jauge de $\mathcal{A}$ sur A est définie pour tout $a \in A$ par $|a| = \inf_{r \in K} \{|r| \ , \ a \in r\mathcal{A}\}$.

Proposition 2.3. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux modèles formels de A. Alors $\mathcal{AB}$ est un modèle formel de A contenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, où $\mathcal{AB}$ consiste de sommes finies des éléments $ab, a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$.*

Démonstration. Voir [3], lemme 3.1. □

On fixe dans la suite une K-algèbre affinoïde A et un modèle formel $\mathcal{A}$ de A.

Les définitions suivantes sont présentes dans l'article [18] de Rinehart.

Définition 2.4. *Soient S un anneau commutatif et B une S-algèbre commutative. Une (S, B)-algèbre de Lie-Rinehart L, ou simplement (S, B)-algèbre de Lie, est une S-algèbre de Lie qui est aussi un B-module, muni d'un morphisme B-linéaire $\rho : L \to \mathrm{Der}_S(B)$ de S-algèbres de Lie, tel que en notant $[\cdot, \cdot]$ le crochet de Lie sur L on a*

$$\forall x, y \in L, \forall a \in B \ , \ [x, ay] = a[x, y] + \rho(x)(a)y.$$

Un premier exemple dans notre contexte, lorsque A est une algèbre affinoïde, est la (K, A)-algèbre de Lie Θ_A des K-dérivations continues sur A, munie du morphisme d'inclusion $\Theta_A \to \mathrm{Der}_K(A)$. Toute sous-$K$-algèbre de Lie de Θ_A qui en est également un sous-A-module est alors une (K, A)-algèbre de Lie par la composition des inclusions.

De la même façon, lorsque $\mathcal{A}$ est un modèle formel de A, l'algèbre $\Theta_{\mathcal{A}}$ des R-dérivations continues sur $\mathcal{A}$ est une $(R, \mathcal{A})$-algèbre de Lie. Et toute sous-R-algèbre de Lie de $\Theta_{\mathcal{A}}$ qui est également un sous-$\mathcal{A}$-module est une $(R, \mathcal{A})$-algèbre de Lie.

Définition 2.5. *Soient A une K-algèbre affinoïde, $\mathcal{A}$ un modèle formel de A et L une (K, A)-algèbre de Lie. Un sous-$\mathcal{A}$-module $\mathcal{L}$ de L est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de L si c'est une sous-$(R, \mathcal{A})$-algèbre de Lie, qui est de type fini sur $\mathcal{A}$ et que $K.\mathcal{L} = L$.*

Soit L une (S, B)-algèbre de Lie. Par son morphisme $\rho : L \to \mathrm{Der}_S(B)$ on associe à tout élément $b \in B$ et $l \in L$ l'opération $l(b) := \rho(l)(b)$. Ainsi dans le contexte de la définition précédente, un $\mathcal{A}$-réseau $\mathcal{L}$ de L stabilise $\mathcal{A}$ par l'opération ci-dessus, ce qu'on notera $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{L}$ est une R-algèbre de Lie elle vérifie aussi $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$.

Avec les mêmes notations, nous étudierons majoritairement le cas de $\mathcal{A}$-réseaux de Lie de la (K, A)-algèbre de Lie Θ_A. Pour synthétiser dans ce cas précis, un $\mathcal{A}$-réseau de Lie $\mathcal{L}$ de Θ_A est simplement une sous-R-algèbre de Lie de Θ_A qui est aussi un $\mathcal{A}$-module de type fini, qui stabilise $\mathcal{A}$ et tel que $K.\mathcal{L} = \Theta_A$.

Proposition 2.6. *Soit L une (S, B)-algèbre de Lie-Rinehart. Il existe une S-algèbre $U_B(L)$ et des morphismes $i_B : B \to U_B(L)$ de S-algèbres et $i_L : L \to U_B(L)$ de S-algèbres de Lie tels que*

$$\forall x \in L, \forall a \in B \ , \ i_L(ax) = i_B(a) i_L(x) \ \text{ et } [i_L(x), i_B(a)] = i_B(\rho(x)(a))$$

et qui vérifie la propriété universelle suivante : pour toute S-algèbre U, pour tout morphisme $j_B : B \to U$ de S-algèbres et pour tout morphisme $j_L : L \to U$ de S-algèbres de Lie tels que

$$\forall x \in L, \forall a \in B \ , \ j_L(ax) = j_B(a) j_L(x) \ \text{ et } [j_L(x), j_B(a)] = j_B(\rho(x)(a)),$$

il existe un unique morphisme de S-algèbres $\varphi : U_B(L) \to U$ tel qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & U & \\ B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[r, "i_B"'] & U_B(L) \arrow[u, "\varphi"] & L. \arrow[ul, "j_L"'] \arrow[l, "i_L"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Voir [18], section 2. ☐

Définition 2.7. *Soit L une (S, B)-algèbre de Lie-Rinehart. On appelle algèbre enveloppante de L la S-algèbre $U_B(L)$ vérifiant les propriétés de la proposition précédente.*

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion, on notera tout simplement $U(L)$ l'algèbre enveloppante de L. Soit A une algèbre affinoïde, on construit de cette façon l'algèbre $\mathcal{D}_A$ des opérateurs différentiels d'ordre fini de A, donnée par $\mathcal{D}_A := U(\Theta_A)$. Remarquons que le morphisme $i_A : A \to U(L)$ est toujours injectif, tandis que le morphisme $i_L : L \to U(L)$ est injectif lorsque L est un A-module libre.

Il nous reste alors à définir l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre infini.

Définition 2.8. *Soient A une K-algèbre affinoïde, $\mathcal{A}$ un modèle formel de A et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de Θ_A. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose*

$$D_k := \widehat{U(\pi^k \mathcal{L})} \otimes_R K = \widehat{U(\pi^k \mathcal{L})}_K$$

où $\widehat{\cdot}$ désigne la complétion π-adique. On pose

$$\widehat{\mathcal{D}}_A := \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} D_k.$$

Remarque. *La définition ci-dessus a bien du sens car les* $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *forment un système projectif. En effet pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on a une inclusion* $U(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \subset U(\pi^k\mathcal{L})$ *et on obtient par complétion* π*-adique un morphisme* $D_{k+1} \to D_k$ *qui fait de la famille* $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une famille projective.*

Définition 2.9. *Soit* A *une* K*-algèbre affinoïde. Un système local de coordonnées de* A *sur* K*, lorsqu'il existe, est une famille* $(x_1,\dots,x_n)$ *d'éléments de* A *tel que l'espace des différentielles de Kähler* Ω_A *de* A *sur* K *a pour* A*-base la famille* $(dx_1,\dots,dx_n)$*, c'est-à-dire*

$$\Omega_A = \bigoplus_{i=1}^{n} A.dx_i.$$

Remarque. *Un système de coordonnées* $(x_1,\dots,x_n)$ *de* A *permet d'obtenir une base* $(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n})$ *de* Θ_A*, où pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$ *l'élément* ∂_{x_i} *est l'image de* dx_i^* *par l'isomorphisme* $\mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A) \simeq \Theta_A$*. On écrira souvent que* $(x_i,\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est un système local de coordonnées, même si les* ∂_{x_i} *sont entièrement déterminés par les* x_i*.*

Pour une algèbre affinoïde A munie d'un système local de coordonnées, le cardinal de tout système de coordonnées de A est le même, il s'agit du rang du A-module libre Ω_A.

Proposition 2.10. *Soient* A *une algèbre affinoïde munie d'un système local de coordonnées* (x_i')*, et* $\mathcal{A}$ *un modèle formel de* A*. Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, en posant* $x_i = \pi^{-N}x_i'$ *pour tout* $i \in [\![1,n]\!]$*, le* $\mathcal{A}$*-module libre*

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}.\partial_{x_i} \subset \Theta_A$$

est un $\mathcal{A}$*-réseau de Lie, et* $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est un système local de coordonnées de* A*.*

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'on peut trouver un tel $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est un modèle formel, il existe un ensemble fini S de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \overline{\langle S\rangle_R}$. Comme $K.\mathcal{A} = A$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^{N_i}\partial_{x_i'}(S) \subset \mathcal{A}$. En prenant $N = \max N_i$ et $x_i = \pi^{-N}x_i'$ (et donc $\partial_{x_i} = \pi^N\partial_{x_i'}$) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors on a

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \overline{\langle \mathcal{A}\partial_{x_1}(S),\dots,\mathcal{A}\partial_{x_n}(S)\rangle_R} \subset \mathcal{A}.$$

Ainsi, les éléments de $\mathcal{L}$ sont des dérivations sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L} \subset \Theta_{\mathcal{A}}$. On montre alors qu'avec ce choix de $\mathcal{L}$, on a $[\mathcal{L},\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$. En effet, soient $a,b \in \mathcal{A}$ et $i,j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$[a\partial_{x_i}, b\partial_{x_j}] = a\partial_{x_i}b\partial_{x_j} - b\partial_{x_j}a\partial_{x_i} = \underbrace{a\partial_{x_i}(b)}_{\in\mathcal{A}}\partial_{x_j} - \underbrace{b\partial_{x_j}(a)}_{\in\mathcal{A}}\partial_{x_i} \in \mathcal{L}$$

et par linéarité du crochet de Lie, on constate que celui-ci stabilise $\mathcal{L}$. Ainsi $\mathcal{L}$ est une $\mathcal{A}$-sous-algèbre de Lie de $\Theta_{\mathcal{A}}$, c'est donc une $(R,\mathcal{A})$-algèbre de Lie-Rinehart. Puisque de plus $K.\mathcal{L} = \Theta_A$ et que $\mathcal{L}$ est de type fini, c'est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de Θ_A. □

Par cette proposition, on dira que quitte à redimensionner le système local de coordonnées, le $\mathcal{A}$-module libre $\mathcal{L}$ engendré par les $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie.

Proposition 2.11. *Soient* A *une* K*-algèbre affinoïde munie d'un système local de coordonnées* $(x_i,\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *et* $\mathcal{A}$ *un modèle formel de* A*. Supposons que le* $\mathcal{A}$*-module libre* $\mathcal{L}$ *engendré par les* $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est un* $\mathcal{A}$*-réseau de Lie. Alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, on a des injections* $D_{k+1} \hookrightarrow D_k$ *avec*

$$D_k \simeq \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\partial^\alpha \ ,\ a_\alpha \in A \ \text{et}\ a_\alpha\pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

et on a des injections $\widehat{\mathcal{D}}_A \hookrightarrow D_k$ *avec*

$$\widehat{\mathcal{D}}_A \simeq \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\partial^\alpha \ ,\ a_\alpha \in A \ \text{et}\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_\alpha\pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{A}$-réseau de Lie $\pi^k \mathcal{L}$ a pour base $(\pi^k \partial_{x_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ sur $\mathcal{A}$, donc

$$U(\pi^k \mathcal{L}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{A}.\pi^{k|\alpha|}\partial^\alpha$$

où $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Avec une telle base, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{U(\pi^k \mathcal{L})} \simeq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \pi^{k|\alpha|}\partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in \mathcal{A} \text{ et } a_\alpha \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

et donc

$$D_k = \widehat{U(\pi^k \mathcal{L})}_K \simeq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \text{ et } a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Le système projectif $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a pour morphismes de transition les injections $D_{k+1} \hookrightarrow D_k$, où chaque D_k est isomorphe à un sous-espace de l'espace des séries d'opérateurs. Dans ce contexte, leur limite projective $\widehat{\mathcal{D}}_A$ est isomorphe à l'intersection de ces espaces, donc

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{D}}_A &\simeq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \text{ et } a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \\ &\simeq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \ a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

Reprenons les hypothèses de la proposition précédente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en fixant une norme $|\cdot|$ sur A, on a une norme sous-multiplicative sur D_k notée $|\cdot|_k$ et définie pour tout $s \in d_k$ par

$$|s|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left| a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \right| \text{ où } s = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha.$$

On prend sur A la norme jauge pour son modèle formel $\mathcal{A}$ définie en proposition 2.2. Comme la boule unité de A pour cette norme est $\mathcal{A}$, on constate que la boule unité de D_k pour la norme $|\cdot|_k$ est $\widehat{U(\pi^k \mathcal{L})}$.

Par les injections $\widehat{\mathcal{D}}_A \hookrightarrow D_k$, on munit ainsi $\widehat{\mathcal{D}}_A$ d'une suite de normes $(|\cdot|_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui définissent sa topologie.

Proposition 2.12. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le complété de $\widehat{\mathcal{D}}_A$ pour la norme $|\cdot|_k$ est isomorphe à D_k.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a une injection dense $\widehat{\mathcal{D}}_A \hookrightarrow D_k$. Comme D_k est complet pour sa norme $|\cdot|_k$, par passage au complété on a

$$\widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A}^{|\cdot|_k} \simeq D_k.$$

□

2.2 Opérateurs différentiels sur une variété rigide

Pour définir le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}$ sur une variété rigide lisse générale, nous rappelons quelques notions autour des G-topologies [11]. Soit $\mathfrak{T}$ une G-topologie sur un espace X. On fait référence à [11, 9.1.2 def.1] pour la notion d'une G-topologie $\mathfrak{T}'$ dite *légèrement plus fine que* $\mathfrak{T}$.

Proposition 2.13. *Soit $\mathfrak{T}$ une G-topologie sur un espace X tel que $\emptyset$ et X sont des $\mathfrak{T}$-ouverts. L'ensemble des G-topologies légèrement plus fines que $\mathfrak{T}$ possède un unique élément maximal. Cette G-topologie sur X vérifie*

1. *$\emptyset$ et X sont des ouverts admissibles.*
2. *Soient $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement admissible d'un ouvert admissible $U \subset X$, et $V \subset U$ tel que pour tout $i \in I$ l'ensemble $V \cap U_i$ est un ouvert admissible de X. Alors V est un ouvert admissible de X.*
3. *Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement d'un ouvert admissible $U \subset X$ par des ouverts admissibles tel que $\{U_i\}_{i \in I}$ admet un raffinement admissible. Alors $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement admissible de X.*

Démonstration. [11, 9.1.2 Prop.2]. □

Théorème 2.14. *Soient $\mathfrak{T}$ une G-topologie sur un ensemble X, et $\mathfrak{T}'$ une G-topologie légèrement plus fine que $\mathfrak{T}$. Alors tout faisceau sur $\mathfrak{T}$ s'étend de manière unique en un faisceau sur $\mathfrak{T}'$.*

Démonstration. [11, 9.2.3 Prop. 1]. □

Soit maintenant X un K-espace affinoïde. On rappelle que la topologie de Grothendieck faible X_w sur X est la G-topologie dont les ouverts sont les sous-domaines affinoïdes de X et les recouvrements sont les recouvrements finis par des sous-domaines affinoïdes.

Notation. *Soit X un espace affinoïde. On note X_{rig} la G-topologie maximale des G-topologies légèrement plus fines que X_w.*

- *Un sous-ensemble $U \subset X$ est un ouvert admissible pour X_{rig} s'il existe un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de U par des affinoïdes tel que pour tout morphisme d'espaces affinoïdes $\phi : Z \to X$ avec $\phi(Z) \subset U$, le recouvrement $\{\phi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ de Z admet un raffinement fini par des affinoïdes de Z.*
- *Un recouvrement $\{V_i\}_{i\in I}$ de $V \in X_{rig}$ est un recouvrement admissible pour X_{rig} si $V_i \in X_{rig}$ pour tout $i \in I$ et si pour tout morphisme d'espaces affinoïdes $\phi : Z \to X$ avec $\phi(Z) \subset V$, le recouvrement $\{\phi^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ de Z admet un raffinement fini par des affinoïdes de Z.*

Cette G-topologie sera toujours celle employée sur les espaces affinoïdes sauf mention contraire. Cependant, il nous suffira de construire des faisceaux sur X_w pour définir de nouveaux faisceaux sur X_{rig} par extension.

Soit maintenant X un K-espace analytique rigide. On notera X_{rig} la G-topologie de X.

Définition 2.15. *Soient X et Y des K-espaces rigides. Un morphisme de K-espaces rigides $f : Y \to X$ est lisse s'il existe un recouvrement admissible $\{Y_i\}_{i\in I}$ de Y par des affinoïdes tel que $\Omega_{Y_i/X}$ est un $\mathcal{O}_{Y_i}$-module libre de type fini.*

Remarque. *De manière équivalente, f est lisse si et seulement si il existe un recouvrement admissible $\{Y_i\}_{i\in I}$ de Y par des affinoïdes tel que pour tout $i \in I$, Y_i possède un système local de coordonnées sur X, c'est-à-dire qu'il existe une famille $(y_1, \cdots, y_r)$ de $\mathcal{O}_Y$ tel que $\Omega_{Y_i/X}$ est libre de type fini de base $(dy_1, \cdots, dy_r)$.*

Pour un espace rigide X, on peut donner une définition de lissité de X qui équivaut à ce que le morphisme $X \to K$ soit lisse, ce qui donne la définition suivante.

Définition 2.16. *Un K-espace rigide X est lisse de dimension n s'il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ de X par des affinoïdes tel que Ω_{X_i} est un $\mathcal{O}_{X_i}$-module libre de type fini de rang n.*

Remarque. *De manière équivalente, X est lisse si et seulement si il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ de X par des affinoïdes tel que pour tout $i \in I$, X_i possède un système local de coordonnées.*

Proposition 2.17. *Soient X et Y des K-espaces rigides, et $f : Y \to X$ un morphisme de K-espaces rigides. La suite suivante est exacte*

$$\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow \Omega_{Y/X} \longrightarrow 0$$

et si de plus f est un morphisme lisse alors on a la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow \Omega_{Y/X} \longrightarrow 0$$

Démonstration. Voir [16], théorème 25.1. □

Notons X_w^c l'ensemble des sous-domaines affinoïdes U de X tel que $\mathcal{O}_X(U)$ possède un système de coordonnées locales, qui forme une G-topologie en considérant les recouvrement admissibles (dans le sens de X_{rig}) par des éléments de X_w^c.

Proposition 2.18. *Soit X un K-espace rigide lisse, la G-topologie X_{rig} est légèrement plus fine que X_w^c.*

Démonstration. Puisque X est lisse, alors il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ de X par des éléments de X_w^c. Soit U un ouvert admissible de X, pour tout $i \in I$ l'ensemble $U \cap X_i$ est admissible et possède un recouvrement admissible $\{U_{i,j}\}_{j\in J}$ par des éléments de X_w. Alors le recouvrement $\{U_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}$ de U est admissible. Puisque $X_i \in X_w^c$ pour tout $i \in I$, alors il existe un système de coordonnées locales $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathcal{O}_X(X_i)$ et pour tout $j \in J$, la famille $(x_{k|U_{i,j}})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système de coordonnées locales de $U_{i,j}$, donc $U_{i,j} \in X_w^c$. Ainsi, X_w^c est une base de X_{rig}, tout X_{rig}-recouvrement possède un X_w^c-raffinement et donc X_{rig} est légèrement plus fine que X_w^c. $\square$

Pour finir, on définit le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}$ sur un espace analytique rigide lisse.

Théorème 2.19. *Soit X un K-espace rigide lisse. Pour tout $U \in X_w$, on pose*

$$\widehat{\mathcal{D}}_X(U) := \widehat{U(\Theta_X(U))}.$$

et $\widehat{\mathcal{D}}_X$ ainsi défini est un faisceau sur X_w qui s'étend uniquement en un faisceau sur X_{rig}.

Démonstration. Voir [3], théorème 8.1 et théorème 9.3. $\square$

2.3 Foncteur image inverse de $\mathcal{D}$-modules

Nous rappelons le cas du foncteur image inverse pour les modules sur les opérateurs d'ordre fini, et fixons quelques notations. La discussion suit la discussion classique complexe [14]. Soient X et Y des K-espaces rigides lisses respectivement de rang n et m, et $f : Y \to X$ un morphisme lisse de K-espaces rigides.

Définition 2.20. *Avec les notations de la section, on note Y_w^f l'ensemble des sous-espaces affinoïdes $V \in Y_w^c$ tel qu'il existe $U \in X_w^c$ avec $f(V) \subset U$, et tel que V possède un système local de coordonnées sur U.*

Proposition 2.21. *L'ensemble Y_w^f avec les recouvrements admissibles forme une G-topologie de Y, et la G-topologie Y_{rig} est légèrement plus fine que Y_w^f.*

Démonstration. Puisque Y est lisse, il existe un recouvrement admissible $\{Y_j\}_{j\in J}$ de Y dans Y_w^c. Comme f est lisse, et quitte à raffiner ce recouvrement, on suppose de plus que les affinoïdes Y_j possèdent chacun un système local de coordonnées sur X. Comme X est lisse, il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ de X dans X_w^c. Pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$, notons $Y_{i,j} = f^{-1}(X_i) \cap Y_j$. Alors la famille $\{Y_{i,j}\}_{j\in J}$ est un recouvrement admissible de l'ouvert $f^{-1}(X_i)$, donc le recouvrement $\{Y_{i,j}\}_{i,j\in I,J}$ de Y est admissible.

