COLLEGE DOCTORAL BRETAGNE MATHS, TELECOMS INFORMATIQUE, SIGNAL SYSTEMES, ELECTRONIQUE

Université de Rennes

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
Mathématiques, Télécommunications, Informatique, Signal, Systèmes, Électronique
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par
Théo MANGENOT

Image inverse pour les $\widehat{\mathcal{D}}$-modules équivariants sur les espaces analytiques rigides

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 5 Juillet 2024
Unité de recherche : IRMAR

Rapporteurs avant soutenance :

Konstantin ARDAKOV	Professeur, Université d'Oxford
Daniel CARO	Professeur, Université de Caen

Composition du Jury :

Président :	Daniel CARO	Professeur, Université de Caen
Examinateurs :	Konstantin ARDAKOV	Professeur, Université d'Oxford
	Christine HUYGHE	Directeur de recherche, Université de Franche-Comté
Dir. de thèse :	Bernard LE STUM	Maître de conférences, Université de Rennes
Co-dir. de thèse :	Tobias SCHMIDT	Professeur d'université, Université de Wuppertal

REMERCIEMENTS

Merci à mes directeurs de thèse, Tobias Schmidt et Bernard Le Stum, pour leur présence durant cette thèse. Merci à Tobias de m'avoir accompagné tout au long de ces quatre années, malgré le covid et malgré la distance. Merci à Bernard d'avoir repris la direction de la thèse cette année, de sa relecture attentive et de ses conseils avisés.

Merci Daniel Caro et Konstantin Ardakov d'avoir accepté d'être mes rapporteurs, merci pour vos retours.

Merci à tous les chercheurs qui m'ont aidé à un moment ou un autre, aux membres de l'équipe de géométrie arithmétique, à Mathieu Romagny pour son groupe de travail, à Christophe Mourougane et Monique Dauge pour le suivi de ma thèse. Merci à tous les chargés de cours ou de TD avec qui j'ai travaillé et qui ont pu faire de ces 4 années d'enseignement une expérience mémorable, et que je ne pourrais tous citer. Merci en particulier à Delphine pour les enseignements que j'ai donné sous sa supervision, et pour son aide précieuse en toutes circonstances.

Merci à tous les professeurs rencontrés pendant mon parcours, du lycée jusqu'au doctorat. Merci à Thierry Prévost pour la vocation qu'il a pu me donner dès la CPGE. Merci à Christine Huyghe pour le merveilleux stage que j'ai pu faire avec elle.

Merci aux collègues doctorants de l'IRMAR, déjà docteurs ou en devenir, pour les moments de vie passés avec eux. Merci à Milan et Thibaut pour ces séances de jeux. Merci à Alice, Lucien, Matilde, Marie, Axel, Adrien, Rémi, Sergio, Mattia et tous les autres. Merci à mes cobureaux successifs, et particulièrement Antoine pour sa complicité, son écoute et toute l'aide et le soutien qu'il a pu m'apporter.

Merci aux anciens de l'ENS et toutes les connaissances que j'ai pu me faire durant mes études. Merci à tous ceux qui ont apporté au club de jeu de société et tous les amis que j'ai pu me faire durant ces stoirées. Merci à mes colocataires successifs et à mon groupe d'ami de la promo, à Bastien, Rémi, Jérôme et PE pour toutes ces bonnes années passées.

Merci à Axel pour toutes ces années de JdR, et tous les joueurs avec qui j'ai passé des

moments magiques, et au plaisir de les revoir bientôt pour d'autres aventures.

Merci à tous les autres amis que je n'ai pas rencontré à Rennes, mais non moins importants pour moi. Merci à Fabien, Élisa et Christophe, à ce petit groupe d'amis avec qui j'ai apprécié partager des moments forts. Merci à Héloïse pour son humour qui n'a jamais manqué. Merci à Pierre, avec qui j'ai passé moins de temps dernièrement, ce à quoi je vais remédier maintenant que j'aurais plus de temps libre.

Merci à ma famille, mes frères Robin et Guilhem, pour le lien qu'on a gardé toutes ces années même à l'autre bout de la France, aux nombreuses soirées passées ensemble qui m'ont permis de tenir bon. Merci à mes parents qui m'ont toujours soutenu et qui sont toujours disponibles pour moi (même si ils ne comprennent pas grand chose à ce que j'ai fait ces 4 ans), et à qui je pense fort aujourd'hui.

Enfin merci à Julie pour ces (presque) 5 années passées ensemble, et pour avoir réussi à me supporter tout ce temps. Tout ce que j'écrirais ici ne suffirait pas à pouvoir t'exprimer tout ce que j'ai sur le cœur, ni tout ce que tu m'as apporté. Merci pour ton soutien sans faille et ta présence constante.

Table des matières

Introduction **7**

1 Opérateurs différentiels sur une variété rigide **11**

1.1 Opérateurs différentiels sur une algèbre affinoïde 11

1.2 Notions de géométrie analytique rigide 18

1.3 Foncteur Image inverse de D-module 22

2 Structures d'espaces **28**

2.1 Algèbres de Fréchet-Stein 28

2.2 Modules coadmissibles 33

2.3 Espaces bornologiques 35

2.4 Nucléarité et pseudo-nucléarité 43

3 Opérateurs G-équivariants **45**

3.1 Anneau de groupe tordu et trivialisation 45

3.2 Action de groupe sur une algèbre affinoïde 47

3.3 Opérateurs G-équivariants sur une algèbre affinoïde 51

3.4 Opérateurs d'ordre fini dans $\widehat{D}(A, G)$ 58

3.5 Action d'un groupe de Lie sur une variété rigide 64

3.6 $\widehat{D}$-modules G-équivariants 69

4 Foncteur image inverse de G-$\widehat{D}$-modules **75**

4.1 Image inverse de $\widehat{D}(A, G)$-modules 75

4.2 Foncteur image inverse 83

Bibliographie **91**

Introduction

Le foncteur image inverse de faisceaux est un outil très classique de la géométrie algébrique. Il est toujours intéressant d'avoir des propriétés de faisceaux qui soient préservées par ce foncteur, et la construction de celui-ci diffère parfois en fonction de ces critères. On s'intéresse bien souvent au foncteur image inverse de faisceaux de modules, de $\mathcal{O}$-modules par exemple, ou dans le cas qui nous intéresse de D-modules où D désigne le faisceau des opérateurs différentiels algébriques d'ordre fini. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de variétés algébriques lisses. En notant Θ_X et Θ_Y les faisceaux tangents de X et Y, on a naturellement une application

$$\Theta_Y \to \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Theta_X. \tag{1}$$

Cette application nous permet de construire pour tout D_X-module $\mathcal{M}$ le D_Y-module $f^*\mathcal{M}$ défini par

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}.$$

Ainsi f^* est appelé le foncteur image inverse de D_X-modules par f.

Dans le cadre complexe, ce foncteur a été étudié et préserve dans le cas d'un morphisme lisse entre variétés lisses la cohérence et la quasi-cohérence des D-modules, comme étudié par Hotta, Takeuchi et Tanisaki dans leur livre [11].

Dans le cadre de la géométrie analytique rigide, on fixe K un corps non-archimédien complet de caractéristique mixte $(0, p)$. Ardakov et Wadsley ont introduit dans leur article [2] le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}$ des opérateurs différentiels sur une K-variété analytique rigide, qui consiste en des opérateurs d'ordre potentiellement infini, qui se prête donc bien à la topologie non-archimédienne. Une caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}$-modules qu'on souhaite étudier est leur coadmissibilité, un bon analogue de la cohérence pour les $\widehat{\mathcal{D}}$-modules. Une construction d'un foncteur image inverse de $\widehat{\mathcal{D}}$-modules a donc été fait par Andreas Bode dans sa prépublication [7], qui préserve la coadmissibilité, en analogie avec le foncteur image inverse de D-modules qui préserve la cohérence.

Cette construction se fait par l'introduction des K-espaces bornologiques. De la même façon qu'un espace topologique est défini par un ensemble d'ouverts, les espaces bornologiques sont définis par un ensemble de bornés qui vérifient des axiomes paraissant intuitivement nécessaires pour cette dénomination. La propriété essentielle des modules bornologiques est leur bon fonctionnement par passage à la complétion.