Soit $V \in Y_{rig}$. Pour tout $i, j \in I, J$, l'ouvert admissible $V \cap Y_{i,j}$ admet un recouvrement admissible $\{V_{i,j,k}\}_{k\in K}$ dans Y_w^c. Le recouvrement $\{V_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I,J,K}$ de V est admissible, et de plus pour tout $i, j, k \in I, J, K$ on a $f(V_{i,j,k}) \subset X_i$ et $V_{i,j,k} \subset Y_j$. Comme Y_j possède un système local de coordonnées sur X, $V_{i,j,k}$ en possède aussi par restriction. Ainsi V possède un recouvrement admissible dans Y_w^f. $\square$

Proposition 2.22. *Soient $V \in Y_w^f$ et $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Notons $A = \mathcal{O}_X(U)$ et $B = \mathcal{O}_Y(V)$. Il existe des systèmes de coordonnées $(x_i, \partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ de A et $(y_j, \partial_{y_j})_{j\in[\![1,m]\!]}$ de B tel que $y_i = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*

Démonstration. On utilise la suite exacte scindée $0 \to \mathcal{O}_V \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_U} f^{-1}\Omega_U \to \Omega_V \to \Omega_{V/U} \to 0$. $\square$

Corollaire 2.23. *Avec les notations de la proposition précédente, on a un morphisme surjectif de B-modules*

$$\tilde{\ } : \Theta_B \twoheadrightarrow B \otimes_A \Theta_A \ , \ \theta \mapsto \tilde{\theta}$$

entièrement déterminé grâce aux systèmes locaux de coordonnées de A et B par

$$\forall j \in [\![1, m]\!] \ , \ \widetilde{\partial_{y_j}} = \begin{cases} 1 \otimes \partial_{x_j} & si\ j \leq n \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. On a la suite exacte scindée $0 \to B \otimes_A \Omega_A \xrightarrow{\varphi} \Omega_B \to \Omega_{B/A} \to 0$ avec φ définie par $\varphi(1 \otimes dx_i) = d(f(x_i)) = dy_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On obtient l'application $\theta \mapsto \tilde{\theta}$ en prenant son dual. $\square$

Proposition 2.24. *L'espace $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est muni d'une structure de $U(\Theta_B)$-module.*

Démonstration. En reprenant les notations du corollaire 2.23, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} j_{\Theta_B}: & \Theta_B & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(B \otimes_A U(\Theta_A)) \\ & \theta & \longmapsto & (b \otimes s \mapsto \theta(b) \otimes s + b\tilde{\theta}.s) \end{array}$$

et on pose

$$\begin{array}{rccc} j_B: & B & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(B \otimes_A U(\Theta_A)) \\ & a & \longmapsto & (b \otimes s \mapsto a.b \otimes s). \end{array}$$

Remarquons d'abord que j_{Θ_B} est un morphisme de K-algèbres de Lie, c'est-à-dire que pour tout $b, b' \in B$, pour tout $i, j \in [\![1, m]\!]$ et pour tout $b'' \otimes s \in B \otimes_A U(\Theta_A)$, on a

$$\begin{array}{rl} [j_{\Theta_B}(b\partial_{y_i}), j_{\Theta_B}(b'\partial_{y_j})](b'' \otimes s) & = b\partial_{y_i}(b'\partial_{y_j}(b'')) \otimes s + bb'\partial_{y_j}(b'') \otimes \partial_{x_i} s + b\partial_{y_i}(b'b'') \otimes \partial_{x_j} s \\ & + bb'b'' \otimes \partial_{x_i}\partial_{x_j} s - b'\partial_{y_j}(b\partial_{y_i}(b'')) \otimes s - bb'\partial_{y_i}(b'') \otimes \partial_{x_j} s \\ & - b\partial_{y_j}(bb'') \otimes \partial_{x_i} s - bb'b'' \otimes \partial_{x_j}\partial_{x_i} s \\ & = [b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}](b'') \otimes s + b\partial_{y_i}(b')b'' \otimes \partial_{x_j} s - b'\partial_{y_j}(b)b'' \otimes \partial_{x_i} s \\ & = [b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}](b'') \otimes s + \widetilde{b''[b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}]} s \\ & = j_{\Theta_B}([b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}])(b'' \otimes s) \end{array}$$

avec la convention que pour i ou j supérieur à n, alors ∂_{x_i} et ∂_{x_j} valent 0. On déduit par linéarité que pour tout $\theta, \theta' \in U(\Theta_B)$ on a

$$[j_{\Theta_B}(\theta), j_{\Theta_B}(\theta')] = j_{\Theta_B}([\theta, \theta']).$$

de plus, pour tout $b \in B$ et pour tout $\theta \in \Theta_B$ on a

- $j_B(b) j_{\Theta_B}(\theta) = j_{\Theta_B}(b\theta)$ car pour tout $b' \otimes s \in B \otimes_A U(\Theta_A)$, on a

$$j_B(b) j_{\Theta_B}(\theta)(b' \otimes s) = b\theta(b') \otimes s + bb'\tilde{\theta}(s) = j_{\Theta_B}(b\theta)(b' \otimes s).$$

- $[j_{\Theta_B}(\theta), j_B(b)] = j_B(\theta(b))$ car pour tout $b' \otimes s \in B \otimes_A U(\Theta_A)$, on a

$$\begin{array}{rl} [j_{\Theta_B}(\theta), j_B(b)](b' \otimes s) & = (\theta(bb') \otimes s + bb'\tilde{\theta}(s)) - (b\theta(b') \otimes s + bb'\tilde{\theta}(s)) \\ & = (\theta(bb') - b\theta(b')) \otimes s = \theta(b)b' \otimes s = j_B(\theta(b))(b' \otimes s). \end{array}$$

donc par propriété universelle de l'algèbre enveloppante, on a bien une application

$$U(\Theta_B) \longrightarrow \mathrm{End}_K(B \otimes_A U(\Theta_A)).$$

□

Proposition 2.25. *Avec les notations de la proposition précédente, le $U(\Theta_B)$-module $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est de présentation finie engendré sur $U(\Theta_B)$ par l'élément $1 \otimes 1$, et on a l'isomorphisme de $U(\Theta_B)$-modules*

$$B \otimes_A U(\Theta_A) \simeq U(\Theta_B) \Big/ \sum_{j=n+1}^{m} U(\Theta_B).\partial_{y_j}.$$

Démonstration. Les éléments de la forme $1 \otimes \partial_x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sont générateurs en tant que B-module de $B \otimes_A U(\Theta_A)$, où $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. On remarque alors que, en prenant $\partial_y^\alpha \in U(\Theta_B)$, alors

$$\begin{array}{rl} \partial_y^\alpha.1 \otimes 1 & = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{y_n}^{\alpha_n}.1 \otimes 1 = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{y_n}^{\alpha_n - 1}.\widetilde{\partial_{y_n}} = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{y_n}^{\alpha_n - 1}.1 \otimes \partial_{x_n} \\ & = \cdots = 1 \otimes \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = 1 \otimes \partial_x^\alpha. \end{array}$$

donc $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est bien engendré par $1 \otimes 1$ sur $U(\Theta_B)$. On remarque de plus que $\partial_y^\beta.1 \otimes 1 = 0$ avec $\beta \in \mathbb{N}^m$ si et seulement si il existe $j \in]\!]n, m]\!]$ tel que $\beta_j > 0$. Comme

$$U(\Theta_B) = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^m} B.\partial_y^\beta$$

alors le noyau de l'application $U(\Theta_B) \to B \otimes_A U(\Theta_A)$ est engendré sur B par les éléments $\partial_{y_j}.\partial_y^\beta$ avec $j \in]\!]n,m]\!]$ et $\beta \in \mathbb{N}^m$, et donc engendré sur $U(\Theta_B)$ par les ∂_{y_j}, $j \in]\!]n,m]\!]$. On a donc la suite exacte

$$U(\Theta_B)^{m-n} \longrightarrow U(\Theta_B) \longrightarrow B \otimes_A U(\Theta_A) \longrightarrow 0$$

ou plus précisément

$$0 \longrightarrow \sum_{j=n+1}^{m} U(\Theta_B).\partial_{y_j} \longrightarrow U(\Theta_B) \longrightarrow B \otimes_A U(\Theta_A) \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Proposition 2.26. *Notons $\mathcal{D}_X = U(\Theta_X)$ et $\mathcal{D}_Y = U(\Theta_Y)$. Pour tout $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$, on a sur Y_w^f un faisceau de $\mathcal{D}_Y$-module $f^*\mathcal{M}$ défini par*

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}.$$

Démonstration. Pour tout $V \in Y_w^f$, il existe $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Soit $U' \subset U$ tel que $f(V) \subset U' \in X_w^c$, et posons $A = \mathcal{O}_X(U)$, $A' = \mathcal{O}_X(U')$ et $B = \mathcal{O}_Y(V)$. Par la proposition 2.24, $\mathcal{O}_Y(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{D}_X(U')$ est un $\mathcal{D}_Y(V)$-module. Ainsi,

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \mathcal{O}_Y(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{M}(U')$$

est une limite inductive de $\mathcal{D}_Y(V)$-module donc est un $\mathcal{D}_Y(V)$-module. Donc $f^*\mathcal{M}$ est un préfaisceau de $\mathcal{D}_Y$-module, qui faisceautisé donne un faisceau de $\mathcal{D}_Y$-module sur Y_w^f. $\square$

Corollaire 2.27. *Pour tout $\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$, le $\mathcal{D}_Y$-module $f^*\mathcal{M}$ sur Y_w^f s'étend uniquement en un $\mathcal{D}_Y$-module sur Y_{rig}.*

Démonstration. Comme Y_{rig} est légèrement plus fine que Y_w^f par le lemme 2.21, le faisceau $f^*\mathcal{M}$ sur Y_w^f s'étend uniquement en un faisceau de $\mathcal{D}_Y$-modules sur Y_{rig} par le théorème 2.14. $\square$

3 Structures d'espaces

3.1 Espaces localement convexes

Notre référence pour l'analyse fonctionnelle non archimédiénne est [20]. Rappelons qu'un K-espace vectoriel topologique U est *localement convexe* s'il existe une famille de réseaux $(L_i)_{i\in I}$ de U satisfaisant certain propriétés de stabilité tel que et que la topologie sur U a pour bases d'ouverts les ensembles $\{v + L_i,\ v \in U, i \in I\}$. La *semi-norme jauge* q_{L_i} associé à un L_i est définie par

$$\forall x \in U,\ q_{L_i}(x) = \inf_{r\in K}\{|r| \ /\ x \in rL_i\}.$$

La topologie de U est également définie par la famille de semi-normes $(q_{L_i})_{i\in I}$ et réciproquement, une famille de semi-normes définit une topologie localement convexe [20, Prop. 4.3/4.4]. Une autre définition équivalente est énoncée dans [1, Prop. 2 page 92] :

Proposition 3.1. *Un K-espace vectoriel topologique U est localement convexe si et seulement si il est limite projective d'espaces semi-normable $(U_i)_{i\in I}$.*

Démonstration. Esquissons la preuve. Si U est limite projective d'espaces semi-normables U_i, en notant q_i' une semi-norme sur U_i pour tout $i \in I$, la limite projective munit U d'une famille de semi-normes q_i, issues de q_i' par les morphismes $U \to U_i$, et qui définit la topologie localement convexe de U. Inversement si U est localement convexe, donc défini par une famille de semi-normes $(q_{L_i})_{i\in I}$ issus de réseaux ouverts, alors U est limite projective des espaces semi-normés $(U, q_{L_i})_{i\in I}$, qui forme un système projectif par les morphismes continus $(U, q_{L_i}) \to (U, q_{L_j})$ lorsque $q_{L_i} \geq q_{L_j}$. $\square$

Proposition 3.2. *Soient U et V des espaces localement convexes, d'ensembles de réseaux ouverts Λ_U et Λ_V. Alors $U \otimes_K V$ est un espace localement convexe d'ensemble de réseaux ouverts Λ défini par*

$$\Lambda = \{L \otimes_R K \ / \ L \in \Lambda_U, K \in \Lambda_V\}.$$

Démonstration. C'est la topologie *projective* sur le produit tensoriel de U et V, cf. [20, §17.B]. □

Définition 3.3. *Soit U une K-algèbre localement convexe. Soient M un U-module à droite localement convexe et N un U-module à gauche localement convexe. La topologie localement convexe sur $M \otimes_U N$ est la topologie la plus fine rendant l'application $M \otimes_R N \to M \otimes_U N$ continue.*

Proposition 3.4. *Soit U un espace localement convexe défini par une famille de semi-normes $(q_i)_{i\in I}$. L'adhérence de $\{0\}$ est égale à*

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{i \in I} q_i^{-1}(\{0\})$$

et U est séparé si et seulement si $\{0\}$ est fermé dans U, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $v \in U$ non nul, il existe $i \in I$ tel que $q_i(v) \neq 0$.

Démonstration. Voir [20], lemme 4.6. □

Proposition 3.5. *Pour tout K-espace localement convexe U, il existe un espace localement convexe séparé complet $\widehat{U}^h$ ainsi qu'un morphisme $c : U \to \widehat{U}^h$ tel que pour tout morphisme continu $g : U \to W$ dans un espace localement convexe séparé complet W, il existe un unique morphisme continu $\widehat{g}^h : \widehat{U}^h \to W$ tel que $g = \widehat{g}^h \circ c$.*

Démonstration. Voir [20], proposition 7.5. □

L'espace $\widehat{U}^h$ est appelé *le complété de Hausdorff* de U.

Proposition 3.6. *Pour tout espace localement convexe U, le complété de Hausdorff de U est isomorphe à*

$$\widehat{U}^h \simeq \varprojlim_{i \in I} \widehat{U}^{q_i}$$

où $\widehat{U}^{q_i}$ est le complété de U pour sa semi-norme q_i.

Précisons que dans le cas où q_i n'est pas une norme, la notation $\widehat{U}^{q_i}$ correspond au complété de l'espace $U/\{q_i = 0\}$ pour la norme quotient induite par q_i.

Démonstration. La démonstration est facile et laissé au lecteur. Notons que $\varprojlim_{i \in I} \widehat{U}^{q_i}$ est séparé, cf. 3.4. □

Rappelons qu'un K-espace localement convexe séparé U est *métrisable* si et seulement si sa topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cf. [20, Prop. 8.1]. Dans ce cas, on pourra toujours supposer la suite de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante quitte à considérer les semi-normes

$$\forall k \in \mathbb{N},\ q'_k = \max_{i \leq k} q_i$$

qui munissent U de la même topologie que les $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Rappelons également qu'un *K-espace de Fréchet* est un K-espace localement convexe U qui est métrisable et complet. C'est de plus une *K-algèbre de Fréchet* si U est une K-algèbre dont la multiplication est continue. En résumé, pour une K-algèbre de Fréchet U, il existe une suite croissante de semi-normes d'algèbres $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur U tel que

$$U \simeq \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \widehat{U}^{q_k}.$$

3.2 Algèbres de Fréchet-Stein et modules coadmissibles

Dans [21] Schneider-Teitelbaum introduit le concept d'une *algèbre de Fréchet-Stein*, et la catégorie abélienne des *modules coadmissibles* sur une telle algèbre. On rappelle ces notions d'abord.

Définition 3.7. *Une K-algèbre de Fréchet U est une algèbre de Fréchet-Stein à gauche (resp. à droite) s'il existe une suite croissante de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'algèbres définissant la topologie de U tel que $\widehat{U}^{q_k}$ est noethérien et est un $\widehat{U}^{q_{k+1}}$-module plat à droite (resp. à gauche).*

On emploiera la notion d'algèbre de Fréchet-Stein bilatère pour les algèbres de Fréchet-Stein simultanément à gauche et à droite.

Proposition 3.8. *Une K-algèbre topologique U est une K-algèbre de Fréchet-Stein si et seulement si il existe une suite de K-algèbres de Banach noethériennes $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'un morphisme continu d'algèbres $\rho_k : U_{k+1} \to U_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que U_k est un U_{k+1}-module plat à droite, l'image de U_{k+1} est dense dans U_k, et*

$$U \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} U_k.$$

Démonstration. Si U est une K-algèbre de Fréchet-Stein, alors en posant $U_k = \widehat{U}^{q_k}$, la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie toutes les conditions de la proposition. La direction réciproque est laissé au lecteur. □

Rappelons l'algèbre des opérateurs différentiels vu en définition 2.8, qui sera notre premier exemple d'une telle algèbre.

Théorème 3.9. *Soit A une algèbre affinoïde lisse. L'espace $\widehat{\mathcal{D}}_A$ est muni d'une topologie localement convexe par*

$$\widehat{\mathcal{D}}_A = \varprojlim D_k$$

et est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère.

Démonstration. $\widehat{\mathcal{D}}_A$ est bien un espace localement convexe par la proposition 3.1 car il est limite projective des espaces normés $(D_k, |\cdot|_k)_{k\in\mathbb{N}}$. C'est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère par [3], section 6.4. □

Soit U une K-algèbre de Fréchet-Stein. On choisit une suite croissante de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de U qui définit sa topologie, et on note $U_k = \widehat{U}^{q_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que U soit isomorphe à la limite des U_k.

Définition 3.10. *Un U-module M est coadmissible s'il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de U_k-modules de type fini et des isomorphismes $U_k \otimes_{U_{k+1}} M_{k+1} \simeq M_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tels que M soit isomorphe à la limite des M_k.*

Par exemple, tout module de présentation finie est coadmissible [21, Cor. 3.4]. Soit M un U-module coadmissible. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'isomorphisme $U_k \otimes_U M \simeq M_k$., cf. [21, Cor. 3.1].

La définition de coadmissibilité ne dépend pas du choix de la suite de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les U-modules coadmissibles forment une sous-catégorie abeliénne $\mathcal{C}_U$ dans tous les U-modules [21, Cor. 3.5].

On conclut avec quelques notions issues de l'article [3].

Définition 3.11. *Soit M un U-module. On dit qu'un U-module coadmissible $\widehat{M}$ est le complété coadmissible de M si il existe un morphisme $i : M \to \widehat{M}$ tel que la propriété universelle suivante est vérifiée : pour tout U-module coadmissible N et morphisme $j : M \to N$, il existe un unique morphisme $\varphi : \widehat{M} \to N$ tel que $\varphi \circ i = j$.*

Lorsque le complété coadmissible existe, il est unique à isomorphisme près. On peut montrer qu'il existe et l'expliciter dans certains cas comme dans la proposition suivante.

Proposition 3.12. *Soit M un U-module. Si $M_k = U_k \otimes_U M$ est un U_k-module de type fini pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors le complété coadmissible de M existe et est donné par*

$$\widehat{M} \simeq \varprojlim (U_k \otimes_U M) = \varprojlim M_k$$

où la structure de U-module coadmissible de $\widehat{M}$ est donnée par les $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Voir [3], proposition section 7.1. □

Définition 3.13. *Soit V une K-algèbre de Fréchet-Stein. Un K-espace de Fréchet M est un (U,V)-bimodule U-coadmissible si c'est un (U,V)-bimodule tel que M est coadmissible en tant que U-module et tel que le morphisme d'espaces de Fréchet $V^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_U(M)$ est continu.*

On précise que l'algèbre $\mathrm{End}_U(M)$ des endomorphismes de U-modules de M est une K-algèbre de Fréchet par

$$\mathrm{End}_U(M) \simeq \varprojlim \mathrm{End}_{U_k}(U_k \otimes_U M) = \varprojlim \mathrm{End}_{U_k}(M_k)$$

d'après le lemme 7.2 de [3].

Proposition 3.14. *Soit V une K-algèbre de Fréchet-Stein. Soient M un (U,V)-bimodule U-coadmissible et N un V-module coadmissible. Il existe un U-module coadmissible $M\widehat{\otimes}_V N$ qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout U-module coadmissible P et pour toute application U-linéaire V-balancée $M \times N \to P$, il existe un unique morphisme de U-modules $M\widehat{\otimes}_V N \to P$ tel que le diagramme commute*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr] & M\widehat{\otimes}_V N \arrow[d] \\ & P \end{tikzcd}$$

Et $M\widehat{\otimes}_V N$ est le complété coadmissible du produit tensoriel $M \otimes_V N$.

Démonstration. Le complété coadmissible de $M \otimes_V N$ est bien défini. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par continuité de l'application $V^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_U(M)$, il existe $i \in \mathbb{N}$ et un morphisme $V_i^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_{U_k}(M_k)$. donc M_k est un (U_k, V_i)-bimodule et on a

$$M_k \otimes_V N \simeq M_k \otimes_{V_i} (V_i \otimes_V N)$$

où $V_i \otimes_V N$ est de type fini sur V_i par V-coadmissibilité de N, et M_k est de type fini sur U_k par U-coadmissibilité de M. On en conclut ainsi que le U_k-module $M_k \otimes_V N$ est de type fini pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par la proposition 3.12 le complété coadmissible voulu existe bien. La propriété universelle du produit tensoriel coadmissible correspond alors à celle du complété coadmissible. □

Proposition 3.15. *Soit V une K-algèbre de Fréchet-Stein. Pour tout (U,V)-bimodule U-coadmissible M et pour tout V-module coadmissible N, on a*

$$M\widehat{\otimes}_V N \simeq M\widehat{\otimes}_V^h N.$$

Démonstration. Voir [7], corollaire A.6. □

3.3 Espaces bornologiques

Des liens existent entre les espaces vectoriels bornologiques et les espaces vectoriels localement convexes, ce qui nous permettra d'utiliser des propriétés inhérentes à ces espaces pour amener à des résultats sur les algèbres de Fréchet-Stein.

Pour l'étude des espaces bornologiques, nous pourrons nous référer à l'ouvrage [17] de Prosmans et Schneider qui traite ces notions pour le cas des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, mais on citera surtout l'article [5] de Bambozzi qui les étudie dans le cadre non-archimédien.

Définition 3.16. *Un ensemble E est un espace bornologique s'il est muni d'un ensemble de parties $\mathcal{B}_E$ de E tel que*

- *si $B \in \mathcal{B}_E$ et $B' \subset B$ alors $B' \in \mathcal{B}_E$.*
- *$\mathcal{B}_E$ contient les singletons.*

- *$\mathcal{B}_E$ est stable par unions finies.*

L'ensemble $\mathcal{B}_E$ est appelé une bornologie sur E et ses éléments sont appelés les bornés.

Les premiers exemples qu'on puisse avoir d'espaces bornologiques sont les espaces normés ou semi-normés, pour lesquels les bornés sont naturellement les ensembles bornés pour la norme ou la semi-norme de l'espace.

Définition 3.17. *Soient E et F des espaces bornologiques et $g : E \to F$ une application. On dit que g est bornée si l'image de tout borné de E est un borné de F.*

Définition 3.18. *Un K-espace vectoriel E est un K-espace vectoriel bornologique si les applications $(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda.x \in E$ et $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ sont bornées.*

Définition 3.19. *Soit E un K-espace vectoriel bornologique. Un borné $B \in \mathcal{B}_E$ est absolument convexe si c'est un R-module. On note $\tilde{\mathcal{B}}_E$ l'ensemble des bornés absolument convexes de E.*

Définition 3.20. *Un K-espace vectoriel bornologique E est de type convexe si pour tout $B \in \mathcal{B}_E$, il existe $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ tel que $B \subset B_1 \cup \dots \cup B_n$. On dit alors que la bornologie $\mathcal{B}_E$ a pour base $\tilde{\mathcal{B}}_E$.*

On note $\mathcal{B}or_K$ la catégorie des K-espaces bornologiques de type convexe, munie des applications K-linéaires bornées.

Remarque. *Tout espace localement convexe U, de famille de semi-normes $(q_i)_{i \in I}$, est muni d'une structure de K-espace bornologique de type convexe où les bornés sont les sous-ensembles B de U tel que pour tout $i \in I$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $q_i(B) \leq \lambda_i$, c'est-à-dire les sous-ensembles de U bornés pour toutes les semi-normes de U.*

Nous pouvons donc considérer les espaces localement convexes, et donc les algèbres de Fréchet-Stein, comme des espaces bornologiques si nécessaire.

Remarque. *Soient E et F des K-espaces bornologiques de type convexe. Alors $E \oplus F$ et $E \times F$ sont des K-espaces bornologiques de type convexe dont les bornés sont respectivement les sous-ensembles des sommes directes ou des produits directs de bornés de E et de F. Plus généralement, toute somme directe ou produit direct de K-espaces bornologique de type convexe est un K-espace bornologique de type convexe dont les bornés sont respectivement les sous-ensembles des sommes directes ou des produits directs de bornés.*

Remarque. *Soient $E, F \in \mathcal{B}or_K$. Alors $E \otimes_K F \in \mathcal{B}or_K$ dont les bornés sont les sous-ensembles des produits tensoriels sur R de bornés absolument convexes de E et de F. Autrement dit, $B \in \mathcal{B}_{E \otimes F}$ si et seulement si il existe $B_E \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ et $B_F \in \tilde{\mathcal{B}}_F$ tel que $B \subset B_E \otimes_R B_F$.*

Proposition 3.21. *Soient $E \in \mathcal{B}or_K$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors*
• *F est muni d'une bornologie restreinte $\mathcal{B}_F$ tel que $F \in \mathcal{B}or$, qui est la bornologie la plus fine rendant bornée l'inclusion $i : F \to E$.*
• *E/F est muni d'une bornologie quotient $\mathcal{B}_{E/F}$ tel que $E/F \in \mathcal{B}or_K$, qui est la bornologie la plus grossière rendant bornée la projection $\pi : E \to E/F$*

Démonstration.
• Cela signifie que $B \in \mathcal{B}_F$ si et seulement si $B \subset F$ et $B \in \mathcal{B}_E$. de cette façon F est muni d'une structure de K-espace vectoriel de type convexe.
• Cela signifie que $B \in \mathcal{B}_{E/F}$ si et seulement si il existe $C \in \mathcal{B}_E$ tel que $\pi(C) = B$. de cette façon E/F est muni d'une structure de K-espace vectoriel de type convexe. □

Définition 3.22. *Une catégorie est dite pré-abélienne si c'est une catégorie additive et que tous les morphismes de cette catégorie admettent un noyau et un conoyau. dans une telle catégorie, on dit qu'un foncteur F est exact à gauche (resp. à droite) s'il est additif et préserve les noyaux (resp. les conoyaux), c'est-à-dire pour tout $g : C \to C'$*

$$Ker(F(g)) = F(Ker(g)) \text{ (resp. } Coker(F(g)) = F(Coker(g))\text{)}.$$

Proposition 3.23. *La catégorie $\mathcal{B}or_K$ est pré-abélienne. dans cette catégorie, pour une morphisme borné $g : E \to F$*

- *Le noyau de g est $Ker(g) = g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}or_K$ muni de la bornologie restreinte.*

- *L'image de g est $Im(g) = g(E) \in \mathcal{B}or_K$ muni de la bornologie restreinte.*
- *Le conoyau de g est $Coker(g) = F/Im(g) \in \mathcal{B}or_K$ muni de la bornologie quotient.*

Remarquons que d'après la remarque suivant la définition 2.1.1 dans [4], la catégorie des espaces vectoriels bornologiques est même quasi-abélienne, et c'est aussi le cas de la catégorie $\mathcal{B}or_K$. Nous ne nous servirons pas de ce résultat.

Remarque. *La catégorie $\mathcal{B}or_K$ contient les limites projectives et les limites inductives. En effet, la limite projective est construite à partir de noyaux et de produits directs et la limite inductive est construite à partir de conoyaux et de sommes directes.*

Définition 3.24. *Soit $E \in \mathcal{B}or_K$. Pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$, on note $B_K = B \otimes_R K$ et on appelle semi-norme jauge de B la semi-norme q_B définie sur B_K par*

$$\forall x \in B_K,\ q_B(x) = \inf_{r \in K} \{|r| \ / \ x \in rB\}.$$

Avec de telles notations, on remarque que la boule unité de B_K pour sa semi-norme q_B est le R-module B.

En effet si $x \in B$, alors $q_B(x) \leq 1$. Réciproquement, comme la norme sur K est issue d'une valuation discrète, l'image de K^* par cette norme est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$. Ainsi, si $x \neq 0$ et $q_B(x) \leq 1$, l'ensemble $\{|r| \ / \ x \in rB\}$ est discret. Sa borne inférieure est donc un minimum et il existe $r \in K$ tel que $x \in rB$ et $q_B(x) = r \leq 1$. Ainsi $x \in B$.

Remarque. *Soit $E \in \mathcal{B}or_K$. Alors*

$$E \simeq \varinjlim_{B \in \tilde{\mathcal{B}}_E} B_K$$

où la limite inductive est considérée dans la catégorie $\mathcal{B}or_K$.

Définition 3.25. *Un K-espace bornologique de type convexe E est complet si pour tout borné de E, il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ le contenant tel que l'espace (B_K, q_B) est un Banach.*

On note $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ la catégorie des K-espaces bornologiques complets.

Définition 3.26. *Soient $E \in \mathcal{B}or_K$ et $x \in E$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers x s'il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ contenant x et les x_n à partir d'un certain rang, tel que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans B_K pour sa jauge.*
Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est fermé dans E si toute suite convergente d'éléments de F converge dans F. L'adhérence $\overline{F}$ de F est définie comme le plus petit fermé contenant F.

Proposition 3.27. *Soient $E \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$ et F un sous-K-espace vectoriel fermé de E. Alors F et E/F sont des K-espaces bornologiques complets.*

La preuve repose sur le fait que c'est le cas pour les espaces de Banach, et se trouve dans [17], prop. 5.3.

Proposition 3.28. *La catégorie $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ est pré-abélienne. dans cette catégorie, pour un morphisme borné $g : E \to F$*

- *Le noyau de g est $Ker(g) = g^{-1}(\{0\}) \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*
- *L'image de g est $Im(g) = \overline{g(E)} \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*
- *Le conoyau de g est $Coker(g) = F/Im(g) \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*

de plus la catégorie $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ contient les limites projectives et les limites inductives.

Démonstration. C'est une catégorie quasi-abélienne par le lemme 3.46 de [6], donc elle est entre autre pré-abélienne. Par le même lemme, elle contient les limites projectives et inductives. □

Définition 3.29. *Soit $E \in \mathcal{B}or_K$. On note $\widehat{E}^b$ le complété bornologique de E donné par*

$$\widehat{E}^b = \varinjlim_{B \in \tilde{\mathcal{B}}_E} \widehat{B_K}^{q_B}$$

où la limite inductive est prise dans $\mathcal{B}or_K$.

Le complété bornologique s'accompagne d'un morphisme borné $E \to \widehat{E}^b$, obtenu par les applications $B_K \to \widehat{B_K}^{q_B}$ pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ puis par passage à la limite inductive. Évidemment, le complété bornologique d'un espace bornologique complet est lui-même.

Proposition 3.30. *Soit E un espace bornologique de type convexe. Le complété bornologique $\widehat{E}^b$ vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace bornologique complet F et morphisme borné $E \to F$, il existe un morphisme borné $\widehat{E}^b \to F$ tel que*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & F \\ \widehat{E}^b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $g : E \to F$. Pour tout borné $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$, il existe $B' \in \tilde{\mathcal{B}}_F$ tel que $g(B) \subset B'$. Comme F est bornologiquement complet, on peut supposer que B'_K est un Banach. Alors $g(B_K) \subset B'_K$, et par propriété universelle on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B_K \arrow[r] \arrow[d] & B'_K \\ \widehat{B_K}^{q_B} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Enfin par passage à la limite inductive on a le diagramme commutatif voulu. □

Proposition 3.31. *La complétion bornologique forme un foncteur $\widehat{\cdot}^b : \mathcal{B}or_K \to \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*

Démonstration.
• Pour tout $E \in \mathcal{B}or_K$, le complété $\widehat{E}^b \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$. En effet, pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$, l'espace $\widehat{B_K}^{q_B}$ est un Banach donc complet bornologiquement. Puisque $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ contient les limites inductives, alors $\widehat{E}^b \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.
• Pour tout morphisme borné $g : E \to F$, on a un morphisme borné $E \to \widehat{F}^b$ et par propriété universelle du complété on a $\widehat{g}^b : \widehat{E}^b \to \widehat{F}^b$ tel que

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \widehat{E}^b \arrow[r, "\widehat{g}^b"] & \widehat{F}^b. \end{tikzcd}$$

□

Proposition 3.32. *Le foncteur de la complétion bornologique $\widehat{\cdot}^b$ est adjoint à gauche du foncteur inclusion $I : \widehat{\mathcal{B}or}_K \longrightarrow \mathcal{B}or_K$.*

Démonstration. Voir dans [6] la discussion faite après la définition 3.44. □

Définition 3.33. *Une K-algèbre bornologique E est un K-espace bornologique muni d'une structure de K-algèbre tel que l'application $E \otimes_K E \to E$ est bornée.*
Un E-module bornologique M sur une K-algèbre bornologique E est un K-espace bornologique muni d'une structure de E-module tel que l'application $E \otimes_K M \to M$ est bornée.

Pour E une K-algèbre bornologique de type convexe, on note $\mathcal{B}or_K(E)$ la catégorie des E-modules bornologiques de type convexe et $\widehat{\mathcal{B}or}_K(E)$ la catégorie des E-modules bornologiques complets (si E est complète).

Proposition 3.34. *Il existe également un foncteur $\widehat{\cdot}^b$ de la complétion bornologique pour les modules bornologiques de type convexe.*

$$\widehat{\cdot}^b : \mathcal{B}or_K(E) \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b).$$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{B}or_K(E)$. En complétant l'application $E \otimes_K M \to M$ on obtient les applications bornées $\widehat{E}^b \otimes_K \widehat{M}^b \to \widehat{E}^b \widehat{\otimes}_K^b \widehat{M}^b \to \widehat{M}^b$ et $\widehat{M}^b \in \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)$. □

Remarque. *La proposition 3.32 se généralise au foncteur de la complétion bornologique des modules bornologiques. C'est-à-dire, soit E une K-algèbre bornologique, alors le foncteur* $\widehat{\cdot}^b$ *est adjoint à gauche du foncteur inclusion* $I : \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b) \longrightarrow \mathcal{B}or_K(E)$.

Proposition 3.35. *Le foncteur* $\widehat{\cdot}^b : \mathcal{B}or_K(E) \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)$ *est exact à droite.*

Démonstration. Soit $g : M' \to M$ un morphisme de E-modules bornologiques de type convexe. Considérons le conoyau de g muni de son morphisme associé $q : M \to Coker(g)$. Pour tout $X \in \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)$, on a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}or_K(E)}(Coker(g), I(X)) \xrightarrow{-\circ q} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}or_K(E)}(M, I(X)) \xrightarrow{-\circ g} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}or_K(E)}(M', I(X)).$$

Il s'agit d'une suite exacte car

- Puisque q est un épimorphisme alors $- \circ q$ est injectif.
- Puisque $q \circ g = 0$ alors $Im(- \circ q) \subset Ker(- \circ g)$.
- Soit $u \in Ker(- \circ g)$, c'est-à-dire $u \circ g = 0$. Alors par propriété universelle du conoyau il existe $v : Coker(g) \to I(X)$ tel que $u = v \circ q \in Im(- \circ q)$ comme montré sur le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"] & I(X) \\ & Coker(g) \arrow[ur, "v"] & \end{tikzcd}$$

On obtient donc la suite exacte suivante par l'adjonction des foncteurs $\widehat{\cdot}^b$ et I

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{Coker(g)}^b, X) \xrightarrow{-\circ \widehat{q}^b} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{M}^b, X) \xrightarrow{-\circ \widehat{g}^b} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{M'}^b, X)$$

et ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{Coker(g)}^b, X) \underset{-\circ \widehat{q}^b}{\xrightarrow{\simeq}} Ker(- \circ \widehat{g}^b).$$

Par les mêmes raisonnements sur le conoyau de l'application $\widehat{g}^b$ et son application associée $p : \widehat{M} \to Coker(\widehat{g}^b)$, on obtient que

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(Coker(\widehat{g}^b), X) \underset{-\circ p}{\xrightarrow{\simeq}} Ker(- \circ \widehat{g}^b).$$

Ainsi pour $X = Coker(\widehat{g}^b)$ on en conclut qu'il existe $u : \widehat{Coker(g)}^b \to Coker(\widehat{g}^b)$ tel que $id \circ p = u \circ \widehat{q}$. de même pour $X = \widehat{Coker(g)}^b$, il existe $v : Coker(\widehat{g}^b) \longrightarrow \widehat{Coker(g)}^b$ tel que $id \circ \widehat{q}^b = v \circ p$. Pour conclure,

$$u \circ v \circ p = u \circ \widehat{q}^b = p$$

et puisque p est un épimorphisme alors $u \circ v = id$ sur $\widehat{Coker(g)}^b$. de même

$$v \circ u \circ \widehat{q}^b = v \circ p = \widehat{q}^b$$

qui nous donne $v \circ u = id$ sur $Coker(\widehat{g}^b)$. Finalement,

$$Coker(\widehat{g}^b) \simeq \widehat{Coker(g)}^b$$

et le foncteur $\widehat{\cdot}^b$ est exact à droite. □

De manière générale dans les catégories pré-abéliennes, tout foncteur adjoint à gauche est exact à droite.

Proposition 3.36. *Soit* $(E_i)_{i\in I}$ *un système inductif d'espaces bornologiques de type convexe et notons* E *leur limite inductive dans* $\mathcal{B}or$. *Alors*

$$\widehat{E}^b \simeq \varinjlim_{i\in I} \widehat{E_i}^b$$

où la limite inductive est prise dans $\widehat{\mathcal{B}or}_K$.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, il existe des applications bornées $c_i : E_i \to \widehat{E_i}^b$, et par passage à la limite inductive on obtient une application bornée $c : E \to \varinjlim \widehat{E_i}^b$.

Soient F un espace bornologique complet et $g : E \to F$ une application bornée. Il existe pour tout $i \in I$ une application bornée $g_i : E_i \to F$ qui est la composition des application $E_i \to E$ et de g. Par passage au complété bornologique, pour tout $i \in I$ il existe $\widehat{g}_i : \widehat{E_i}^b \to F$. Par propriété universelle de la limite inductive il existe une application bornée $\widehat{g} : \varinjlim \widehat{E_i}^b \to F$ tel que

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rrrr, "c_i"] \arrow[dddd] \arrow[ddr] & & & & \widehat{E_i}^b \arrow[dddd] \arrow[ddl] \\
& & & & \\
& E \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend left, "c"] & F & \varinjlim \widehat{E_i}^b \arrow[l, "\widehat{g}"] & \\
& & & & \\
E_{i+1} \arrow[rrrr, "c_{i+1}"'] \arrow[uur] & & & & \widehat{E}_{i+1}^b \arrow[uul]
\end{tikzcd}$$

Ainsi, comme $\varinjlim \widehat{E_i}$ est complet en tant que limite inductive dans $\widehat{\mathcal{B}or}_K$, il s'agit du complété bornologique de E. $\square$

Définition 3.37. *Soit E une K-algèbre bornologique de type convexe. Soient M un E-module à droite bornologique de type convexe, et N un E-module à gauche bornologique de type convexe. On munit $M \otimes_E N$ de la bornologie dont les bornés sont les sous-ensembles des images des bornés de $M \otimes_K N$ par le morphisme $M \otimes_K N \to M \otimes_E N$.*

Autrement dit, c'est la bornologie la moins fine rendant le morphisme $M \otimes_K N \to M \otimes_E N$ borné.

3.4 Nucléarité et pseudo-nucléarité

Soit A une K-algèbre de Banach noethérienne, dont la boule unité $\mathcal{A}$ est une R-algèbre noethérienne.

Définition 3.38. *Un A-module M est dit Banach contractant si c'est un Banach et que sa boule unité M° est $\mathcal{A}$-stable.*

Définition 3.39. *Soient M, N des A-modules Banach contractants et $f : M \to N$ un morphisme de A-modules continu. f est strictement complètement continue (scc) si il existe une suite de morphismes de A-modules continus $f_i : M \to N$ convergeant uniformément vers f tel que $f_i(M^\circ)$ est de type fini sur $\mathcal{A}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Définition 3.40. *Soit M un A-module de Fréchet. M est dit A-nucléaire si M possède une décomposition de Fréchet $M \simeq \varprojlim M_n$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

- *M_n est Banach contractant.*
- *L'image de M est dense dans M_n.*
- *Il existe un A-module Banach contractant F_n est une surjection stricte $F_n \to M_n$ tel que la composition $F_n \to M_n \to M_{n-1}$ est scc.*

Proposition 3.41. *Soit U une K-algèbre de Fréchet-Stein A-nucléaire. Alors tout U-module coadmissible est également A-nucléaire.*

Démonstration. En reprenant les notations de la section 3.2, par A-nucléarité de U pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe F_n un A-module Banach contractant tel que $F_n \to U_n \to U_{n-1}$ est scc. Notons $M \simeq \varprojlim M_k$, avec M_k un U_k-module de type fini. Alors il existe $r_n \in \mathbb{N}$ et une surjection $U_n^{r_n} \to M_n$, et la suite $F_n^{r_n} \to U_n^{r_n} \to M_n \to M_{n-1}$ est scc. Comme U_n est Banach contractant et que M_n est un U_n-module de type fini, alors M_n est aussi Banach contractant. Enfin, comme $U_n \otimes_U M \simeq M_n$, alors M est dense dans M_n. Donc M est également A-nucléaire. $\square$

Définition 3.42. *Soit U un K-espace vectoriel topologique localement convexe et métrisable, limite projective d'une suite d'espaces semi-normés $(U_k, q_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $\rho_k : U_{k+1} \to U_k$ et $p_k : U \to U_k$. Alors U est pseudo-nucléaire si pour tout sous-ensemble borné $B \subset U_{k+1}$ et pour tout R-sous-module ouvert $V \subset U_k$, il existe un sous-ensemble borné $B' \subset U$ tel que*

$$\rho_k(B) \subset V + p_k(B').$$

Proposition 3.43. *Soit U un K-espace localement convexe métrisable. Pour que U soit pseudo-nucléaire, il suffit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, il existe $B' \subset U$ borné tel que*

$$\rho_k(\mathcal{B}_{k+1}(1)) \subset \pi^j \mathcal{B}_k(1) + p_k(B')$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{B}_k(1)$ la boule de rayon 1 dans U_k pour sa semi-norme.