Proposition A (2.3.19)**.** *Soient E une K-algèbre bornologique et M un E-module bornologique. En notant $\widehat{\cdot}^b$ le foncteur de la complétion bornologique, $\widehat{M}^b$ est un $\widehat{E}^b$-module bornologique.*

Le résultat de Bode repose alors sur le fait que $\widehat{D}^b = \widehat{D}$, c'est-à-dire que l'algèbre $\widehat{D}$ des opérateurs différentiels est obtenue en complétant bornologiquement l'algèbre D des opérateurs différentiels d'ordre fini. Il suffit alors de travailler sur les D-modules bornologiques puis de passer au complété pour obtenir des résultats sur les $\widehat{D}$-modules. Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse de variétés analytiques rigides lisses. On définit de cette façon le foncteur image inverse f^* pour tout $\widehat{D}_X$-module coadmissible $\mathcal{M}$ par

$$f^*\mathcal{M} := \left(\mathcal{O}_Y \widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}\right).$$

Le faisceau $f^*\mathcal{M}$ ainsi obtenu est un $\widehat{D}_Y$-module coadmissible, sa structure de $\widehat{D}_Y$-module résultant encore de l'application (1).

On peut également s'intéresser aux actions de groupe sur les variétés. Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une K-variété analytique rigide X. Pour un affinoïde U de X et un sous-groupe ouvert compact H de G stabilisant U, Ardakov introduit dans son article [1] l'algèbre de groupe tordu complète $\widehat{D}(U, H)$. C'est une généralisation de l'algèbre des opérateurs différentiels $\widehat{D}_X(U)$. On dit alors qu'un $\widehat{D}_X$-module est G-équivariant s'il est muni d'un ensemble de morphisme de faisceaux $\{g^{\mathcal{M}}\}_{g\in G}$ avec $g^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to g^{\#}\mathcal{M}$ pour tout $g \in G$ vérifiant certaines propriétés. On dit de plus qu'il est coadmissible s'il est localement un $\widehat{D}(U, H)$-module coadmissible. Le but est alors de construire un foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules coadmissibles qui préserve l'équivariance. Le cas du groupe trivial correspond au foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules coadmissibles construit par Bode, et nous en voulons une construction qui en soit la généralisation.

Dans cette thèse, j'ai généralisé le travail de Bode à la situation équivariante afin de construire un foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules équivariants. Le premier résultat important pour que la méthode soit reproductible est le suivant.

Théorème B (3.4.12)**.** *Soient U un sous-espace affinoïde de X et H un sous-groupe ouvert compact de G stabilisant U. On a*

$$\widehat{D_X(U) \rtimes H}^b \simeq \widehat{D}(U, H).$$

Par ce théorème, l'algèbre de groupe tordu complète $\widehat{D}(U, H)$ est le complété bornologique de l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre fini sur le groupe H. Mais contrairement au cas étudié par Bode, on ne dispose pas d'un faisceau $\widehat{D}(\cdot, G)$ défini globalement. On obtient donc seulement un résultat local, et il faut réussir à le transposer en résultat global. Choisissons dans ce but un recouvrement spécifique pour la variété. Soient X et Y des espaces analytiques rigides lisses. Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur X et Y. Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse G-équivariant d'espaces rigides.

Proposition C (1.3.2)**.** *On note Y_w^f l'ensemble des sous-espaces affinoïdes V de Y tel qu'il existe un sous-espace affinoïde U de X avec $f(V) \subset U$, et tel que V possède un système local de coordonnées sur U et que U possède un système local de coordonnées. Alors Y_w^f forme une base de la topologie rigide Y_{rig} sur Y.*

Ce recouvrement et cette propriété nous permettent de faire le travail de globalisation. En notant $\mathcal{C}_{X/G}$ la catégorie des $\widehat{D}_X$-modules G-équivariants coadmissibles, on en arrive au résultat principal de la thèse.

Théorème D (4.2.7)**.** *Pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$, on dispose du faisceau $f^*\mathcal{M}$ sur Y_{rig} défini par*

$$f^*\mathcal{M} := \left(\mathcal{O}_Y \widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}\right)$$

et f^* est un foncteur

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathcal{C}_{X/G} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{Y/G} \\ & \mathcal{M} & \longmapsto & f^*\mathcal{M} \end{array}$$

qu'on appelle foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules G-équivariant par f.

Après avoir rappelé des notions de base de la géométrie analytique rigide dans le premier chapitre, et après avoir énoncé des propriétés sur les espaces localement convexe et les espaces bornologiques dans le chapitre 2, j'aborde dans la 3ème partie la notion de $\widehat{D}$-module G-équivariant provenant du travail d'Ardakov. Toutes les notions nécessaires à la construction du foncteur image inverse sont ainsi introduites et celle-ci est faite en chapitre 4.

Notations

Dans tout le document, K désigne un corps non archimédien complet de caractéristique mixte $(0, p)$, d'anneau de valuation discrète R et d'uniformisant π. On note $|\cdot|$ sa norme et ν sa valuation, et $\overline{K}$ désigne la clôture algébrique de K.