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$, et $B \subset U_{k+1}$ borné. Il existe $d \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B \subset \mathcal{B}_{k+1}(d)$, et il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{B}_{k+1}(d) \subset \pi^i \mathcal{B}_{k+1}(1)$. Soit V un R-sous-module ouvert de U_k, il existe alors $d' \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathcal{B}_k(d') \subset V$, et $i' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{B}_k(d') \supset \pi^{i'} \mathcal{B}_k(1)$. Si la condition de la proposition est vérifiée, alors il existe $B' \subset U$ borné tel que

$$\rho_k(\mathcal{B}_{k+1}(1)) \subset \pi^{i'-i} \mathcal{B}_k(1) + p_k(B').$$

Or, puisque $\rho_k(B) \subset \rho_k(\pi^i \mathcal{B}_{k+1}(1))$ et que $\pi^{i'} \mathcal{B}_k(1) \subset V$, alors

$$\rho_k(B) \subset \pi^i \rho_k(\mathcal{B}_{k+1}(1)) \subset \pi^{i'} \mathcal{B}_k(1) + \pi^i p_k(B') \subset V + p_k(\pi^i B')$$

et U est pseudo-nucléaire. □

Proposition 3.44. *Tout espace A-nucléaire est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Voir la remarque après la définition 3.34 dans [9]. □

Théorème 3.45. *Soit U un K-espace pseudo-nucléaire. Il existe un isomorphisme d'espaces bornologiques $\widehat{U}^h \simeq \widehat{U}^b$.*

Démonstration. Voir [9], proposition 3.36. □

4 Opérateurs G-équivariants

4.1 Anneau de groupe tordu et trivialisation

Les définitions et propriétés de cette section proviennent de la section 2.2 de l'article d'Ardakov [2] qui se consacre aux trivialisation sur les anneaux de groupe tordu, qui seront des outils qui nous serviront dans la suite.

Définition 4.1. *Soit G un groupe agissant sur un anneau S par automorphismes d'anneaux par un morphisme ρ. L'anneau de groupe tordu $S \rtimes G$ (parfois aussi appelé algèbre de groupe tordu) est une S-algèbre définie comme étant le S-module libre de base G muni de la multiplication*

$$\forall s, s' \in S,\ \forall g, g' \in G,\ \ s.g \times s'.g' = s\rho(g)(s').gg'.$$

dans $S \rtimes G$, on a pour tout $s \in S, g \in G$ l'égalité $g.s.g^{-1} = \rho(g)(s)$.

On définit de manière équivalente l'algèbre $S \rtimes G$ comme étant le S-module libre de base G muni d'une multiplication qui vérifie cette relation.

Définition 4.2. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu. Une trivialisation de $S \rtimes G$ est un morphisme de groupes $\beta : G \to S^\times$ tel que pour tout $g \in G$, l'action par conjugaison de $\beta(g)$ sur S coïncide avec $\rho(g)$.*

Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu. Par [2, Lem. 2.2.2], une trivialisation β sur $S \rtimes G$ induit un isomorphisme d'anneaux $\tilde{\beta} : S[G] \to S \rtimes G$ défini par

$$\forall s \in S, g \in G,\ \tilde{\beta}(s) = s \ \text{ et } \ \tilde{\beta}(g) = \beta(g)^{-1}g.$$

Définition 4.3. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu et N un sous-groupe normal de G. Une trivialisation $\beta : N \to S^\times$ de $S \rtimes N$ est dite G-équivariante si on a*

$$\forall g \in G, h \in N,\ \beta(ghg^{-1}) = \rho(g)(\beta(h)).$$

On peut voir cette condition comme une extension sur G de la propriété définissant une trivialisation puisqu'on a déjà pour une trivialisation $\beta(h)s\beta(h)^{-1} = \rho(h)(s)$ pour tout $s \in S$ et $h \in N$.

Définition 4.4. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu et N un sous-groupe normal de G. Soit $\beta : N \to S^\times$ une trivialisation G-équivariante de $S \rtimes N$. On définit l'anneau*

$$S \rtimes_N^\beta G := S \rtimes G \Big/ (S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)$$

où $(S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)$ est l'idéal à gauche engendré par les éléments $\tilde{\beta}(h) - 1$ pour $h \in N$.

Remarquons que l'idéal $(S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)$ est en fait bilatère, alors $S \rtimes_N^\beta G$ est bien un anneau. Lorsque la trivialisation β est claire, on notera simplement cet ensemble $S \rtimes_N G$.

4.2 Action de groupe sur une algèbre affinoïde

On rappelle comment munir une algèbre affinoïde et ses dérivations d'une action de groupe.

Dans cette section, on note A une K-algèbre affinoïde normée munie d'un système local de coordonnées $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. On note G un groupe topologique compact agissant sur A par un morphisme de groupe continu $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$, dont on précise la topologie ci-dessous.

Notation.
• *On note $\mathrm{End}_K(A)$ l'algèbre des endomorphismes de K-algèbres de A, muni de la norme subordonnée à la norme sur A. $\mathrm{Aut}_K(A) \subset \mathrm{End}_K(A)$ est son sous-groupe des automorphismes de K-algèbres, muni de la topologie restreinte.*
• *Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. On note $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ l'algèbre des endomorphismes de R-algèbres de $\mathcal{A}$, qu'on identifie à la R-sous-algèbre de $\mathrm{End}_K(A)$ des endomorphismes qui stabilisent $\mathcal{A}$. De même, $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$ est son sous-groupe des automorphismes de R-algèbres, muni de la topologie restreinte.*

Lemme 4.5. *Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. En munissant A de la norme jauge de $\mathcal{A}$, la R-sous-algèbre $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ de $\mathrm{End}_K(A)$ est la boule unité de $\mathrm{End}_K(A)$ pour sa norme subordonnée.*

Démonstration. Notons $|\cdot|$ la norme jauge de $\mathcal{A}$ sur A, et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à cette dernière. Soit $\varphi \in \mathrm{End}_K(A)$ tel que $\|\varphi\| \leq 1$, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $|\varphi(a)| \leq |a| \leq 1$ et donc $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Réciproquement soit $\varphi \in \mathrm{End}_K(A)$ stabilisant $\mathcal{A}$. Soit $a \in A \setminus \{0\}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|a| = |p^k|$. Comme $a/p^k \in \mathcal{A}$, on obtient

$$\frac{|\varphi(a)|}{|a|} = \frac{|\varphi(a)|}{|p^k|} = |\varphi(a/p^k)| \leq 1.$$

donc $\|\varphi\| \leq 1$ et ainsi $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ est la boule unité de $\mathrm{End}_K(A)$. □

Notamment, $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ est un ouvert de $\mathrm{End}_K(A)$. De même $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$ est un ouvert de $\mathrm{Aut}_K(A)$. Toutes les normes jauges de modèles formels sur A sont équivalentes, donc ce sont des ouverts peu importe la norme choisie.

Proposition 4.6. *Tout modèle formel $\mathcal{A}$ de A est contenu dans un modèle formel G-stable.*

Démonstration. [2, Lem. 3.2.4]. □

Cette proposition nous assure toujours l'existence d'un modèle formel G-stable.

Notation.
• *On note* $\mathrm{End}_K(\Theta_A)$ *l'espace des endomorphismes continus de* K*-algèbre de Lie de* Θ_A*, muni d'une norme subordonnée où* Θ_A *en tant que* A*-module libre est muni naturellement d'une norme par la norme sur* A*.*
• $\mathrm{End}_K(U(\Theta_A))$ *est l'ensemble des endomorphismes continus de* K*-algèbre de* $U(\Theta_A)$*, muni d'une norme subordonnée où* $U(\Theta_A)$ *en tant que* A*-module libre est muni d'une norme par la norme sur* A*.*

Lemme 4.7. *Tout automorphisme* $\phi \in \mathrm{End}_K(A)$ *se relève de façon unique en un automorphisme de* $U(\Theta_A)$ *défini par* $s \in U(\Theta_A) \mapsto \phi \circ s \circ \phi^{-1}$*.*

Démonstration. Notons $\varphi : \theta \in \Theta_A \mapsto \phi \circ \theta \circ \phi^{-1}$.

- Soit $\theta \in \Theta_A$. L'image $\varphi(\theta) \in \Theta_A$ car il s'agit d'une application K-linéaire sur A et que pour tout $a, b \in A$ on a
$$\begin{aligned} \varphi(\theta)(ab) &= \phi\theta\left(\phi^{-1}(a).\phi^{-1}(b)\right) \\ &= \phi\left(\phi^{-1}(a)\theta(\phi^{-1}(b)) + \theta(\phi^{-1}(a))\phi^{-1}(b)\right) \\ &= a.\phi\theta\phi^{-1}(b) + \phi\theta\phi^{-1}(a).b \\ &= a.\varphi(\theta)(b) + \varphi(\theta)(a).b \end{aligned}$$
ce qui confirme que $\varphi(\theta)$ est bien une dérivation. Ainsi φ est une application de Θ_A dans Θ_A.
- Soient $\theta, \theta' \in \Theta_A$. L'application φ est K-linéaire et
$$\begin{aligned} \varphi([\theta,\theta']) &= \phi[\theta,\theta']\phi^{-1} = \phi\theta\theta'\phi^{-1} - \phi\theta'\theta\phi^{-1} \\ &= \phi\theta\phi^{-1}\phi\theta'\phi^{-1} - \phi\theta'\phi^{-1}\phi\theta\phi^{-1} \\ &= \varphi(\theta)\varphi(\theta') - \varphi(\theta')\varphi(\theta) \\ &= [\varphi(\theta), \varphi(\theta')] \end{aligned}$$
donc φ est un endomorphisme de K-algèbre de Lie de Θ_A. de plus, il est bijectif de réciproque φ^{-1} : $\theta \mapsto \phi^{-1} \circ \theta \circ \phi$. donc φ est un automorphisme de K-espace vectoriel de Θ_A.

Donc tout automorphisme de A se relève en un automorphisme de Θ_A.

Par la définition de l'algèbre enveloppante, il existe $i_A : A \to U(\Theta_A)$ et $i_L : \Theta_A \to U(\Theta_A)$. Posons $j_A = i_A \circ \phi$ et $j_L = i_L \circ \varphi$. En vérifiant que j_A et j_L vérifient les conditions de la propriété universelle de l'algèbre enveloppante en proposition 2.6, il existe un unique $\psi : U(\Theta_A) \to U(\Theta_A)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j_A"] & U(\Theta_A) & \Theta_A \arrow[l, "j_L"'] \\ A \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "i_A"'] & U(\Theta_A) \arrow[u, "\psi"] & \Theta_A. \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[l, "i_L"] \end{tikzcd}$$

On construit de la même façon ψ^{-1} à partir de ϕ^{-1}, ce qui permet de conclure que $\psi \in \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$. On constate de plus que le morphisme $s \mapsto \phi \circ s \circ \phi^{-1}$ convient. □

Proposition 4.8. *Le morphisme de groupes continu* $\rho_U : G \to \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ *défini par*
$$\forall g \in G,\ \forall s \in U(\Theta_A)\ ,\ \rho_U(g)(s) = \rho(g) \circ s \circ \rho(g)^{-1}$$
munit $U(\Theta_A)$ *d'une action de groupe de* G*. On a de même un morphisme de groupes continu* $G \to \mathrm{Aut}_K(\Theta_A)$ *qui munit* Θ_A *d'une action de groupe par* G*.*

Démonstration. Par le lemme précédent, pour tout $g \in G$ on relève l'automorphisme $\rho(g) \in \mathrm{Aut}_K(A)$ en un automorphisme $\rho_U(g) \in \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ tel que défini ci-dessus. De plus, l'application $g \in G \mapsto \rho_U(g)$ est un morphisme de groupes.

De cette façon, en notant $\mathrm{Conj}_U : \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A)) \to \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ la conjugaison sur $\mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$, on constate que $\rho_U = \mathrm{Conj}_U \circ \rho$. C'est donc un morphisme de groupes continu en tant que composition de morphismes de groupes continus. □

Puisque le morphisme ρ_U prolonge $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$, on notera sans perdre de généralité $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ l'action de G sur $U(\Theta_A)$.

Remarque. *Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A. De la même façon, on munit $U(\Theta_{\mathcal{A}})$ d'une action de groupe de G.*

de cette façon, $\Theta_{\mathcal{A}}$ est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie G-stable. Mais nous aimerions disposer d'un $\mathcal{A}$-réseau de Lie G-stable qui est libre, ce qui n'est pas garanti. On peut tout de même énoncer un résultat s'en approchant par la proposition suivante.

Proposition 4.9. *Soient $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A, et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie. Il existe un sous-groupe ouvert H de G tel que $\mathcal{L}$ est H-stable.*

Démonstration. Le morphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(\Theta_A)$ est continu par 4.8 donc la préimage de l'ouvert $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{L})$ par ρ, qui est le stabilisateur de $\mathcal{L}$, est ouverte. Donc $\mathcal{L}$ est H-stable avec $H = \mathit{Stab}(\mathcal{L})$ ouvert. □

Par la proposition 2.10, quitte à redimensionner le système local de coordonnées, il existe un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre $\mathcal{L}$ de base $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$, et par la proposition précédente il existe un sous-groupe ouvert H de G tel que $\mathcal{L}$ est H-stable. A restriction près du groupe G, il existe donc un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre G-stable.

Proposition 4.10. *Soient $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre G-stable. En reprenant la notation $D_k = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}_K$, le morphisme de groupes continu $\widehat{\rho} : G \to \mathrm{Aut}_K(D_k)$ défini par*

$$\forall g \in G,\ \forall s \in d_k\ ,\ \widehat{\rho}(g)(s) = \rho(g) \circ s \circ \rho(g)^{-1}$$

munit d_k d'une action de groupe de G. On dispose de la même façon d'une action de G sur $\mathcal{D}_k = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}$.

Démonstration. De la même façon que dans la proposition 4.8, on a une action de G sur $U(\pi^k\mathcal{L})$. donc pour tout $g \in G$ on a un automorphisme de R-algèbres

$$\rho(g) : U(\pi^k\mathcal{L}) \to U(\pi^k\mathcal{L}).$$

En prenant le complété de cette application, on obtient une application $\widehat{\rho(g)} : \mathcal{D}_k \to \mathcal{D}_k$. Cette application s'étend à D_k. □

Par abus de notation on notera $\rho : G \to \mathcal{D}_k$ et $\rho : G \to D_k$ les actions de G sur $\mathcal{D}_k$ et D_k.

4.3 Opérateurs G-équivariants sur une algèbre affinoïde

Dans cette section on rappelle la construction de l'algèbre de groupe tordu complète sur une algèbre affinoïde lorsqu'un groupe agit dessus, voir [2]. Cela nous permettra également de fixer quelques notations supplémentaires.

On reprend les notations de la section précédente. Soient A une K-algèbre affinoïde munie d'un système local de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Soit G un groupe topologique compact agissant sur A par un morphisme de groupe continu $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$. Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de Θ_A qui est G-stable et libre de base $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$. Enfin, on note $D_k = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}_K$ et $\mathcal{D}_k = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}$.

Nous commençons par introduire des séries particulières de $\mathcal{D}_k$ qui sont les séries exponentielles et logarithmes et qui sont étudiées dans le chapitre 6 de [13] (et notamment la proposition 6.22).

Pour commencer, soit $\varepsilon = 1$ si $p \neq 2$ et $= 2$ sinon. Soit S une K-algèbre de Banach, et soit $\mathcal{S}$ sa boule unité qui est une R-algèbre. Les séries suivantes sont bien définies

$$\begin{array}{rccc} \exp : & p^\varepsilon\mathcal{S} & \to & 1+p^\varepsilon\mathcal{S} \\ & s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{s^k}{k!} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \log : & 1+p^\varepsilon\mathcal{S} & \to & p^\varepsilon\mathcal{S} \\ & 1+s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-s)^k}{k} \end{array}.$$

Corollaire 4.11. *Les séries exponentielles sont bien définies sur les espaces suivants :*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & p^\varepsilon \mathcal{A} & \to & 1+p^\varepsilon \mathcal{A} \\ \exp : & p^\varepsilon \operatorname{End}_R(\mathcal{A}) & \to & 1+p^\varepsilon \operatorname{End}_R(\mathcal{A}) \\ \exp : & p^\varepsilon d_k & \to & 1+p^\varepsilon d_k \end{array}$$

ainsi que les séries logarithmes qui en sont les réciproques.

Démonstration. On applique la remarque précédente avec $S = A$ qui a pour boule unité $\mathcal{S} = \mathcal{A}$. de même, pour $S = \operatorname{End}_K(A)$ et sa norme subordonnée, par le lemme 4.5 on obtient que sa boule unité est $\mathcal{S} = \operatorname{End}_R(\mathcal{A})$. Enfin, pour $S = \mathcal{D}_k$ et sa norme $|\cdot|_k$, sa boule unité est $\mathcal{S} = \mathcal{D}_k$. □

Soit $\rho : G \to \operatorname{Aut}_R(\mathcal{A})$ l'action de groupe de G sur $\mathcal{A}$.

Proposition 4.12. *Soit $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\exp(p^\varepsilon \pi^k \mathcal{L})$ est un sous-groupe de $\operatorname{Aut}_R(\mathcal{A})$. Le sous-ensemble*

$$G_{\pi^k\mathcal{L}} := \rho^{-1}(\exp(p^\varepsilon \pi^k \mathcal{L}))$$

est un sous-groupe normal de G. Soit N un sous-groupe normal de G inclus dans $G_{\pi^k\mathcal{L}}$. L'application $\rho_{|N} : N \to D_k^\times$ est une trivialisation G-équivariante de $D_k \rtimes N$.

Démonstration. Voir [2, Thm. 3.2.12]. □

Définition 4.13. *Soit $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes ouverts normaux de G tel que*

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} N_k = \{1\} \quad \textit{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset G_{\pi^k\mathcal{L}}$$

On pose

$$\widehat{\mathcal{D}}(A, G) := \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}_K \rtimes_{N_k} G$$

où la trivialisation G-équivariante choisie pour chaque N_k est $\beta_k = \rho_{|N_k} : N_k \to D_k^\times$.

Une telle suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existe toujours, et dans le cas où l'action de G sur A est fidèle on prend simplement la suite $(G_{\pi^k\mathcal{L}})_{k\in\mathbb{N}}$. En effet, il n'y a que dans ce cas seulement que la suite $(G_{\pi^k\mathcal{L}})_{k\in\mathbb{N}}$ est d'intersection nulle. La limite projective ci-dessus est bien définie. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a une application $D_{k+1} \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G$, et comme $N_{k+1} \subset N_k$ alors $\tilde{\beta}_{k+1}(N_{k+1}) \subset \tilde{\beta}_k(N_k)$. Par passage au quotient on obtient une application

$$D_{k+1} \rtimes_{N_{k+1}} G \to D_k \rtimes_{N_k} G.$$

Ce qui donne le système projectif $(D_k \rtimes_{N_k} G)_{k\in\mathbb{N}}$.

Remarque. *A isomorphisme près, la définition ci-dessus coincide avec la définition originale de $\widehat{\mathcal{D}}(A, G)$, cf. [2, def. 3.3.1], voir aussi [2, Lem. 3.3.4]. L'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}(A, G)$ ne dépend ni du réseau de Lie $\mathcal{L}$ choisi, ni de la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ni du modèle formel choisi, à isomorphisme près. Lorsque $G = 1$, on a $\widehat{\mathcal{D}}(A, G) = \widehat{\mathcal{D}}_A$.*

Proposition 4.14. *En reprenant les notations de la définition 4.13, l'espace $D_k \rtimes_{N_k} G$ est un D_k-module libre de type fini dont une base est formée par une famille de représentants $(g_i)_{i\in I_k}$ du quotient G/N_k. C'est de plus une K-algèbre de Banach par la norme q_k définie par*

$$q_k\left(\sum_{i\in I_k} s_i.g_i\right) := \max_{i\in I_k} |s_i|_k.$$

Démonstration. L'espace $D_k \rtimes_{N_k} G$ est le quotient du D_k-module libre $D_k \rtimes G$ par les éléments de la forme $\rho(h) - h$ où $h \in N_k$. Comme N_k est ouvert et G est compact, l'indice de N_k dans G est fini. Notons alors

$\{g_i\ ,\ i \in I_k\}$ un ensemble fini de représentants dans G des classes du quotient à gauche G/N_k. Pour tout élément $s = \sum s_g.g \in D_k \rtimes G$ avec $s_g \in D_k$ pour tout $g \in G$, on a

$$\sum_{g\in G} s_g.g = \sum_{i\in I_k}\sum_{h\in N} s_{hg_i}.hg_i \equiv \sum_{i\in I_k}\left(\sum_{h\in N} s_{hg_i}\rho(h)\right).g_i.$$

donc les $g_i, i \in I_k$ engendrent $D_k \rtimes_{N_k} G$ en tant que D_k-module, et on a même

$$D_k \rtimes_{N_k} G = \bigoplus_{i\in I_k} \mathcal{D}_k.g_i.$$

En tant que D_k-module libre de type fini de base $(g_i)_{i\in I_k}$, on munit cet espace d'une norme q_k définie par

$$q_k\left(\sum_{i\in I_k} s_i.g_i\right) := \max_{i\in I_k} |s_i|_k.$$

Et $D_k \rtimes_{N_k} G$ est complet pour q_k car D_k est complet pour $|\cdot|_k$. □

Théorème 4.15. *$\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$ est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère.*

Démonstration. C'est [2, Thm. 3.4.8], mais nous donnons quelques détails. Par le théorème 3.9, $\widehat{\mathcal{D}}_A$ est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère donc D_k est un D_{k+1}-module plat (à gauche et à droite) et est noethérien pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $D_k \rtimes_{N_k} G$ est un D_k-module libre de type fini donc est plat et noethérien. On a

$$\begin{tikzcd}
D_{k+1} \arrow[rr] \arrow[d, hook] \arrow[drr, dashed] & & D_k \arrow[d, hook] \\
D_{k+1} \rtimes_{N_{k+1}} G \arrow[rr] & & D_k \rtimes_{N_k} G
\end{tikzcd}$$

où la flèche diagonale est plate, et se factorise par l'injection présente à gauche dans le diagramme en un morphisme plat $D_{k+1} \rtimes_{N_{k+1}} G \to D_k \rtimes_{N_k} G$, en utilisant le lemme 2.2 de [19]. Ainsi $\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$ est bien une K-algèbre de Fréchet-Stein. □

Proposition 4.16. *$\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$ est A-nucléaire.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $F_k = A\langle\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n}\rangle \rtimes G/N_k$. Notons $\{g_i, i \in I_k\}$ une famille de représentants dans G du quotient G/N_k qui est fini. Il existe alors une surjection $F_k \to D_k \rtimes_{N_k} G$ par

$$f : \sum_{i\in I_k}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\partial^\alpha.g_i \longmapsto \sum_{i\in I_k}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\pi^{k|\alpha|}\partial^\alpha.g_i.$$

Alors f est limite de la suite de morphismes de A-modules $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $j \in \mathbb{N}$ par

$$f_j : \sum_{i\in I_k}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\partial^\alpha.g_i \longmapsto \sum_{i\in I_k}\sum_{|\alpha|\le j} a_\alpha\pi^{k|\alpha|}\partial^\alpha.g_i.$$

On constate alors que $f_j(\mathcal{A}\langle\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n}\rangle \rtimes G/N_k)$ est de type fini sur $\mathcal{A}$, et donc f est scc. Ainsi $\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$ est A-nucléaire. □

4.4 Opérateurs d'ordre fini

Dans cette section, on reprend toutes les notations utilisées lors de la section précédente. On reprend également les notations de la définitions 4.13, et on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ un espace $d_k \rtimes_{N_k} G$, qui par la proposition 4.14 est muni d'une base finie $\{g_i\}_{i\in I_k}$ sur D_k et d'une norme q_k.

Le but de cette section est de montrer que $\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$ est la complétion en tant que module bornologique de $U(\Theta_A) \rtimes G$, l'algèbre engendrée sur G par les opérateurs d'ordre fini.

Remarque. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les applications suivantes*

$$U(\Theta_A) \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G \xrightarrow{\pi_k} D_k \rtimes_{N_k} G$$

munissent, par la norme q_k sur $D_k \rtimes_{N_k} G$, les espaces $U(\Theta_A) \rtimes G$ et $D_k \rtimes G$ d'une semi-norme qu'on notera aussi abusivement q_k définie par

$$q_k\left(\sum_{g\in G} s_g.g\right) = q_k\left(\pi_k\left(\sum_{g\in G} s_g.g\right)\right) = \max_{i\in I_k}\left|\sum_{h\in N_k} s_{hg_i}\rho(h)\right|_k.$$

Lemme 4.17. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $h \in N_k$, on a $|\rho(h)|_k = 1$.*

Démonstration. Soit $h \in N_k$, puisque $\rho(h) \in \exp(p^\varepsilon \pi^k \mathcal{L})$ et que $\pi^k\mathcal{L} \subset \mathcal{D}_k$, alors par le corollaire 4.11 on a $\rho(h) \in 1 + p^\varepsilon \mathcal{D}_k$. Il existe $s \in D_k$ tel que $\rho(h) = 1 + p^\varepsilon s$, et comme $|p^\varepsilon s|_k < |1|_k$ alors $|\rho(h)|_k = |1|_k = 1$. $\square$

Lemme 4.18. *Pour tout $g \in G$ et pour tout $s \in D_k$, on a $|\rho(g)s\rho(g^{-1})|_k \leq |s|_k$.*

Démonstration. Soient $g \in G$ et $s \in D_k$. Il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $|s|_k = |\pi^i|$ et donc $\pi^{-i}s \in \mathcal{D}_k$. Or, $\mathcal{L}$ est G-stable donc $\mathcal{D}_k$ l'est aussi. Ainsi comme $\mathcal{D}_k$ est la boule unité de D_k on a $|\rho(g)(\pi^{-i}s)|_k \leq 1$. On en conclut $|\rho(g)(s)|_k \leq |\pi^i| = |s|_k$. $\square$

Proposition 4.19. *La norme q_k sur $D_k \rtimes_{N_k} G$ est sous-multiplicative, ainsi que les semi-normes induites sur $D_k \rtimes G$ et $U(\Theta_A) \rtimes G$.*

Démonstration. Soient $s, r \in D_k \rtimes G$. On les écrit de la forme

$$s = \sum_{g\in G} s_g.g \quad \text{et} \quad r = \sum_{h\in G} r_h.h \quad \text{avec } s_g, r_h \in D_k\ \forall g, h \in G.$$

Alors le produit s'écrit

$$s.g = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} s_g\rho(g)(r_h).gh = \sum_{h\in G}\left(\sum_{g\in G} s_g\rho(g)(r_{g^{-1}h})\right).h.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
q_k(s.r) = \max_{i\in I_k}\left|\sum_{\gamma\in N_k}\sum_{g\in G} s_g\rho(g)(r_{g^{-1}\gamma g_i})\rho(\gamma)\right|_k &= \max_{i\in I_k}\left|\sum_{\gamma\in N_k}\sum_{j\in I_k}\sum_{h\in N_k} s_{hg_j}\rho(hg_j)(r_{g_j^{-1}h^{-1}\gamma g_i})\rho(\gamma)\right|_k \\
&\leq \max_{i\in I_k}\max_{j\in I_k}\left|\sum_{\gamma\in N_k}\sum_{h\in N_k} s_{hg_j}\rho(h)\rho(g_j)(r_{g_j^{-1}h^{-1}\gamma g_i})\rho(h)^{-1}\rho(\gamma)\right|_k \\
&\leq \max_{i\in I_k}\max_{j\in I_k}\left|\sum_{\gamma\in N_k}\sum_{h\in N_k} s_{hg_j}\rho(h)\rho(g_j)(r_{\gamma g_i})\rho(\gamma)\right|_k \\
&\leq \max_{i\in I_k}\max_{j\in I_k}\left|\sum_{\gamma\in N_k}\rho(g_j)(r_{\gamma g_i})\rho(\gamma)\right|_k.\left|\sum_{h\in N_k} s_{hg_j}\rho(h)\right|_k \\
&\leq \max_{i\in I_k}\max_{j\in I_k}\left|\rho(g_j)\left(\sum_{\gamma\in N_k} r_{\gamma g_i}\rho(\gamma)\right)\rho(g_j)^{-1}\right|_k.\left|\sum_{h\in N_k} s_{hg_j}\rho(h)\right|_k \\
&\leq \max_{i\in I_k}\left|\sum_{\gamma\in N_k} r_{\gamma g_i}\rho(\gamma)\right|_k.\max_{j\in I_k}\left|\sum_{h\in N_k} s_{hg_j}\rho(h)\right|_k = q_k(r).q_k(s)
\end{aligned}$$

car par la norme $|\cdot|_k$ est sous-multiplicative et par le lemme précédent. $\square$

Proposition 4.20. *Notons $\mathcal{B}_k$ la boule de rayon 1 fermée de $D_k \rtimes G$ pour sa norme q_k. Alors $\mathcal{D}_k \rtimes G \subset \mathcal{B}_k$.*

Démonstration. Soit $s \in \mathcal{D}_k \rtimes G \subset D_k \rtimes G$, c'est-à-dire

$$s = \sum_{g \in G} s_g.g \text{ avec } \forall g \in G,\ |s_g|_k \leq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} q_k(s) &= \max_{i \in I_k} \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_i} \rho(h) \right|_k \leq \max_{i \in I_k} \max_{h \in N_k} |s_{hg_i} \rho(h)|_k \\ &\leq \max_{i \in I_k, h \in N_k} |s_{hg_i}|_k \underbrace{|\rho(h)|_k}_{=1} = \max_{g \in G} |s_g|_k \leq 1. \end{aligned}$$

ce qu'on obtient notamment par sous-multiplicativité de la norme $|\cdot|_k$ et par le lemme précédent, et ainsi $s \in \mathcal{B}_k$. $\square$

Plus généralement si les coordonnées sur D_k d'un élément de $D_k \rtimes G$ sont de norme inférieure à d pour $|\cdot|_k$, alors cet élément est de norme inférieure à d pour q_k. L'inverse n'est pas vrai en général.

Proposition 4.21. *Les espaces $U(\Theta_A) \rtimes G$ et $\widehat{d}_A \rtimes G$ sont des K-espaces vectoriels localement convexes par les décompositions*

$$\begin{aligned} U(\Theta_A) \rtimes G &\simeq \varprojlim (U(\Theta_A) \rtimes G, q_k) \\ \widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G &\simeq \varprojlim (D_k \rtimes G, q_k). \end{aligned}$$

On a

$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^h \simeq \widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G}^h \simeq \widehat{\mathcal{D}}(A, G).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G \simeq \varprojlim D_k \rtimes G$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ une injection $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G$ qui par exactitude à gauche de la limite projective donne l'injection $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G \hookrightarrow \varprojlim D_k \rtimes G$. Soit $s \in \varprojlim D_k \rtimes G$. On écrit s de la forme

$$s = \left(\sum_{g \in G} s_{g,k}.g \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{k \in \mathbb{N}} D_k \rtimes G \ \text{ tel que } \forall k, l \in \mathbb{N},\ \sum_{g \in G} s_{g,k}.g = \sum_{g \in G} s_{g,l}.g.$$

Notamment pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\sum s_{g,0}.g = \sum s_{g,k}.g$ ce qui signifie que pour tout $g \in G$ on a $s_{g,0} = s_{g,k} \in D_k$. Comme $s_{g,0} \in D_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on en conclut que $s_{g,0} \in \widehat{\mathcal{D}}_A$. Ainsi $\sum s_{g,0}.g \in \widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G$ est un antécédent de s pour l'injection $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G \hookrightarrow \varprojlim D_k \rtimes G$ qui est donc un isomorphisme.

Montrons ensuite que $\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{q_k} \simeq \widehat{D_k \rtimes G}^{q_k} \simeq D_k \rtimes_{N_k} G$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par les applications suivantes

$$U(\Theta_A) \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G \overset{\pi_k}{\twoheadrightarrow} D_k \rtimes_{N_k} G$$

pour tout $s \in D_k \rtimes G$, on a $q_k(s) = q_k(\pi_k(s))$ et puisque q_k est une norme sur $D_k \rtimes_{N_k} G$ alors $\pi_k(s) = 0$ si et seulement si $q_k(s) = 0$. Donc

$$U(\Theta_A) \rtimes G \big/ \{q_k = 0\} \hookrightarrow D_k \rtimes G \big/ \{q_k = 0\} \simeq D_k \rtimes_{N_k} G.$$

Ces espaces quotients sont munis de la norme quotient issue de q_k, et les applications ci-dessus étant injectives et denses, on a alors

$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{q_k} \simeq \widehat{D_k \rtimes G}^{q_k} \simeq D_k \rtimes_{N_k} G.$$

Ainsi

$$\begin{array}{llll} \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^h & \simeq \varprojlim \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{q_k} & \simeq \varprojlim D_k \rtimes_{N_k} G & = \widehat{\mathcal{D}}(A, G) \\ \widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G}^h & \simeq \varprojlim \widehat{D_k \rtimes G}^{q_k} & \simeq \varprojlim D_k \rtimes_{N_k} G & = \widehat{\mathcal{D}}(A, G). \end{array}$$

□

Lemme 4.22. *Soit $s \in D_k \rtimes G$ tel que $q_k(s) \leq 1$. Il existe $s', s_0 \in D_k \rtimes G$ avec $q_k(s_0) = 0$ et $s' \in \mathcal{D}_k \rtimes G$ tels que $s = s_0 + s'$.*

Démonstration. Soit $s \in D_k \rtimes G$ tel que $q_k(s) \leq 1$. On écrit s de la forme

$$s = \sum_{g \in G} s_g . g \quad \text{où} \quad \forall g \in G, \; s_g \in D_k.$$

On a donc pour tout $i \in I_k$,

$$|t_i|_k \leq 1 \quad \text{où} \quad t_i = \sum_{h \in N_k} s_{hg_i} \rho(h) \in D_k.$$

Il suffit alors de prendre

$$s' = \sum_{i \in I_k} t_i . g_i \in D_k \rtimes G.$$

Puisque $|t_i|_k \leq 1$ pour tout $i \in I_k$, alors $t_i \in \mathcal{D}_k$, et $s' \in \mathcal{D}_k \rtimes G$. Ainsi, en posant $s_0 = s - s'$, alors

$$q_k(s_0) = \max_{i \in I_k} \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_i} \rho(h) - t_i \right|_k = 0$$

et on a la décomposition $s = s_0 + s'$ voulue. □

Lemme 4.23. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{D}_{k+1} \subset \pi^j \mathcal{D}_k + F_j U(\pi^{k+1} \mathcal{L})$$

où $F_j U(\pi^{k+1} \mathcal{L})$ est un sous-ensemble de $U(\pi^{k+1} \mathcal{L})$ tel que

$$F_j U(\pi^{k+1} \mathcal{L}) := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha \; / \; a_\alpha \in \mathcal{A} \right\}.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{D}_{k+1}$. On écrit t de la forme

$$t = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha \quad \text{où} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \; a_\alpha \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \lim_{|\alpha| \to \infty} a_\alpha = 0.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} t &= \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha + \sum_{|\alpha| > j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha + \pi^j \sum_{|\alpha| > j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha| - j} \partial^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha + \pi^j \sum_{|\alpha| > j} \underbrace{(a_\alpha \pi^{|\alpha| - j})}_{\in \mathcal{A}} \pi^{k|\alpha|} \partial^\alpha = t_j + \pi^j t' \end{aligned}$$

avec $t_j \in F_j U(\pi^{k+1} \mathcal{L})$ et $t' \in \mathcal{D}_k$. Ainsi, on a bien

$$\mathcal{D}_{k+1} \subset \pi^j \mathcal{D}_k + F_j U(\pi^{k+1} \mathcal{L}).$$

□

Corollaire 4.24. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{D}_{k+1} \rtimes G \subset \pi^j \mathcal{D}_k \rtimes G + F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \rtimes G.$$

Démonstration. S'en déduit directement du lemme précédent. □

Lemme 4.25. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble $F_j U(\pi^k \mathcal{L})$ est un borné de $\widehat{\mathcal{D}}_A$ et $F_j U(\pi^k \mathcal{L}) \rtimes G$ est un borné de $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G$.*

Démonstration. Soit $s \in F_j U(\pi^k \mathcal{L})$. L'élément s s'écrit de la forme

$$s = \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{k|\alpha|} \partial^\alpha \quad \text{où} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \; a_\alpha \in \mathcal{A}.$$

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$|s|_i = \max_{|\alpha| \leq j} |a_\alpha \pi^{k-i}| \leq |\pi^{k-i}|.$$

donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $F_j U(\pi^k \mathcal{L})$ est borné par la constante $|\pi^{k-i}|$, donc $F_j U(\pi^k \mathcal{L}) \subset \pi^{k-i} \mathcal{D}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et c'est un sous-ensemble borné de $\widehat{\mathcal{D}}_A$ puisqu'il est borné pour toutes ses semi-normes. De la même façon par la proposition 4.20 on a $F_j U(\pi^k \mathcal{L}) \rtimes G \subset \pi^{k-i} \mathcal{D}_k \rtimes G \subset \pi^{k-i} \mathcal{B}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et c'est un borné de $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G$. □

Proposition 4.26. *L'espace $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G$ est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{B}_{k+1}$, qui désigne la boule unité de $D_{k+1} \rtimes G$. Il existe par le lemme 4.22 des éléments $s_0 \in D_{k+1} \rtimes G$ et $s' \in \mathcal{D}_{k+1} \rtimes G$ tels que $q_{k+1}(s_0) = 0$ et $s = s_0 + s'$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe par le corollaire 4.24 des éléments $t_j \in F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \rtimes G$ et $t' \in \mathcal{D}_k \rtimes G$ tels que $s' = t_j + \pi^j t'$. Ainsi

$$s = s_0 + \pi^j t' + t_j.$$

Comme $q_{k+1}(s_0) = 0$, on a $q_k(s_0) = 0$ et $s_0 \in \pi^j \mathcal{B}_k$. De plus, $t' \in \mathcal{D}_k \rtimes G \subset \mathcal{B}_k$ par la proposition 4.20, et donc l'élément $s_0 + \pi^j t' \in \pi^j \mathcal{B}_k$. On pose $B' = F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \rtimes G$. Alors B' est un borné de $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G$ par le lemme précédent et on a

$$\mathcal{B}_{k+1} \subset \pi^j \mathcal{B}_k + B'.$$

donc par la proposition 3.43, $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G$ est pseudo-nucléaire. □

Corollaire 4.27. *L'espace $U(\Theta_A) \rtimes G$ est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in U(\Theta_A) \rtimes G$ tel que $q_{k+1}(s) \leq 1$. Alors $s \in \mathcal{B}_{k+1}$ et en reprenant les notations de la preuve précédente on a pour tout $j \in \mathbb{N}$ la décomposition

$$s = s_0 + \pi^j t' + t_j.$$

Or $B' \subset U(\Theta_A) \rtimes G$, donc $s_0 + \pi^j t' = s - t_j$ appartient à $U(\Theta_A) \rtimes G$. Ainsi

$$\mathcal{B}_{k+1} \cap (U(\Theta_A) \rtimes G) \subset \pi^j \mathcal{B}_k \cap (U(\Theta_A) \rtimes G) + B'$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{B}_k \cap (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est la boule unité de $U(\Theta_A) \rtimes G$ pour q_k. Donc par la proposition 3.43, $U(\Theta_A) \rtimes G$ est pseudo-nucléaire. □

Le théorème suivant, qui décrit l'anneau topologique compliqué $\widehat{\mathcal{D}}(A, G)$ comme complétion bornologique de l'anneau de groupe algébrique $U(\Theta_A) \rtimes G$, est le résultat principal technique de cet article.

Théorème 4.28. *On a*

$$\widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G}^b \simeq \widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G}^h \simeq \widehat{\mathcal{D}}(A, G)$$
$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^b \simeq \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^h \simeq \widehat{\mathcal{D}}(A, G).$$

Démonstration. Puisque $\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G$ et $U(\Theta_A) \rtimes G$ sont pseudo-nucléaires, par la proposition 3.45 on a

$$\widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G}^{b} \simeq \widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G}^{h}$$
$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{b} \simeq \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{h}.$$

de plus par la proposition 4.21, on a

$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{h} \simeq \widehat{\widehat{\mathcal{D}}_A \rtimes G}^{h} \simeq \widehat{\mathcal{D}}(A, G).$$

Ce qui prouve la propriété. □

4.5 $\mathcal{D}$-modules G-équivariants coadmissibles

On introduit les $\mathcal{D}$-modules G-équivariants coadmissibles suivant [2]. Soit G un groupe topologique et X une variété rigide. On dit que G agit *continument* sur X si on a un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(X)$ tel que pour tout ouvert affinoïde quasi-compact et quasi-séparé U de X le stabilisateur G_U de U dans G est ouvert et la restriction $\rho_U : G_U \to \mathrm{Aut}_K(U)$ est continue.

Définition 4.29. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continument sur une variété rigide lisse X. Un couple (U, H) est dit petit dans X (et H est dit U-petit dans ce casa) si*

- *U est un sous-espace affinoïde de X.*
- *H est un sous-groupe ouvert compact de G_U.*
- *U possède un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre H-stable, où $\mathcal{A}$ est un modèle formel H-stable de $\mathcal{O}_X(U)$.*

Dans le cas où (U, H) est petit dans X avec $U \in X_w^c$, toutes les conditions de la définition 4.13 sont vérifiées pour $\mathcal{O}_X(U)$ et H, et $\widehat{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_X(U), H)$ est bien défini. On le notera simplement $\widehat{\mathcal{D}}(U, H)$.