Dans tout le document, sauf mention explicite, les modules sont supposés à gauche. Les anneaux et les algèbres mentionnés sont associatifs, unitaires excepté en ce qui concerne les algèbres de Lie, et sont généralement non commutatifs.

Chapitre 1

Opérateurs différentiels sur une variété rigide

1.1 Opérateurs différentiels sur une algèbre affinoïde

Le but de ce chapitre est de construire l'algèbre des opérateurs différentiels dans le cadre de la géométrie non archimédienne. Cette construction est faite en détail par Ardakov et Wadsley dans leur article [2] qui sera utilisé comme référence dans cette section. Nous essayerons de décrire explicitement ces objets sous une forme plus facile à manipuler.

On rappelle quelques notions sur les algèbres affinoïdes, qui proviennent principalement du travail de Bosch dans [9].

Définition 1.1.1. *La n-ème algèbre de Tate T_n ou $K\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$ est l'algèbre des séries entières à n coordonnées de K convergentes sur $\mathbb{B}^n(\overline{K})$, qui désigne la boule unité de $\overline{K}^n$ pour la norme max.*

Puisque K est non archimédien, il s'agit des séries entières sur K dont le terme général converge vers 0. On exprime les éléments de T_n sous la forme $\sum r_\alpha \xi^\alpha$ où pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on a $r_\alpha \in K$ et $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\ldots\xi_n^{\alpha_n}$. C'est une K-algèbre normée dont la norme est définie par

$$\left|\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} r_\alpha \xi^\alpha\right| := \max_{\alpha\in\mathbb{N}^n} |r_\alpha|.$$

Définition 1.1.2. *Une K-algèbre affinoïde est une K-algèbre A tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et un morphisme d'algèbres surjectif $K\langle\xi_1,\ldots,\xi_k\rangle \twoheadrightarrow A$.*

Cela équivaut à dire que A est isomorphe à une K-algèbre de la forme T_k/I où I est un idéal de T_k. L'algèbre de Tate T_k étant normée et I étant un idéal fermé de T_k, on munit A d'une norme quotient sous-multiplicative, qui dépend alors de la surjection $T_k \twoheadrightarrow A$ choisie.

Ce choix n'est pas contraignant car pour deux surjections distinctes définissant A comme algèbre affinoïde, les deux normes obtenues sont équivalentes. De cette manière, une K-algèbre affinoïde est munie d'une topologie indépendante du choix de sa représentation. Ce résultat est énoncé dans [9], proposition 3.1.20.

Notation. *On note également $R\langle\xi_1,\dots,\xi_n\rangle$ l'algèbre des séries entières à n variables de R dont le terme général converge vers 0.*

Définition 1.1.3. *Une R-algèbre topologique $\mathcal{A}$ est topologiquement de type fini s'il existe $k\in\mathbb{N}$ et un morphisme de R-algèbres continu, ouvert et surjectif $R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle \twoheadrightarrow \mathcal{A}$. Elle est admissible si de plus $\mathcal{A}$ est sans π-torsion.*

Cela équivaut à dire que $\mathcal{A}$ est isomorphe à une R-algèbre topologique de la forme $R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle/I$ où I est un idéal de $R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle$. De manière équivalente, $\mathcal{A}$ est topologiquement de type fini si et seulement si il existe un ensemble fini S d'éléments de $\mathcal{A}$ tel que la sous-R-algèbre engendrée par S est dense dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}=\overline{\langle S\rangle}_R$.

Définition 1.1.4. *Soit A une K-algèbre affinoïde. Une sous-R-algèbre topologiquement de type fini $\mathcal{A}$ de A est un modèle formel de A si $A\simeq\mathcal{A}\otimes_R K$ en tant que K-algèbres.*

Un modèle formel de A existe toujours, car si $K\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle \twoheadrightarrow A$ est un morphisme surjectif, on peut choisir comme modèle formel l'image de $R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle$ par ce morphisme.