Proposition 4.30. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une variété rigide lisse X. Pour tout $U \in X_w^c$, il existe un sous-groupe H de G_U tel que H est U-petit.*

Soient $U \in X_w^c$ et H un sous-groupe U-petit de G. On a les propriétés suivantes

- *Si $N \leq H$ est un sous-groupe ouvert compact de H, alors N est U-petit.*
- *Si $V \subset U$ est un affinoïde stable par H, alors H est V-petit.*
- *Si $g \in G$, alors $gU \in X_w^c$ et gHg^{-1} est gU-petit.*

Démonstration. La première annoncée est [2, Lem. 3.4.7]. Le reste est facile à prouver. □

Lemme 4.31. *Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme entre deux algèbres affinoïdes et H un groupe topologique compact agissant sur A et B par un morphisme continu. Il existe des modèles formels H-stables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de A et B tel que $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.*

Démonstration. Par la proposition 4.6, il existe un modèle formel $\mathcal{A}$ de A qui est H-stable. Soit $\mathcal{B}'$ un modèle formel de B, alors $\varphi(\mathcal{A}).\mathcal{B}'$ est un modèle formel de B. Par la proposition 4.6 il existe un modèle formel $\mathcal{B}$ contenant $\varphi(\mathcal{A}).\mathcal{B}'$ tel que $\mathcal{B}$ est H-stable. Et dans ce cas on a bien $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. □

Proposition 4.32. *Soient $U, V \in X_w^c$ tel que $U \subset V$, et $H \leq N$ des sous-groupes de G qui sont U-petits et V-petits. On a des applications tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{D}}(V, H) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}(U, H) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widehat{\mathcal{D}}(V, N) & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}(U, N).
\end{array}$$

Démonstration. Par la proposition 4.30, tous les espaces ci-dessus sont bien définis et on peut appliquer [2, Thm. 3.3.12]. □

Lemme 4.33. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une variété rigide lisse X. Pour tout $g \in G$, pour tout $U \in X_w^c$ et H sous-groupe U-petit de G, il existe une application*

$$g_{U,H} : \widehat{\mathcal{D}}(U, H) \to \widehat{\mathcal{D}}(gU, gHg^{-1})$$

tel que pour tout $V \subset U$ stable par H, le diagramme commute

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{D}}(V,H) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{D}}(gV, gHg^{-1}) \arrow[d] \\ \widehat{\mathcal{D}}(U,H) \arrow[r] & \widehat{\mathcal{D}}(gU, gHg^{-1}). \end{tikzcd}$$

Démonstration. L'énoncé est un cas particulier de [2, Thm. 3.3.12], voir [2, Lem. 3.4.3]. □

Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continument sur X par un morphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(X)$.

Définition 4.34. *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de K-espaces vectoriels sur X. On appelle structure équivariante K-linéaire sur $\mathcal{F}$ un ensemble $\{g^{\mathcal{F}}\}_{g \in G}$ de morphismes de préfaisceaux*

$$g^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to g^{\#}\mathcal{F}$$

où $g^{\#}\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(gU)$ pour tout $U \in X_{rig}$, et tel que pour tout $g, h \in G$, on a $(gh)^{\mathcal{F}} = h^{\#}(g^{\mathcal{F}}) \circ h^{\mathcal{F}}$. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{F}$ est un préfaisceau G-équivariant. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des préfaisceaux G-équivariants. Un morphisme de préfaisceaux de K-module $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ est G-équivariant si pour tout $g \in G$ on a

$$g^{\#}(\varphi) \circ g^{\mathcal{F}} = g^{\mathcal{F}'} \circ \varphi.$$

Par exemple, les faisceaux $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{D}_X$ sont naturellement des faisceaux de K-algèbres G-équivariants sur X.

Définition 4.35. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de K-algèbres G-équivariant sur X. On dit que $\mathcal{M}$ est un G-$\mathcal{F}$-module, ou un faisceau de $\mathcal{F}$-module G-équivariant, si c'est un faisceau G-équivariant sur X tel que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{F}$-module et que pour tout $U \in X_{rig}$, pour tout $g \in G$*

$$g^{\mathcal{M}}(a.m) = g^{\mathcal{F}}(a).g^{\mathcal{M}}(m) \text{ pour tout } a \in \mathcal{F}(U) \text{ et } m \in \mathcal{M}(U)$$

Un morphisme de G-$\mathcal{F}$-modules est un morphisme de faisceaux de $\mathcal{F}$-modules qui est G-équivariant.

Notre exemple principal de tels modules sera les G-$\mathcal{D}_X$-modules.

Soit X lisse. Soient $U \in X_w^c$ et H un sous-groupe U-petit de G.

Définition 4.36. *Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}(U, H)$-module coadmissible. On pose pour tout $V \in U_w^c$ et pour tout sous-groupe V-petit N de H*

$$M(V, N) := \widehat{\mathcal{D}}(V, N)\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(U,N)} M.$$

Lemme 4.37. *Soient $V \in X_w^c$ et N un sous-groupe V-petit de G. Soit $N' \leq N$ un sous-groupe ouvert compact. On a l'isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}(V, N')$-modules*

$$\widehat{\mathcal{D}}(V, N') \otimes_{K[N']} K[N] \simeq \widehat{\mathcal{D}}(V, N).$$

Démonstration. C'est contenu dans la preuve de [2, Prop. 3.4.10]. □

Le lemme implique que $\widehat{\mathcal{D}}(V, N)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}(V, N')$-module coadmissible. Une conséquence formelle du lemme est le corollaire suivant, cf. [2, Prop. 3.5.5].

Corollaire 4.38. *Soient $V \in U_w^c$ et N un sous-groupe V-petit de H. Soit N' un sous-groupe ouvert compact de N. On a l'isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}(V,N')$-modules*

$$\widehat{\mathcal{D}}(V,N')\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(U,N')}\widehat{\mathcal{D}}(U,N) \simeq \widehat{\mathcal{D}}(V,N).$$

Par conséquent, on a l'isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}(V,N')$-modules $M(V,N') \simeq M(V,N)$ pour chaque $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-module coadmissible M.

Définition 4.39. *Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-module coadmissible. On définit pour tout $V \in U_w^c$*

$$Loc_{U,H}(M)(V) := \varprojlim_{N \leq H \ V\text{-petit}} M(V,N).$$

Proposition 4.40. *Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-module coadmissible. $Loc_{U,H}(M)$ est un faisceau sur U_w^c, qu'on étend en un faisceau sur U_{rig}. Ainsi, $Loc_{U,H}$ est un foncteur de la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-modules coadmissibles dans la catégorie des H-$\mathcal{D}_U$-modules.*

Démonstration. Voir [2, Thm. 3.5.8 et 3.5.11]. □

Définition 4.41. *Un G-$\mathcal{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est dit coadmissible si pour tout $U \in X_w^c$ il existe un sous-groupe U-petit H de G tel que le $\mathcal{D}(U)$-module $\mathcal{M}(U)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-module coadmissible et*

$$\mathcal{M}_{|U} \simeq Loc_{U,H}(\mathcal{M}(U)).$$

On note $\mathcal{C}_{X/G}$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules G-équivariants coadmissibles dont les morphismes sont les morphismes de G-$\mathcal{D}_X$-modules continus.

Dans la situation de la proposition 4.40, le foncteur $Loc_{U,H}$ induit une équivalence entre $\mathcal{C}_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H)}$ et $\mathcal{C}_{U/H}$, cf. [2, Thm. 3.6.11].

5 Foncteur image inverse de G-$\mathcal{D}$-modules coadmissibles

5.1 Bimodule de transfert équivariant local

Dans cette section, on définit un bimodule de transfert local pour les G-$\mathcal{D}$-modules.

Hypothèses. *Dans cette section, on suppose que l'on a*

- *des K-algèbres affinoïdes A et B respectivement de rang n et m et munies de systèmes locaux de coordonnées.*
- *un groupe topologique compact G agissant sur A et B par des morphismes de groupes continus $\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$ et $\rho_B : G \to \mathrm{Aut}_K(B)$.*
- *un morphisme lisse de K-algèbres affinoïdes $f : A \to B$ qui est G-équivariant, c'est-à-dire que pour tout $a \in A$ et pour tout $g \in G$ on a*
$$f(g \cdot a) = g \cdot f(a).$$
- *des systèmes locaux de coordonnées $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(y_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ de A et de B tels que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.*
- *des modèles formels G-stables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tels que $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.*
- *un $\mathcal{A}$-réseau $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ de Θ_A et un $\mathcal{B}$-réseau $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ de Θ_B, tous deux libres et G-stables, tels que*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}.\partial_{x_i} \quad et \quad \mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{B}.\partial_{y_j}.$$

Nous constatons tout d'abord que nous obtenons des résultats similaires à ceux de la section 2.3 pour les opérateurs d'ordre fini.

Proposition 5.1. *$B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est un $(U(\Theta_B) \rtimes G)$-module.*

Démonstration. L'espace $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est muni d'une structure de $U(\Theta_B)$-module par la proposition 2.24. On munit naturellement l'espace $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ d'une structure de $U(\Theta_B)$-module par l'action a_U définie pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ et pour tout $t \in U(\Theta_B)$ par

$$a_U(t)(b \otimes s.g) = (t \cdot (b \otimes s)).g.$$

Cet espace est aussi muni d'une action a_G de G définie pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ et pour tout $h \in G$ par

$$a_G(h)(b \otimes s.g) = \rho_B(h)(b) \otimes \rho_A(h) s \rho_A(h^{-1}).hg.$$

Les éléments de $U(\Theta_B) \rtimes G$ agissent donc sur cet espace. Or, pour tout $h \in G$ et pour tout $\theta \in \Theta_B$, on a pour tout $\sum (b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g) \in B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$

$$\begin{aligned} & a_G(h) \circ a_U(\theta) \circ a_G(h^{-1}) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \rho_B(h)(\theta)(b_\alpha) \otimes \partial^\alpha.g + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{i=1}^{n} b_\alpha \rho_B(h)(\theta(f(x_i))) \otimes \rho_A(h) \partial_{x_i} \rho_A(h^{-1}) \partial^\alpha.g. \end{aligned}$$

Or, $\rho_A(h)$ est un isomorphisme de A, donc $d\rho_A(h)$ est un isomorphisme semi-linéaire de Ω_A, qui transforme la base $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de Ω_A en une base $(d\rho_A(h)(x_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ de Ω_A. Ainsi en notant $x'_i = \rho_A(h)(x_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on obtient $\partial_{x'_i} = \rho_A(h)(\partial_{x_i})$ et $(x'_i, \partial_{x'_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système local de coordonnées de A. Donc

$$\begin{aligned} & a_G(h) \circ a_U(\theta) \circ a_G(h^{-1}) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \rho_B(h)(\theta)(b_\alpha) \otimes \partial^\alpha.g + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{i=1}^{n} b_\alpha \rho_B(h)(\theta)(f(x'_i))) \otimes \partial_{x'_i} \partial^\alpha.g \\ &= a_U(\rho_B(h)(\theta)) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g \right) \end{aligned}$$

où on a utilisé la G-équivariance de f. On obtient ainsi pour tout $h \in G$ et pour tout $t \in U(\Theta_B)$

$$a_G(h) \circ a_U(t) \circ a_G(h^{-1}) = a_U(\rho_B(h)(t))$$

et par la relation $h.t.h^{-1} = \rho_B(h)(t)$ qui définit $U(\Theta_B) \rtimes G$, on obtient finalement une action de $U(\Theta_B) \rtimes G$ sur $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$. □

Proposition 5.2. *Le $(U(\Theta_B) \rtimes G)$-module $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est de présentation finie engendré sur $(U(\Theta_B) \rtimes G)$ par l'élément $1 \otimes 1$ tel que*

$$B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G) \simeq {(U(\Theta_B) \rtimes G)} \Big/ {\sum_{j=n+1}^{m} (U(\Theta_B) \rtimes G).\partial_{y_j}}.$$

Démonstration. On définit le morphisme de $U(\Theta_B) \rtimes G$-modules

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U(\Theta_B) \rtimes G & \longrightarrow & B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G) \\ & \sum_{g \in G} s_g.g & \longmapsto & \left(\sum_{g \in G} s_g.g \right).1 \otimes 1 \end{array}$$

Les éléments de la forme $1\otimes\partial_x^\alpha.g$ avec $\alpha\in\mathbb{N}^n$ et $g\in G$ sont générateurs en tant que B-module de $B\otimes_A(U(\Theta_A)\rtimes G)$. Ainsi, puisque pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n$ et pour tout $g\in G$

$$\varphi(\partial_y^\alpha.g)=(\partial_y^\alpha.g).1\otimes 1=1\otimes\partial_x^\alpha.g,$$

par B-linéarité de φ, on obtient que φ est surjective. Or le noyau de ce morphisme est engendré sur $(U(\Theta_B)\rtimes G)$ par les $(\partial_{y_j})_{j\in[\![n+1,m]\!]}$ de telle sorte que

$$B\otimes_A(U(\Theta_A)\rtimes G)\simeq {(U(\Theta_B)\rtimes G)}\Big/{\sum_{j=n+1}^{m}(U(\Theta_B)\rtimes G).\partial_{y_j}}. \qquad \square$$

Comme dans le cas des $\widehat{\mathcal{D}}$-modules étudié par Bode dans [9], on tentera de définir un bimodule de transfert qu'on voudra de la forme $B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$. En montrant que l'action définie dans la proposition 5.1 est bornée et en utilisant les propriétés des modules bornologiques, on pourra conclure par passage au complété bornologique.

Lemme 5.3. *Le morphisme de B-module $\tilde{\ }:\Theta_B\to B\otimes_A\Theta_A$ se restreint en un morphisme de $\mathcal{B}$-modules*

$$\tilde{\ }:\mathcal{L}_{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}.$$

Démonstration. On rappelle que Θ_A est un A-module libre de base $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ et Θ_B est un B-module libre de base $(\partial_{y_j})_{j\in[\![1,m]\!]}$. Par la proposition 2.23, l'application $\tilde{\ }$ est entièrement déterminée par l'image de la base de Θ_B comme ceci

$$\forall j\in[\![1,m]\!]\ ,\ \tilde{\partial}_{y_j}=\begin{cases}1\otimes\partial_{x_j} & \text{si } j\leq n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On remarque ainsi que l'image de la $\mathcal{B}$-base de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ appartient à $\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ et on en conclut que $\tilde{\ }(\mathcal{L}_{\mathcal{B}})\subset\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, qui permet la restriction voulue. $\square$

Lemme 5.4. *Soit $k\in\mathbb{N}$. On note $\mathcal{S}_k=U(\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{A}})$, $S_k=\widehat{U(\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{A}})}_K$ et $T_k=\widehat{U(\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}})}_K$. Alors $\big(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k\rtimes G)\big)_K$ est un $T_k\rtimes G$-module et on a une application*

$$(T_k\rtimes G)\times(B\otimes_A(S_k\rtimes G))\longrightarrow(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k\rtimes G))_K.$$

Démonstration. Par l'application $\tilde{\ }:\mathcal{L}_{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ du lemme précédent, et par la même preuve que dans la proposition 5.1, on munit l'espace $\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}(U(\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{A}})\rtimes G)$ d'une structure de $U(\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}})\rtimes G$-module. En passant au complété π-adique et en tensorisant avec K, on obtient que $(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k\rtimes G))_K$ est un $T_k\rtimes G$-module. Enfin, par l'application

$$B\otimes_A(S_k\rtimes G)\to(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k\rtimes G))_K$$

on obtient l'application souhaitée. $\square$

Lemme 5.5. *On pose*

$$S:\quad\begin{array}{ccl} B\otimes_A\Theta_A & \to & \Theta_B\\ \displaystyle\sum_{1\leq i\leq n}b_i\otimes\partial_{x_i} & \mapsto & \displaystyle\sum_{1\leq i\leq n}b_i\partial_{y_i}\end{array}$$

une section de l'application $\tilde{\ }$, et par extension on note également S la composition

$$\begin{array}{ccc}\Theta_A\to B\otimes_A\Theta_A\to\Theta_B\\ \displaystyle\sum_{1\leq i\leq n}a_i\partial_{x_i}\longmapsto\sum_{1\leq i\leq n}f(a_i)\partial_{y_i}.\end{array}$$

Alors pour tout $v\in\Theta_A$ on a $f\circ v=S(v)\circ f$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\partial_{y_i} \circ f = f \circ \partial_{x_i}$. Par définition, on a $\partial_{x_i} = (dx_i)^* \circ d_A$ et $\partial_{y_i} = (dy_i)^* \circ d_B$. Or, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"'] & B \arrow[d, "d_B"] \\ \Omega_A \arrow[r, "df"] & \Omega_B \end{tikzcd}$$

on a

$$\begin{aligned} \partial_{y_i} \circ f = f \circ \partial_{x_i} &\iff (dy_i)^* \circ d_B \circ f = f \circ (dx_i)^* \circ d_A \\ &\iff (dy_i)^* \circ df \circ d_A = f \circ (dx_i)^* \circ d_A \end{aligned}$$

Et il suffit de montrer que $(dy_i)^* \circ df = f \circ (dx_i)^*$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a en effet

- $(dy_i)^* \circ df(dx_j) = (dy_i)^*(df(x_j)) = (dy_i)^*(dy_j) = \delta_{i,j}$.
- $f \circ (dx_i)^*(dx_j) = f(\delta_{i,j}) = \delta_{i,j}$.

Et comme les $(dx_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ forment une base de Ω_A, par linéarité les applications sont égales. □

Lemme 5.6. *En notant $J_{A,k} = (S_k \rtimes G).(\beta_A(N_k) - 1)$ et $J_{B,k} = (T_k \rtimes G).(\beta_B(N_k) - 1)$, l'application du lemme 5.4 donne les applications restreintes*

$$\begin{aligned} (T_k \rtimes G) \times (B \otimes_A J_{A,k}) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}} \\ (J_{B,k} \rtimes G) \times (B \otimes_A (S_k \rtimes G)) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}} \end{aligned}$$

où $\overline{B \otimes_A J_{A,k}}$ désigne l'adhérence de l'image de $B \otimes_A J_{A,k}$ dans $(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k \rtimes G))_K$.

Démonstration. Pour tout $g \in G$, $\theta \in \pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ et pour tout $b \otimes s.(\rho(h) - h) \in B \otimes_A J_{A,k}$, où $b \in B$, $s \in S_k \rtimes G$ et $h \in N_k$, on a

$$\begin{aligned} g.(b \otimes s.(\rho(h) - h)) = \rho(g)(b) \otimes g.s.(\rho(h) - h) \in B \otimes_A J_{A,k} \\ \theta.(b \otimes s.(\rho(h) - h)) = \theta(b) \otimes s.(\rho(h) - h) + b\tilde{\theta}s.(\rho(h) - h) \in B \otimes_A J_{A,k} \end{aligned}$$

Ainsi $U(\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}) \rtimes G \subset T_k \rtimes G$ stabilise $B \otimes_A J_{A,k}$ et par passage au complété, $T_k \rtimes G$ stabilise $\overline{B \otimes_A J_{A,k}}$ et on a bien l'application

$$(T_k \rtimes G) \times (B \otimes_A J_{A,k}) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}}$$

Soit $h \in N_k \subset G_{\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}}$, il existe $v \in p^{\varepsilon}\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ tel que $\rho_A(h) = \exp(v)$. Par le lemme 5.5 on a l'application S tel que $f \circ v = S(v) \circ f$. Soit $a \in A$, par G-équivariance de f on a

$$\begin{aligned} \rho_B(h)(f(a)) &= f(\rho_A(h)(a)) = f(\exp(v)(a)) = f\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{v^k}{k!}(a)\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{f \circ v^k}{k!}(a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{S(v)^k}{k!}(f(a)) = \exp(S(v))(f(a)) \end{aligned}$$

Or $h \in N_k \subset G_{\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}}$ donc il existe $u \in p^{\epsilon}\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ tel que $\rho_B(h) = \exp(u)$. Ainsi,

$$\rho_B(h)_{|f(A)} = \exp(u)_{|f(A)} = \exp(S(v))_{|f(A)}$$

donc par le log, $u_{|f(A)} = S(v)_{|f(A)}$ et en notant

$$u = \sum_{j=1}^{m} b_j\partial_{y_j} \ , \quad v = \sum_{i=1}^{n} a_i\partial_{x_i} \quad \text{et donc} \quad S(v) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\partial_{y_i}$$

on a

$$u = S(v) + \sum_{j=n+1}^{m} b_j\partial_{y_j}$$

Ainsi $\tilde{u} = 1 \otimes v$, et pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (S_k \rtimes G)$ on a

$$u.(b \otimes s.g) = u(b) \otimes s.g + b \otimes vs.g$$
$$u^k.(b \otimes s.g) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i(b) \otimes v^{k-i} s.g$$

$$\begin{aligned}
\exp(u).(b \otimes s.g) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{u^k}{k!}(b \otimes s.g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{u^i(b)}{k!} \otimes v^{k-i} s.g \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \binom{i+j}{i} \frac{u^i(b)}{(i+j)!} \otimes v^j s.g = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{u^i(b)}{i!} \otimes \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{v^j}{j!} s.g \\
&= \exp(u)(b) \otimes \exp(v) s.g
\end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $h \in N_k$ et pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (S_k \rtimes G)$ on a

$$\begin{aligned}
(\rho_B(h) - h).(b \otimes s.g) &= \exp(u).b \otimes s.g - \rho_B(h)(b) \otimes \rho_A(h)(s).hg \\
&= \exp(u)(b) \otimes \exp(v)s.g - \exp(u)(b) \otimes \rho_A(h)(s).hg \\
&= \exp(u)(b) \otimes (\rho_A(h)s.g - \rho_A(h)(s).hg) \\
&= \exp(u)(b) \otimes ((\rho_A(h) - h).(s.g)) \in \overline{B \otimes_A J_{A,k}}
\end{aligned}$$

et on a bien l'application

$$(J_{B,k} \rtimes G) \times (B \otimes_A (S_k \rtimes G)) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}}$$

□

Précisons qu'on peut munir $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ d'une bornologie. En effet, en notant $\mathcal{B}_{A,k}$ la boule unité de $U(\Theta_A) \rtimes G$, on peut munir cet espace d'une suite de semi-normes correspondant aux jauges des réseaux $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k}$.

Proposition 5.7. *L'action de $U(\Theta_B) \rtimes G$ sur $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est bornée.*

Démonstration. Soient $\mathbb{B}_{A,k}$ et $\mathbb{B}_{B,k}$ les boules unités de $T_k \rtimes G$ et $S_k \rtimes G$. Soient $\mathcal{B}_{A,k}$ et $\mathcal{B}_{B,k}$ les boules unités de $U(\Theta_A) \rtimes G$ et $U(\Theta_B) \rtimes G$ tel que

$$\mathcal{B}_{A,k} = \mathbb{B}_{A,k} \cap U(\Theta_A) \rtimes G \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{B,k} = \mathbb{B}_{B,k} \cap U(\Theta_B) \rtimes G$$

Soient $t \in \mathcal{B}_{B,k}$ et $b \otimes s \in \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k}$. On veut montrer que $t.b \otimes s \in \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k}$ afin de conclure que l'action est bornée, et il suffit pour cela de montrer que cet élément appartient à $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$ puisqu'on sait déjà qu'il appartient à $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$. Pour cela, on décompose t et s en utilisant le lemme 4.22

$$t = t_0 + t', \quad \text{avec} \quad q_k(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad t' \in \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})} \rtimes G$$
$$s = s_0 + s', \quad \text{avec} \quad q_k(s_0) = 0 \quad \text{et} \quad s' \in \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})} \rtimes G.$$

Donc avec les notations du lemme précédent, $t_0 \in J_{B,k}$ et $s_0 \in J_{A,k}$. Alors par ce même lemme

$$t.b \otimes s = \underbrace{t_0.b \otimes s}_{\in \overline{B \otimes_A J_{A,k}}} + \underbrace{t'.b \otimes s_0}_{\in \overline{B \otimes_A J_{A,k}}} + t'.b \otimes s'.$$

Et $\overline{B \otimes_A J_{A,k}} \subset \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$. de plus, par l'action de $U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}}) \rtimes G$ sur $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \rtimes G)$ évoquée au début de la preuve de la proposition 5.4, on obtient une action

$$\widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})} \rtimes G \curvearrowright \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})} \rtimes G)$$

et $t'.b \otimes s' \in \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})} \rtimes G) \subset \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$. donc $t.b \otimes s \in \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$, et comme $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$ est un réseau ouvert de $B \otimes_A (S_k \rtimes G) \subset (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\mathcal{S}_k \rtimes G))_K$, par [20] remarque 7.4 on a

$$(\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}) \cap (B \otimes_A (S_k \otimes G)) = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}.$$

Donc $t.b \otimes s \in (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}) \cap (B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)) = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{A,k}$. □

Proposition 5.8. *On définit le* $\left(\widehat{\mathcal{D}}(B,G),\widehat{\mathcal{D}}(A,G)\right)$*-bimodule*

$$\widehat{\mathcal{D}}^G_{A\to B} := B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{\mathcal{D}}(A,G).$$

qu'on appellera bimodule de transfert de $f : A \to B$*.*

Démonstration. Par la proposition précédente, $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est un $U(\Theta_B) \rtimes G$-module bornologique. Par passage au complété bornologique et par le corollaire 4.28, l'espace $B\widehat{\otimes}^b_A(U(\Theta_A) \rtimes G)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}(B,G)$-module bornologique. de plus, par ce même corollaire on a

$$B\widehat{\otimes}^b_A(U(\Theta_A) \rtimes G) = B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^b \simeq B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$$

ce qui permet de conclure. □

Proposition 5.9. *Comme* $\widehat{\mathcal{D}}(B,G)$*-module, on a*

$$\widehat{\mathcal{D}}^G_{A\to B} \simeq \widehat{\mathcal{D}}(B,G)\Big/\sum_{j=n+1}^{m}\widehat{\mathcal{D}}(B,G).\partial_{y_j}.$$

En particulier, $\widehat{\mathcal{D}}^G_{A\to B}$ *est un* $\widehat{\mathcal{D}}(B,G)$*-module coadmissible. Si* M *est un* $\widehat{\mathcal{D}}(A,G)$*-module coadmissible, alors* $\widehat{\mathcal{D}}^G_{A\to B}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(A,G)}M$ *est un* $\widehat{\mathcal{D}}(B,G)$*-module coadmissible.*

Démonstration. Le $(U(\Theta_B) \rtimes G)$-module $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est de présentation fini par la proposition 5.2, il est donc isomorphe au conoyau d'un morphisme de $(U(\Theta_B) \rtimes G)$-modules libres de type fini $g : (U(\Theta_B) \rtimes G)^{m-n} \to (U(\Theta_B) \rtimes G)$. Puisque le foncteur $\widehat{\cdot}^b$ est exact à droite par la proposition 3.35, alors

$$B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{\mathcal{D}}(A,G) \simeq \widehat{B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)}^b \simeq \widehat{Coker(g)}^b \simeq Coker(\widehat{g}^b)$$

où $\widehat{g}^b : \widehat{\mathcal{D}}(B,G)^{m-n} \to \widehat{\mathcal{D}}(B,G)$ est un morphisme de $\widehat{\mathcal{D}}(B,G)$-modules libres de type fini. Donc $\widehat{\mathcal{D}}^G_{A\to B}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}(B,G)$-module de présentation finie et, en particulier, un $\widehat{\mathcal{D}}(B,G)$-module coadmissible. Cela implique le dernier énoncé, cf. 3.14. □

On note une propriété topologique du bimodule de transfert.

Proposition 5.10. $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ *est pseudo-nucléaire et donc*

$$\widehat{\mathcal{D}}^G_{A\to B} \simeq B\widehat{\otimes}^h_A\widehat{\mathcal{D}}(A,G).$$

Démonstration. Par la proposition 4.27 on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{B}_{A,k+1} \subset \pi^j\mathcal{B}_{A,k} + F_jU(\pi^{k+1}\mathcal{L}_A) \rtimes G.$$

Alors

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k+1} \subset \pi^j\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k} + \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} F_jU(\pi^{k+1}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \rtimes G$$

et $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est pseudo-nucléaire. Il reste d'appliquer la proposition 3.45. □

5.2 Le foncteur image inverse

Soient X et Y des espaces analytiques rigides lisses respectivement de dimensions n et m, et G un groupe de Lie p-adique agissant continument sur X et Y. Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse G-équivariant d'espaces rigides. Pour se rapporter au cas local, nous reprenons la G-topologie Y^f_w définie dans le lemme 2.21. Nous essayons tout d'abord de retrouver les hypothèses de la section précédente pour pouvoir utiliser ses résultats.

Notation. *Soient* $U \in X^c_w$ *et* $V \in Y^f_w$ *tel que* $f(V) \subset U$*. Un sous-groupe* H *de* G *vérifie les hypothèses locales pour* U *et* V *si* $\mathcal{O}_X(U)$*,* $\mathcal{O}_Y(V)$*,* H *et* $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(V)$ *respectent les hypothèses de la section 5.1.*

Proposition 5.11. *Pour tout $V \in Y_w^f$ et pour tout $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$, il existe un sous-groupe H de G tel que H vérifie les hypothèses locales pour U et V.*

Démonstration. Notons $A = \mathcal{O}_X(U)$, $B = \mathcal{O}_Y(V)$ et abusivement $f : A \to B$.

• Comme $G_U \cap G_V$ est un sous-groupe ouvert de G, il existe G' un sous-groupe ouvert compact de $G_U \cap G_V$.
• Par la proposition 2.22, il existe des systèmes locaux de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(y_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de A et de B tel que $f(y_i) = x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
• Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel G'-stable de A, qui existe par la proposition 4.6. Il existe un ensemble fini $S \subset A$ tel que $\mathcal{A} = \overline{\langle S\rangle}_R$. Soit $\overline{\langle T\rangle}_R$ un modèle formel de B, avec $T \subset B$ un ensemble fini. L'ensemble $\overline{\langle f(S), T\rangle}_R$ est encore un modèle formel de B, et par la proposition 4.6 il existe $\mathcal{B}$ un modèle formel G'-stable de B contenant $\overline{\langle f(S), T\rangle}_R$. Ainsi, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont G'-stables avec $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.
• Par la proposition 2.10, on redimensionne les systèmes de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(y_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ tel que les $\mathcal{A}$-module et $\mathcal{B}$-module

$$\mathcal{L}_\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}.\partial_{x_i} \text{ et } \mathcal{L}_\mathcal{B} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{B}.\partial_{y_j}$$

sont des $\mathcal{A}$-réseau et $\mathcal{B}$-réseau de Lie. De plus, par la proposition 4.9, il existe un sous-groupe ouvert compact H de G' tel que $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ et $\mathcal{L}_\mathcal{B}$ sont H-stables.

Ainsi, le sous-groupe H permet de vérifier toutes les hypothèses voulues. □

Sous ces conditions, le bimodule de transfert $\widehat{\mathcal{D}}^H_{A\to B}$ est bien défini par la proposition 5.8. Nous noterons lorsque H vérifie les hypothèses locales pour U et V

$$\widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U} := \widehat{\mathcal{D}}^H_{\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_Y(V)} = \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{\mathcal{D}}(U, H).$$

Remarquons notamment que H est U-petit et V-petit.

Remarque. *Sous les notations de la proposition précédente, soit $U' \in X_w^c$ tel que $U' \subset U$, soit $V \in Y_w^f$ tel que $V' \subset V$ et $f(V') \subset U'$. Tout sous-groupe U'-petit et V'-petit de H vérifie les hypothèses locales pour U' et V'.*

C'est le cas en particulier si on prend $U' = U$ ou $V' = V$.

Lemme 5.12. *Soient $U, U' \in X_w^c$ avec $U' \subset U$ et H un sous-groupe U-petit et U'-petit de G. En considérant le morphisme d'inclusion $U' \to U$, H vérifie les hypothèses locales pour U' et U et on a*

$$\widehat{\mathcal{D}}^H_{U'\to U} = \mathcal{O}_X(U')\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{\mathcal{D}}(U, H) \simeq \widehat{\mathcal{D}}(U', H).$$

Démonstration. En notant $\mathcal{D}(U) = U(\Theta(U))$ et $\mathcal{D}(U') = U(\Theta(U'))$ alors $\widehat{\mathcal{D}}^H_{U'\to U}$ est par définition le complété bornologique du $(\mathcal{D}(U') \rtimes H)$-module $\mathcal{O}_X(U')\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{D}(U) \rtimes G)$. Comme $\mathcal{O}_X(U')\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{D}(U) \simeq \mathcal{D}(U')$ on obtient alors

$$\mathcal{O}_X(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (\mathcal{D}(U) \rtimes G) \simeq \mathcal{D}(U') \rtimes G.$$

Donc par complétion bornologique on a l'isomorphisme voulu. □

Proposition 5.13. *Soient $V \in Y_w^f$ et $U, U' \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U' \subset U$, et un sous-groupe H de G vérifiant les hypothèses locales pour U et V, et pour U' et V. Alors il existe un isomorphisme de $\big(\widehat{\mathcal{D}}(V, H), \widehat{\mathcal{D}}(U, H)\big)$-bimodules tel que*

$$\widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U'} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U}.$$

Démonstration. Par le lemme précédent on a

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U} &\simeq \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{\mathcal{D}}(U, H)\\
&\simeq \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\Big(\mathcal{O}_X(U')\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{\mathcal{D}}(U, H)\Big)\\
&\simeq \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\widehat{\mathcal{D}}(U', H) \simeq \widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U'}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 5.14. *Soient $V, W \in Y_w^f$ tel que $W \subset V$, et soit $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Soit H un sous-groupe de G vérifiant les hypothèses locales pour U et V, et pour U et W. Alors il existe un isomorphisme de $\left(\widehat{\mathcal{D}}(W,H), \widehat{\mathcal{D}}(U,H)\right)$-module tel que*

$$\widehat{\mathcal{D}}(W,H)\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(V,H)}\widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^H_{W\to U}.$$

Démonstration. On a $\mathcal{O}_Y(W) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} (D(V) \rtimes H) \simeq \mathcal{D}(W) \rtimes H$ donc

$$(\mathcal{D}(W) \rtimes H) \otimes_{\mathcal{D}(V)\rtimes H} \mathcal{O}_Y(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (\mathcal{D}(U) \rtimes H) \simeq \mathcal{O}_Y(W) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (\mathcal{D}(V) \rtimes H).$$

Or $\mathcal{O}_Y(W) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (\mathcal{D}(V) \rtimes H)$ est pseudo-nucléaire par la proposition 5.10 et son complété bornologique est donc isomorphe à son complété séparé par la proposition 3.45. Donc

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{D}}^H_{W\to U} &\simeq \mathcal{O}_Y(W)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{D}(V) \rtimes H)\\
&\simeq (\mathcal{D}(W) \rtimes H)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{D}(V)\rtimes H}\left(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{D}(U) \rtimes H)\right)\\
&\simeq \widehat{\mathcal{D}}(W,H)\widehat{\otimes}^h_{\widehat{\mathcal{D}}(V,H)}\widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U} \simeq \widehat{\mathcal{D}}(W,H)\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(V,H)}\widehat{\mathcal{D}}^H_{V\to U}
\end{aligned}$$

□

Lemme 5.15. *Soient $U \in X_w^c$ et H un sous-groupe U-petit de G. Tout $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-module coadmissible est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$-module coadmissible. Par la proposition 4.16, $\widehat{\mathcal{D}}(U,H)$ est $\mathcal{O}_X(U)$-nucléaire. Or par la proposition 3.41, M est également $\mathcal{O}_X(U)$-nucléaire. Ainsi M est pseudo-nucléaire par la proposition 3.44. □

Proposition 5.16. *Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$. On pose le préfaisceau $f^*\mathcal{M}$ sur Y_{rig} défini pour tout $V \in Y_w^f$ par*

$$f^*\mathcal{M}(V) := \left(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X(V)} f^{-1}\mathcal{M}(V)\right)$$

et qu'on note $f^*\mathcal{M} := \left(\mathcal{O}_Y\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}\right)$.

Démonstration. Soient $V, W \in Y_w^f$ avec $V \subset W$. Puisque $\mathcal{M}$ est un faisceau, on a une application de restriction $\rho^{\mathcal{M}}_{VW} : \mathcal{M}(W) \to \mathcal{M}(V)$, et on a également l'application de restriction $\rho^{\mathcal{O}_Y}_{VW} : \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_Y(V)$. Alors le passage au complété bornologique de l'application $\rho^{\mathcal{O}_Y}_{VW} \otimes \rho^{\mathcal{M}}_{VW}$ donne une application de restriction $\rho_{VW} : f^*\mathcal{M}(W) \to f^*\mathcal{M}(V)$, qui munit $f^*\mathcal{M}$ d'une structure de préfaisceausur Y_w^f. C'est donc un préfaisceau sur Y_{rig} par la proposition 2.21. □

Voici le théorème principal de cet article.

Théorème 5.17. *Pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$, on dispose du faisceau $f^*\mathcal{M}$ sur Y_{rig} défini par*

$$f^*\mathcal{M} := \left(\mathcal{O}_Y\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}\right)$$

et f^* est un foncteur

$$\begin{array}{cccc} f^* : & \mathcal{C}_{X/G} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{Y/G} \\ & \mathcal{M} & \longmapsto & f^*\mathcal{M} \end{array}$$

qu'on appelle foncteur image inverse de $\widehat{\mathcal{D}}$-modules G-équivariants coadmissibles par f.

Démonstration. Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$.

• Soient $V \in Y_w^f$ et $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Soit H un sous-groupe de G vérifiant les hypothèses locales pour U et V. Par la proposition 3.36 on écrit

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\mathcal{M}(U')$$

où la limite est prise sur les $U' \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U'$. On restreint les éléments du système inductif précédent aux $U' \in U_w^c$ et on a

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\mathcal{M}(U').$$

Comme $\mathcal{M}$ est coadmissible, pour tout $U' \in U_w^c$ et pour tout H sous-groupe U'-petit de G, $\mathcal{M}(U')$ est un $\widehat{\mathcal{D}}(U', H')$-module coadmissible et donc $\mathcal{M}(U')$ est pseudo-nucléaire par le lemme 5.15. Ainsi, l'espace $\mathcal{O}_Y(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{M}(U')$ est pseudo-nucléaire et par le théorème 3.45 on a l'isomorphisme

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U')}\mathcal{M}(U').$$

Comme $\mathcal{M}$ est coadmissible et que (U, H) est petit, alors $\mathcal{M}_{|U} \simeq Loc_{U,H}(\mathcal{M}(U))$ et pour tout (U', H') petit dans U, on a

$$\mathcal{M}(U') \simeq \widehat{\mathcal{D}}(U', H')\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H')}\mathcal{M}(U) \simeq \widehat{\mathcal{D}}(U', H')\widehat{\otimes}^h_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H')}\mathcal{M}(U)$$

grâce à la proposition 3.15 pour le deuxième isomorphisme. Ainsi, comme H' vérifie également les hypothèses locales pour U' et V, et en utilisant la proposition 5.13 on obtient

$$\begin{aligned} f^*\mathcal{M}(V) &\simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U')}\widehat{\mathcal{D}}(U', H')\widehat{\otimes}^h_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H')}\mathcal{M}(U) \\ &\simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \widehat{\mathcal{D}}^{H'}_{V\to U'}\widehat{\otimes}^h_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H')}\mathcal{M}(U) \\ &\simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \widehat{\mathcal{D}}^{H'}_{V\to U}\widehat{\otimes}^h_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H')}\mathcal{M}(U) \\ &\simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \widehat{\mathcal{D}}^{H}_{V\to U}\widehat{\otimes}^h_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H)}\mathcal{M}(U) \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{H}_{V\to U}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H)}\mathcal{M}(U). \end{aligned}$$

On constate alors que $f^*\mathcal{M}(V)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}(V, H)$-module coadmissible pour tout $V \in Y_w^f$. Soit $W \in Y_w^f$ tel que $W \subset V$ et soit H' un sous-groupe W-petit de H. Alors H' vérifie les hypothèses locales pour U et W, et en utilisant la proposition 5.14 on a

$$\begin{aligned} Loc_{V,H}(f^*\mathcal{M}(V))(W) &\simeq \widehat{\mathcal{D}}(W, H')\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(V,H')}\widehat{\mathcal{D}}^{H'}_{V\to U}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H')}\mathcal{M}(U) \\ &\simeq \widehat{\mathcal{D}}^{H'}_{W\to U}\widehat{\otimes}_{\widehat{\mathcal{D}}(U,H')}\mathcal{M}(U) \simeq f^*\mathcal{M}(W). \end{aligned}$$

Donc pour tout $V \in Y_w^f$ il existe H un sous-groupe V-petit tel que

$$f^*\mathcal{M}_{|V} \simeq Loc_{V,H}(f^*\mathcal{M}(V)).$$

• Ainsi, $f^*\mathcal{M}$ est un préfaisceau de $\widehat{\mathcal{D}}_Y$-module sur Y_w^f, puisque pour tout $V \in Y_w^f$, $f^*\mathcal{M}(V)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}_Y(V)$-module. C'est en réalité un faisceau de $\widehat{\mathcal{D}}_Y$-module puisque pour tout $V \in Y_w^f$, on a $f^*\mathcal{M} \simeq Loc_{V,H}(f^*\mathcal{M}(V))$ ce qui permet de bons recollements. Comme Y_w^f est une base pour Y_{rig} par la proposition 2.21, on conclut par le théorème 2.14 que $f^*\mathcal{M}$ est un faisceau de $\widehat{\mathcal{D}}_Y$-module sur Y_{rig}.

De plus $f^*\mathcal{M}$ est muni d'une structure équivariante. Soit $g \in G$, comme $\mathcal{M}$ est un G-$\widehat{\mathcal{D}}_X$-module il existe $g^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to g^{\#}\mathcal{M}$ et on pose $g^{f^*\mathcal{M}} := g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(g^{\mathcal{M}})$. Pour tout $V \in Y_{rig}$ on a

$$g^{f^*\mathcal{M}}(V) : f^*\mathcal{M}(V) \longrightarrow \varinjlim_{f(V)\subset U} \mathcal{O}_Y(gV)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(gU)}\mathcal{M}(gU).$$

Or par G-équivariance de f on a

$$\varinjlim_{f(V)\subset U} \mathcal{O}_Y(gV)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(gU)}\mathcal{M}(gU) \simeq \varinjlim_{f(gV)\subset U} \mathcal{O}_Y(gV)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{M}(U) \simeq f^*\mathcal{M}(gV).$$

Donc $g^{f^*\mathcal{M}} : f^*\mathcal{M} \to g^\# f^*\mathcal{M}$ et pour tout $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned}(gh)^{f^*\mathcal{M}} &= (gh)^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\left((gh)^{\mathcal{M}}\right) = \left(h^\#(g^{\mathcal{O}_Y}) \circ h^{\mathcal{O}_Y}\right)\widehat{\otimes}^b f^{-1}\left(h^\#(g^{\mathcal{M}}) \circ h^{\mathcal{M}}\right) \\ &= \left(h^\#(g^{\mathcal{O}_Y})\widehat{\otimes}^b f^{-1}(h^\# g^{\mathcal{M}})\right) \circ \left(h^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(h^{\mathcal{M}})\right) \\ &= h^\#(g^{f^*\mathcal{M}}) \circ h^{f^*\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

Donc $f^*\mathcal{M}$ est muni d'une structure équivariante et est un faisceau G-équivariant sur Y_{rig}.