Proposition 1.1.5. *Soient A une K-algèbre affinoïde et $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. Alors il existe sur A une norme de K-algèbre définissant la topologie de A tel que $\mathcal{A}$ est la boule unité de A, qu'on appelera la norme jauge de $\mathcal{A}$ sur A.*

Démonstration. En tant que R-algèbre topologiquement de type fini, il existe $k\in\mathbb{N}$ et un idéal I de $R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle$ tel que $\mathcal{A}\simeq R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle/I$. Comme K est R-plat, on a

$$A\simeq\mathcal{A}\otimes_R K\simeq(R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle/I)\otimes_R K\simeq T_k/(K.I).$$

On munit ainsi $A\simeq T_k/(I\otimes_R K)$ d'une norme quotient, dont la topologie est équivalente à celle de A, et la boule unité pour cette norme est $R\langle\xi_1,\dots,\xi_k\rangle/I\simeq\mathcal{A}$. □

On décrit explicitement la norme jauge de $\mathcal{A}$ sur A, qui est définie pour tout $a\in A$ par

$$|a|=\inf_{r\in K}\{|r|\ ,\ a\in r\mathcal{A}\}.$$

Proposition 1.1.6. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux modèles formels de A. Alors $\mathcal{AB}$ est un modèle* *formel de A contenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, où*

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i b_i,\ r \in \mathbb{N} \quad et \quad \forall i \in [\![1, r]\!], a_i \in \mathcal{A}, b_i \in \mathcal{B} \right\} \subset A.$$

Démonstration. Voir [2], lemme 3.1. □

On fixe dans la suite une K-algèbre affinoïde A et un modèle formel $\mathcal{A}$ de A.

Les définitions suivantes introduisant la notion d'algèbre enveloppante sont présentes dans l'article [14] de Rinehart.

Définition 1.1.7. *Soient S un anneau commutatif et B une S-algèbre commutative. Une (S, B)-algèbre de Lie-Rinehart L, ou simplement (S, B)-algèbre de Lie, est une S-algèbre de Lie qui est aussi un B-module, muni d'un morphisme B-linéaire $\rho : L \to \mathrm{Der}_S(B)$ de S-algèbres de Lie, tel que en notant $[\cdot, \cdot]$ le crochet de Lie sur L on a*

$$\forall x, y \in L, \forall a \in B\ ,\ [x, ay] = a[x, y] + \rho(x)(a)y.$$

Un premier exemple dans notre contexte, lorsque A est une algèbre affinoïde, est la (K, A)-algèbre de Lie Θ_A des K-dérivations continues sur A, munie du morphisme d'inclusion $\Theta_A \to \mathrm{Der}_K(A)$. Toute sous-$K$-algèbre de Lie de Θ_A qui en est également un sous-A-module est alors une (K, A)-algèbre de Lie par la composition des inclusions.

De la même façon, lorsque $\mathcal{A}$ est un modèle formel de A, l'algèbre $\Theta_{\mathcal{A}}$ des R-dérivations continues sur $\mathcal{A}$ est une $(R, \mathcal{A})$-algèbre de Lie. Et toute sous-R-algèbre de Lie de $\Theta_{\mathcal{A}}$ qui est également un sous-$\mathcal{A}$-module est une $(R, \mathcal{A})$-algèbre de Lie.

Définition 1.1.8. *Soient A une K-algèbre affinoïde, $\mathcal{A}$ un modèle formel de A et L une (K, A)-algèbre de Lie. Un sous-$\mathcal{A}$-module $\mathcal{L}$ de L est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de L si c'est une sous-$(R, \mathcal{A})$-algèbre de Lie, qui est de type fini sur $\mathcal{A}$ et que $K.\mathcal{L} = L$.*

Soit L une (S, B)-algèbre de Lie. Par son morphisme $\rho : L \to Der_S(B)$ on associe à tout élément $b \in B$ et $l \in L$ l'opération $l(b) := \rho(l)(b)$. Ainsi dans le contexte de la définition précédente, un $\mathcal{A}$-réseau $\mathcal{L}$ de L stabilise $\mathcal{A}$ par l'opération ci-dessus, ce qu'on notera $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{L}$ est une R-algèbre de Lie elle vérifie aussi $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$.

Avec les mêmes notations, nous étudierons majoritairement le cas de $\mathcal{A}$-réseaux de Lie de la (K, A)-algèbre de Lie Θ_A. Pour synthétiser dans ce cas précis, un $\mathcal{A}$-réseau de Lie $\mathcal{L}$ de Θ_A est simplement une sous-R-algèbre de Lie de Θ_A qui est aussi un $\mathcal{A}$-module de type fini, qui stabilise $\mathcal{A}$ et tel que $K.\mathcal{L} = \Theta_A$.