Ainsi $f^*\mathcal{M}$ est un G-$\widehat{\mathcal{D}}_Y$-module, donc $f^*\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{Y/G}$.

• Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{C}_{X/G}$. Soit $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morphisme de G-$\widehat{\mathcal{D}}_X$-modules. Soient $V \in Y_w^f$ et $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Soit H un sous-groupe de G vérifiant les hypothèses locales pour U et V. Notons $A = \mathcal{O}_X(U)$, $B = \mathcal{O}_Y(V)$ et $M = \mathcal{M}(U)$, $N = \mathcal{N}(U)$. En notant $I_{\mathcal{O}_Y}$ le morphisme identité sur le faisceau $\mathcal{O}_Y$, et par $\mathcal{O}_X$-linéarité de φ, on a le morphisme

$$(I_{\mathcal{O}_Y}(V) \otimes \varphi(U)) : B \otimes_A M \to B \otimes_A N.$$

Alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} (U(\Theta_B) \rtimes H) \times (B \otimes_A M) & \xrightarrow{\mathrm{id} \times (I_{\mathcal{O}_Y}(V) \otimes \varphi(U))} & (U(\Theta_B) \rtimes H) \times (B \otimes_A N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B \otimes_A M) & \xrightarrow{I_{\mathcal{O}_Y}(V) \otimes \varphi(U)} & (B \otimes_A N) \end{array}$$

où $\mathrm{id} : U(\Theta_B) \rtimes H \to U(\Theta_B) \rtimes H$ est l'identité. Les flèches verticales sont obtenues par l'action de la proposition 5.7 car $B \otimes_A M \simeq (B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes H)) \otimes_{U(\Theta_A) \rtimes H} M$. Par passage à la complétion bornologique, comme les applications sont bornées, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{D}}(B, H) \times (B\widehat{\otimes}^b_A M) & \xrightarrow{\widehat{\mathrm{id}}^b \times (I_{\mathcal{O}_Y}(V)\widehat{\otimes}^b \varphi(U))} & \widehat{\mathcal{D}}(B, H) \times (B\widehat{\otimes}^b_A N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B\widehat{\otimes}^b_A M) & \xrightarrow{I_{\mathcal{O}_Y}(V)\widehat{\otimes}^b \varphi(U)} & (B\widehat{\otimes}^b_A N). \end{array}$$

Par passage à la limite inductive, on obtient une application

$$(I_{\mathcal{O}_Y}(V) \otimes f^*\varphi) : \left(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X(V)} f^{-1}\mathcal{M}(V)\right) \longrightarrow \left(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X(V)} f^{-1}\mathcal{N}(V)\right)$$

qui est $\widehat{\mathcal{D}}(U, H)$-linéaire. Le morphisme de faisceau $f^*\varphi := I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\varphi$ ainsi défini est $\widehat{\mathcal{D}}_X$-linéaire. De plus, pour tout $g \in G$ on obtient par G-équivariance de φ

$$\begin{aligned}g^\#(f^*\varphi) \circ g^{f^*\mathcal{M}} &= g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(g^\#\varphi \circ g^{\mathcal{M}}) \\ &= g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(g^{\mathcal{N}} \circ \varphi) = g^{f^*\mathcal{N}} \circ f^*\varphi.\end{aligned}$$

Donc $f^*\varphi$ est G-équivariant et c'est un morphisme de G-$\widehat{\mathcal{D}}_Y$-modules. On constate de plus que si $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est l'identité sur $\mathcal{M}$, alors $f^*\varphi$ est l'identité sur $f^*\mathcal{M}$. De même si $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$, alors

$$f^*(\psi \circ \varphi) = I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(\psi \circ \varphi) = (I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\psi) \circ (I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\varphi) = f^*\psi \circ f^*\varphi.$$

Ainsi f^* est un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}_{X/G}$ dans la catégorie $\mathcal{C}_{Y/G}$. $\square$

Proposition 5.18. *Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$. Il existe un morphisme naturel de $\mathcal{O}_X$-modules $u_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to f_* f^*\mathcal{M}$.*

Démonstration. Il suffit de construire $u_{\mathcal{M}}$ sur la base X_w^c de X_{rig}. Soit $U \in X_w^c$ et $V \in Y_w^f$ tel que $f(V) \subset U$. D'après la discussion ci-dessus,

$$f^*\mathcal{M}(V) = \varinjlim_{f(V)\subset U' \subset U} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\mathcal{M}(U'),$$

où la limite est prise sur les $U' \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U'$. Les morphismes naturels $u_V : \mathcal{M}(U) \to \mathcal{M}(U') \to f^*\mathcal{M}(V), m \to 1\widehat{\otimes}^b m$, où V parcours un recouvrement admissible de $f^{-1}(U)$, se collent à un morphisme $\mathcal{M}(U) \to f^*\mathcal{M}(f^{-1}(U)) = f_*f^*\mathcal{M}(U)$. □

On termine cette section avec la compatibilité de l'image inverse par rapport à la composition des morphismes. Soient donc X, Y, Z des espaces analytiques rigides lisses, G un groupe de Lie p-adique agissant continument sur X, Y, Z. Soient et $e : Z \to Y$ et $f : Y \to X$ des morphismes lisses G-équivariants d'espaces rigides. D'après 5.17 on dispose des foncteurs $e^* : \mathcal{C}_{Y/G} \to \mathcal{C}_{Z/G}$ et $f^* : \mathcal{C}_{X/G} \to \mathcal{C}_{Y/G}$.

Théorème 5.19. *On a un isomorphisme naturel*

$$(f \circ e)^* \simeq e^* \circ f^*,$$

comme foncteurs $\mathcal{C}_{X/G} \to \mathcal{C}_{Z/G}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$. Par [9, Prop. 5.4], il y a un isomorphisme naturel $(f \circ e)^*\mathcal{M} \simeq e^*f^*\mathcal{M}$ comme $\widehat{\mathcal{D}}_Z$-modules. Il suffit donc à verifier qu'il est compatible avec les G-actions. Soit $g \in G$ et $g^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to g^{\#}\mathcal{M}$. Alors $g^{f^*\mathcal{M}} = g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}(g^{\mathcal{O}_X})}f^{-1}(g^{\mathcal{M}})$ definit l'action de g sur $f^*\mathcal{M}$ et

$$\begin{aligned} g^{e^*f^*\mathcal{M}} &= g^{\mathcal{O}_Z}\widehat{\otimes}^b_{e^{-1}(g^{\mathcal{O}_Y})}e^{-1}(g^{f^*\mathcal{M}}) \\ &= g^{\mathcal{O}_Z}\widehat{\otimes}^b_{e^{-1}(g^{\mathcal{O}_Y})}e^{-1}(g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}(g^{\mathcal{O}_X})}f^{-1}(g^{\mathcal{M}})) = g^{\mathcal{O}_Z}\widehat{\otimes}^b_{e^{-1}f^{-1}(g^{\mathcal{O}_X})}e^{-1}f^{-1}(g^{\mathcal{M}})) = g^{(f\circ e)^*\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

□

6 Application à la théorie de localisation de Beilinson-Bernstein

Soient X, Y, Z des espaces analytiques rigides. On appelle un morphisme $f : Y \to X$ une *fibration avec fibre* Z, s'il existe un recouvrement admissible X_i de X, tel que $f^{-1}(X_i) \to X_i$ est de la forme $pr_2 : Z \times X_i \to X_i$. Une fibration est un morphisme plat. Si Z est lisse et propre, alors f est un morphisme lisse et propre. On appelle un ouvert admissible $X_i \subset X$ sur laquelle f est de la forme précédente, un *ouvert trivialisant.*

Soit maintenant $\mathbb{G}$ un groupe algébrique connexe réductif et déployé sur K et $\mathbb{B} \subset \mathbb{G}$ un sous-groupe de Borel. Soit $\mathbb{B} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{G}$ un sous-groupe parabolique. Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{p}$ leurs algèbres de Lie sur K. Soit $Y = (\mathbb{G}/\mathbb{B})^{\mathrm{an}}$ et $X = (\mathbb{G}/\mathbb{P})^{\mathrm{an}}$ leurs variétés de drapeaux analytiques rigides, avec leur action naturelle du groupe de points rationnels $\mathbb{G}(K)$. La projection canonique $f : Y \to X$ est $\mathbb{G}(K)$-équivariant. Soit G un groupe de Lie p-adique et $\sigma : G \to \mathbb{G}(K)$ un morphisme de groupes continu, et $Z = (\mathbb{P}/\mathbb{B})^{\mathrm{an}}$.

Proposition 6.1. *Le morphisme f est une fibration avec fibre Z, lisse et propre.*

Démonstration. Il est bien-connu que $\mathbb{G}/\mathbb{B} \to \mathbb{G}/\mathbb{P}, g\mathbb{B} \mapsto g\mathbb{P}$ est une fibration algébrique avec fibre $\mathbb{P}/\mathbb{B}$, qui est lisse et propre. Son analytification est f et la proposition découle des propriétés généraux du foncteur d'analytification. □

D'après la proposition et la section précédente, on dispose du foncteur image inverse $f^* : \mathcal{C}_{X/G} \to \mathcal{C}_{Y/G}$.

Proposition 6.2. *Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$. L'application canonique $u_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to f_*f^*\mathcal{M}$ est bijective.*

Démonstration. La question est locale sur X. Donc soit $U \subset X$ un affinoïde trivialisant dans X_w et $V = f^{-1}(U) = Z \times U$. Comme $\mathcal{O}_V = p_1^{-1}\mathcal{O}_Z\widehat{\otimes}^b_K p_2^{-1}\mathcal{O}_U$, cf. [9, 3.3.6], et par associativité de $\widehat{\otimes}^b_K$, la restriction de

$f^*\mathcal{M}$ sur V est de la forme $(f^*\mathcal{M})_{|V} = p_1^{-1}\mathcal{O}_Z\widehat{\otimes}^b_K p_2^{-1}\mathcal{M}_{|U}$. Soit $\{Z_i\}$ un recouvrement admissible fini de Z par des affinoïdes Z_i et soit $V_i = Z_i \times U$. Les sections locales $(f^*\mathcal{M})(V)$ coïncident donc avec l'égalisateur du diagramme de restriction usuelle

$$\prod_i \mathcal{O}_Z(V_i)\widehat{\otimes}^b_K\mathcal{M}(U) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{O}_Z(V_i \cap V_j)\widehat{\otimes}^b_K\mathcal{M}(U).$$

Le foncteur $\widehat{\otimes}^b_K\mathcal{M}(U)$ est exacte [9, 3.10] et commute aux produits fini dans le complexe de Čech $\check{C}^\bullet(\{V_i\}_i, \mathcal{O}_V)$. Comme Y est séparé, les V_i sont affinoïdes et $\check{C}^\bullet(\{V_i\}_i, \mathcal{O}_V)$ est un complexe fini de modules de Banach fini sur $\mathcal{O}(V)$ avec des morphismes strictes, cf. [8, 3.22] et sa preuve. Donc $(f^*\mathcal{M})(V) = \mathcal{O}_Z(Z)\widehat{\otimes}^b_K\mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(U)$, comme $\mathcal{O}_Z(Z) = K$. □

Pour utiliser les résultats de [2, section 6], on suppose maintenant que $\mathbb{G}$ est semisimple et simplement connexe. Soit $\widehat{U}(\mathfrak{g}, G)$ la K-algèbre défini dans [2, Def. 6.2.12]. Par [2, Thm. 6.4.5] l'algèbre de Fréchet-Stein $\widehat{U}(\mathfrak{g}, G)$ agit sur Y de façon compatible avec l'action de G sur Y. La preuve du loc.cit. s'applique verbalement à l'espace X et montre que $\widehat{U}(\mathfrak{g}, G)$ agit sur X de façon compatible avec l'action de G sur X. Donc [2, Thm. 3.5.12] montre que les foncteurs de localisation $Loc_Y^{U(\mathfrak{g},G)}$ et $Loc_X^{U(\mathfrak{g},G)}$ sont définis et envoie les $U(\mathfrak{g}, G)$-modules coadmissibles dans $\mathcal{C}_{Y/G}$ et $\mathcal{C}_{X/G}$ respectivement, cf. [2, Prop. 3.6.8].

On fixe un sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{b}$ et on écrit Φ^+ pour les racines positives dans le système de racines $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Soit W le groupe de Weyl de $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$. Soit $2\rho = \sum_{\alpha\in\Phi^+} \alpha$. Soit $\Phi^+_{\mathbb{P}} \subseteq \Phi^+$ le sous-système positif des racines qui apparaissent dans la sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}$ et $2\rho_{\mathbb{P}} = \sum_{\alpha\in\Phi^+_{\mathbb{P}}} \alpha$. Soit $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_{\mathbb{P}}$ l'anihilateur dans $U(\mathfrak{g})$ du module de Verma parabolique du poids $2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho \in \mathfrak{t}^*$

$$M_{\mathbb{P}}(2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} K_{2\rho_{\mathbb{P}}-2\rho}.$$

On écrit $M(2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho))$ pour le module de Verma ordinaire (i.e. relative à $\mathfrak{b}$). Sa propriété universelle donne un morphisme surjectif $M(2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho) \to M_{\mathbb{P}}(2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho)$. On écrit $\mathfrak{m}_0 := \mathfrak{m}_{\mathbb{G}}$. Note que $\mathfrak{m}_0 = Ann(M(-2\rho)) = Ann(M(0))$, car $-2\rho = w_o \cdot 0$ pour l'élément w_o le plus long dans W.

Pour la variété de drapeaux complète Y, [2, Thm. 6.4.9] dit que

$$Loc_Y^{U(\mathfrak{g},G)} : \{M \in \mathcal{C}_{U(\mathfrak{g},G)} : \mathfrak{m}_0 \cdot M = 0\} \to \mathcal{C}_{Y/G}$$

est une équivalence de catégories. Les arguments s'entendent sans difficulté au cas de la variété de drapeaux partielle X en remplaçant au niveau de l'input algébrique la référence classique [7] par sa généralisation [10, Thm. 1.9].

Corollaire 6.3.

$$Loc_X^{U(\mathfrak{g},G)} : \{M \in \mathcal{C}_{U(\mathfrak{g},G)} : \mathfrak{m} \cdot M = 0\} \to \mathcal{C}_{X/G}$$

est une équivalence de catégories.

Soit $\Delta \subset \Phi^+$ l'ensemble des racines simples et soit $J \subset \Delta$ le complément du sous-ensemble correspondant à $\mathfrak{p}$. Soit $\mathbb{P}_J \subset \mathbb{G}$ le sous-groupe parabolique de J et W_J son groupe de Weyl. L'action de dot de W restreint à W_J coïncide avec l'action de dot de W_J. En particulier, si $w_{o,J} \in W_J$ denote l'élément le plus long dans le sous-groupe parabolique W_J, alors $w_{o,J} \cdot 0 = -2\rho_{\mathbb{P}_J} = -2(\rho - \rho_{\mathbb{P}}) = 2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho$. Donc $\mathfrak{m}_0 = Ann(M(0)) = Ann(M(2\rho_{\mathbb{P}} - 2\rho))$ et $\mathfrak{m}_0 \subseteq \mathfrak{m}$.

Théorème 6.4. *Le diagramme de foncteurs suivant commute, à isomorphisme canonique près :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{X/G} & \xrightarrow{\quad f^* \quad} & \mathcal{C}_{Y/G} \\ {\scriptstyle Loc_X^{U(\mathfrak{g},G)}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Loc_Y^{U(\mathfrak{g},G)}} \\ \{M \in \mathcal{C}_{U(\mathfrak{g},G)} : \mathfrak{m} \cdot M = 0\} & \xrightarrow{\quad \subseteq \quad} & \{M \in \mathcal{C}_{U(\mathfrak{g},G)} : \mathfrak{m}_0 \cdot M = 0\} \end{array}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = Loc_X^{U(\mathfrak{g},G)}(M)$ avec $\mathfrak{m} \cdot M = 0$. Comme les flèches verticaux du diagramme sont quasi-inverse aux foncteurs des sections globales sur X et Y respectivement, il suffit de vérifier que l'isomorphisme canonique $H^0(Y, u_{\mathcal{M}}) : H^0(Y, f^*\mathcal{M}) \simeq H^0(X, \mathcal{M})$ fournit par la prop. 6.2 est compatible avec l'action de $U(\mathfrak{g}, G)$. Comme la source et le but de cet isomorphisme est coadmissible sur $U(\mathfrak{g}, G)$, il suffit de vérifier que $H^0(Y, u_{\mathcal{M}})$ est $\mathfrak{g}$-linéaire et commute aux actions de G. Comme f est G-équivariant, l'argument classique montre que l'application canonique $\Theta_X \to f^*\Theta_Y$ est compatible avec les flèches de $\mathfrak{g}$ dans Θ_X et Θ_Y respectivement, donc la $\mathfrak{g}$-linéarité de $H^0(Y, u_{\mathcal{M}})$. Soit $g \in G$. Comme $g^{f^*\mathcal{M}} = g^{\mathcal{O}_Y} \widehat{\otimes}^b_{f^{-1}(g^{\mathcal{O}_X})} f^{-1}(g^{\mathcal{M}})$ $g^{f^*\mathcal{M}}$, la G-équivariance de $H^0(Y, u_{\mathcal{M}})$ est clair. □

Remarque. *Supposons que $\mathbb{G}$ est défini sur une extension finie $\mathbb{Q}_p \subset L \subset K$ de $\mathbb{Q}_p$ et G est un sous-groupe ouvert dans $\mathbb{G}(L)$. Dans ce cas, $U(\mathfrak{g}, G)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre des distributions localement analytiques $D(G, K)$ sur G à valeurs dans K, cf. [2, Thm. 6.5.1]. Par cette isomorphisme la catégorie $\mathcal{C}_{U(\mathfrak{g},G)}$ devient l'opposée de la catégorie des G-représentations localement analytiques admissibles [21, Thm. 6.3].*

Références

[1] *Séminaire Banach.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 277. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. Tenu à l'École Normale Supérieure en 1962–1963, Edité par C. Houzel.

[2] Konstantin Ardakov. Equivariant D-modules on rigid analytic spaces. *Astérisque*, (423), 2021.

[3] Konstantin Ardakov and Simon J. Wadsley. $\widehat{D}$-modules on rigid analytic spaces. I. *J. Reine Angew. Math.*, 747 :221–275, 2019.

[4] Federico Bambozzi. On a generalization of affinoid varieties. *Ph.D thesis, University of Padova*, 2013.

[5] Federico Bambozzi. Closed graph theorems for bornological spaces. *Khayyam J. Math.*, 2(1) :81–111, 2016.

[6] Federico Bambozzi and Oren Ben-Bassat. Dagger geometry as Banach algebraic geometry. *J. Number Theory*, 162 :391–462, 2016.

[7] Thomas Bitoun and Andreas Bode. Extending meromorphic connections to coadmissible $\widehat{D}$-modules. *J. Reine Angew. Math.*, 778 :97–118, 2021.

[8] Andreas Bode. A proper mapping theorem for coadmissible $\widehat{D}$-modules. *Münster J. of Math.*, 12 :163–214, 2019.

[9] Andreas Bode. Six operations for $\widehat{D}$-modules on rigid analytic spaces. *Preprint, arXiv : 2110.09398*, 2021.

[10] W. Borho and J.-L. Brylinski. Differential operators on homogeneous spaces. III. Characteristic varieties of Harish-Chandra modules and of primitive ideals. *Inventiones Math.*, 80 :1–68, 1985.

[11] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[12] Siegfried Bosch. *Lectures on formal and rigid geometry*, volume 2105 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Cham, 2014.

[13] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, and D. Segal. *Analytic pro-p groups*, volume 61 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1999.

[14] Ryoshi Hotta, Kiyoshi Takeuchi, and Toshiyuki Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, japanese edition, 2008.

[15] Christine Huyghe, Deepam Patel, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. $\mathcal{D}^\dagger$-affinity of formal models of flag varieties. *Math. Res. Lett.*, 26(6) :1677–1745, 2019.

[16] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[17] Fabienne Prosmans and Jean-Pierre Schneiders. A homological study of bornological spaces. *Prépublications Mathématiques de l'Université de Paris 13*, 2000.

[18] George S. Rinehart. Differential forms on general commutative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 :195–222, 1963.

[19] Tobias Schmidt. On locally analytic Beilinson-Bernstein localization and the canonical dimension. *Math. Z.*, 275(3-4) :793–833, 2013.

[20] Peter Schneider. *Nonarchimedean functional analysis*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[21] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum. Algebras of p-adic distributions and admissible representations. *Invent. Math.*, 153(1) :145–196, 2003.

Théo Mangenot, Université de Rennes, IRMAR, 263 avenue du Général Leclerc, 35042 Rennes, France
E-mail address : theo.mangenot@ens-rennes.fr

Tobias Schmidt, Bergische Universität Wuppertal, Gaußstraße 20, 42119 Wuppertal, Germany
E-mail address : toschmidt@uni-wuppertal.de