Proposition 1.1.9. *Soit L une (S, B)-algèbre de Lie-Rinehart. Il existe une S-algèbre $U_B(L)$ et des morphismes $i_B : B \to U_B(L)$ de S-algèbres et $i_L : L \to U_B(L)$ de S-algèbres de Lie tels que*

$$\forall x \in L, \forall a \in B \ , \ i_L(ax) = i_B(a)i_L(x) \ \text{et} \ [i_L(x), i_B(a)] = i_B(\rho(x)(a))$$

et qui vérifie la propriété universelle suivante : pour toute S-algèbre U, pour tout morphisme $j_B : B \to U$ de S-algèbres et pour tout morphisme $j_L : L \to U$ de S-algèbres de Lie tels que

$$\forall x \in L, \forall a \in B \ , \ j_L(ax) = j_B(a)j_L(x) \ \text{et} \ [j_L(x), j_B(a)] = j_B(\rho(x)(a)),$$

il existe un unique morphisme de S-algèbres $\varphi : U_B(L) \to U$ tel qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & U & \\ B \arrow[ur, "j_B"] \arrow[r, "i_B"'] & U_B(L) \arrow[u, "\varphi"] & L. \arrow[ul, "j_L"'] \arrow[l, "i_L"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Voir [14], section 2. □

Définition 1.1.10. *Soit L une (S, B)-algèbre de Lie-Rinehart. On appelle algèbre enveloppante de L la S-algèbre $U_B(L)$ vérifiant les propriétés de la proposition précédente.*

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion, on notera tout simplement $U(L)$ l'algèbre enveloppante de L. Soit A une algèbre affinoïde, on construit de cette façon l'algèbre D_A des opérateurs différentiels d'ordre fini de A, donnée par $D_A := U(\Theta_A)$.

Remarquons que le morphisme $i_A : A \to U(L)$ est toujours injectif, tandis que le morphisme $i_L : L \to U(L)$ est injectif lorsque L est un A-module libre.

Il nous reste alors à définir l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre infini.

Définition 1.1.11. *Soient A une K-algèbre affinoïde, $\mathcal{A}$ un modèle formel de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de Θ_A. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose*

$$D_k := \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})} \otimes_R K = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}_K$$

où $\widehat{\cdot}$ désigne la complétion π-adique. On pose

$$\widehat{D}_A := \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} D_k.$$

Remarque. *La définition ci-dessus a bien du sens car les $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ forment un système projectif. En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a une inclusion $U(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \subset U(\pi^k\mathcal{L})$ et on obtient par complétion π-adique un morphisme $D_{k+1} \to D_k$ qui fait de la famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille projective.*

Remarque. *Dans la définition précédente, $\widehat{D}_A$ ne dépend ni du choix du modèle formel $\mathcal{A}$, ni du choix du réseau de Lie $\mathcal{L}$.*

Cette indépendance quant au choix du modèle formel et du réseau de Lie est établie dans la section 6.2. de [2], qui traite d'un cas plus général, celui de l'algèbre

$$\widehat{U(L)} := \varprojlim_{k \in \mathbb{N}} \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}$$

où L est une (K, A)-algèbre de Lie de type fini et où $\mathcal{L}$ est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de L. On applique donc ce résultat pour $L = \Theta_A$.

Définition 1.1.12. *Soit A une K-algèbre affinoïde. Un système local de coordonnées de A sur K, lorsqu'il existe, est une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de A tel que l'espace des différentielles de Kähler Ω_A de A sur K a pour A-base la famille $(dx_1, \ldots, dx_n)$, c'est-à-dire*

$$\Omega_A = \bigoplus_{i=1}^{n} A.dx_i.$$

Remarque. *Un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de A permet d'obtenir une base $(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ de Θ_A, où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ l'élément ∂_{x_i} est l'image de dx_i^* par l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A) \simeq \Theta_A$. On écrira souvent que $(x_i, \partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système local de coordonnées, même si les ∂_{x_i} sont entièrement déterminés par les x_i.*

Pour une algèbre affinoïde A munie d'un système local de coordonnées, le cardinal de tout système de coordonnées de A est le même, il s'agit du rang du A-module libre Ω_A.

Proposition 1.1.13. *Soient A une algèbre affinoïde munie d'un système local de coordonnées (x_i'), et $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, en posant $x_i = \pi^{-N}x_i'$*

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le $\mathcal{A}$-module libre

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}.\partial_{x_i} \subset \Theta_A$$

est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie, et $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système local de coordonnées de A.

Démonstration. Montrons tout d'abord qu'on peut trouver un tel $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est un modèle formel, il existe un ensemble fini S de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \overline{\langle S\rangle}_R$. Comme $K.\mathcal{A} = A$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^{N_i}\partial_{x'_i}(S) \subset \mathcal{A}$. En prenant $N = \max N_i$ et $x_i = \pi^{-N}x'_i$ (et donc $\partial_{x_i} = \pi^N\partial_{x'_i}$) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors on a

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \overline{\langle \mathcal{A}\partial_{x_1}(S), \ldots, \mathcal{A}\partial_{x_n}(S)\rangle}_R \subset \mathcal{A}.$$

Ainsi, les éléments de $\mathcal{L}$ sont des dérivations sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L} \subset \Theta_{\mathcal{A}}$. On montre alors qu'avec ce choix de $\mathcal{L}$, on a $[\mathcal{L},\mathcal{L}] \subset \mathcal{L}$. En effet, soient $a, b \in \mathcal{A}$ et $i, j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$[a\partial_{x_i}, b\partial_{x_j}] = a\partial_{x_i}b\partial_{x_j} - b\partial_{x_j}a\partial_{x_i} = \underbrace{a\partial_{x_i}(b)}_{\in\mathcal{A}}\partial_{x_j} - \underbrace{b\partial_{x_j}(a)}_{\in\mathcal{A}}\partial_{x_i} \in \mathcal{L}$$

et par linéarité du crochet de Lie, on constate que celui-ci stabilise $\mathcal{L}$. Ainsi $\mathcal{L}$ est une $\mathcal{A}$-sous-algèbre de Lie de $\Theta_{\mathcal{A}}$, c'est donc une $(R,\mathcal{A})$-algèbre de Lie-Rinehart. Puisque de plus $K.\mathcal{L} = \Theta_A$ et que $\mathcal{L}$ est de type fini, c'est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de Θ_A. □

Par cette proposition, on dira que quitte à redimensionner le système local de coordonnées, le $\mathcal{A}$-module libre $\mathcal{L}$ engendré par les $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie.

Proposition 1.1.14. *Soient A une K-algèbre affinoïde munie d'un système local de coordonnées $(x_i,\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. Supposons que le $\mathcal{A}$-module libre $\mathcal{L}$ engendré par les $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a des injections $D_{k+1} \hookrightarrow D_k$ avec*

$$D_k \simeq \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \ \textit{et} \ a_\alpha\pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

et on a des injections $\widehat{D}_A \hookrightarrow D_k$ avec

$$\widehat{D}_A \simeq \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha\partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \ \textit{et} \ \forall k \in \mathbb{N}, \ a_\alpha\pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{A}$-réseau de Lie $\pi^k \mathcal{L}$ a pour base $(\pi^k \partial_{x_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ sur $\mathcal{A}$, donc

$$U(\pi^k \mathcal{L}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathcal{A}.\pi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$$

où $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Avec une telle base, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{U(\pi^k \mathcal{L})} \simeq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \pi^{k|\alpha|} \partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in \mathcal{A} \text{ et } a_\alpha \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

et donc

$$D_k = \widehat{U(\pi^k \mathcal{L})}_K \simeq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \text{ et } a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

Le système projectif $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a pour morphismes de transition les injections $D_{k+1} \hookrightarrow D_k$, où chaque D_k est isomorphe à un sous-espace de l'espace des séries d'opérateurs. Dans ce contexte, leur limite projective $\widehat{D}_A$ est isomorphe à l'intersection de ces espaces, donc

$$\begin{aligned} \widehat{D}_A &\simeq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \text{ et } a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\} \\ &\simeq \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha \ , \ a_\alpha \in A \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \ a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \overset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}. \end{aligned}$$

□

Reprenons les hypothèses de la proposition précédente. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en fixant une norme $|\cdot|$ sur A, on a une norme sous-multiplicative sur D_k notée $|\cdot|_k$ et définie pour tout $s \in D_k$ par

$$|s|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left| a_\alpha \pi^{-k|\alpha|} \right| \text{ où } s = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha.$$

On prend sur A la norme jauge pour son modèle formel $\mathcal{A}$ définie en proposition 1.1.5. Comme la boule unité de A pour cette norme est $\mathcal{A}$, on constate que la boule unité de D_k pour la norme $|\cdot|_k$ est $\widehat{U(\pi^k \mathcal{L})}$.

Par les injections $\widehat{D}_A \hookrightarrow D_k$, on munit ainsi $\widehat{D}_A$ d'une suite de normes $(|\cdot|_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui définissent sa topologie.

Proposition 1.1.15. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le complété de $\widehat{D}_A$ pour la norme $|\cdot|_k$ est isomorphe à D_k.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a une injection dense $\widehat{D}_A \hookrightarrow D_k$. Comme D_k est complet pour sa norme $|\cdot|_k$, par passage au complété on a

$$\widehat{\widehat{D}_A}^{|\cdot|_k} \simeq D_k. \qquad \square$$

1.2 Notions de géométrie analytique rigide

On rappelle brièvement les notions de base sur la géométrie analytique rigide, développées dans [9].

Définition 1.2.1. *Soit A une K-algèbre affinoïde. On appelle K-espace affinoïde associé à A l'ensemble $X = \mathrm{Sp}(A)$ des idéaux maximaux de A.*

Soit $\psi : A \to B$ un morphisme de K-algèbres affinoïdes. Ce morphisme induit une application

$${}^a\psi : \mathfrak{m} \in \mathrm{Sp}(B) \longmapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Sp}(A).$$

Définition 1.2.2. *Soient $X = \mathrm{Sp}(A)$ et $Y = \mathrm{Sp}(B)$ des K-espaces affinoïdes. Une application $\varphi : Y \to X$ est un morphisme de K-espaces affinoïdes s'il existe un morphisme de K-algèbres affinoïdes $\psi : A \to B$ tel que $\varphi = {}^a\psi$.*

Définition 1.2.3. *Soit X un K-espace affinoïde. Un sous-ensemble $U \subset X$ est appelé un sous-domaine affinoïde de X s'il existe un morphisme de K-espaces affinoïdes injectif $\iota : X' \to X$ tel que $\iota(X') = U$, et vérifiant la propriété universelle suivante : Pour tout morphisme de K-espaces affinoïdes $\varphi : Y \to X$ tel que $\varphi(Y) \subset U$, il existe un unique morphisme $\varphi' : Y \to X'$ tel que $\iota \circ \varphi' = \varphi$.*

Proposition 1.2.4. *Soit X un K-espace affinoïde. On munit X d'une topologie où les sous-espaces affinoïdes forment une base d'ouverts de X, et on définit le préfaisceau $\mathcal{O}_X$ définit pour tout sous-espace affinoïde $U \subset X$ par $\mathcal{O}_X(U) = B$ lorsque $U = \mathrm{Sp}(B)$.*

Malheureusement le préfaisceau $\mathcal{O}_X$ n'est pas un faisceau pour cette topologie. On voit dans le théorème 1, section 4.3. de [9] que $\mathcal{O}_X$ vérifie des propriétés similaires aux faisceaux à condition de restreindre les recouvrements possibles. Commençons donc par rappeler la notion de topologie de Grothendieck telle que vue en section 9.1 de [8].

Définition 1.2.5. *Une topologie de Grothendieck $\mathfrak{T}$, ou G-topologie, sur un ensemble X consiste en un ensemble S de sous-ensembles de X, appelés ouverts admissibles, et pour chaque $U \in S$ d'une famille* $\mathrm{Cov}\ U$ *de recouvrements de U, qui seront dits admissibles, tels que*

— *Si* $U, V \in S$ *alors* $U \cap V \in S$.
— *Si* $U \in S$ *alors* $\{U\} \in \mathrm{Cov}\ U$.
— *Si* $U \in S$ *et* $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}\ U$ *et que pour tout* $i \in I$ *on a* $\{V_{i,j}\}_{j\in J} \in \mathrm{Cov}\ U_i$, *alors la composition* $\{V_{i,j}\}_{i\in I, j\in J} \in \mathrm{Cov}\ U$.
— *Si* $U, V \in S$ *avec* $V \subset U$, *et que* $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}\ U$, *alors* $\{U_i \cap V\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}\ V$.

C'est d'une telle topologie que nous allons munir les espaces affinoïdes.

Définition 1.2.6. *Soit* X *un* K*-espace affinoïde. La topologie de Grothendieck faible* X_w *sur* X *est la* G*-topologie dont les ouverts sont les sous-domaines affinoïdes de* X *et les recouvrements sont les recouvrements finis par des sous-domaines affinoïdes.*

Cette G-topologie corrige le problème que nous avions précédemment, puisqu'avec cette topologie, $\mathcal{O}_X$ est un faisceau sur X par le théorème 1, section 4.3 de [9].

Nous revenons à d'autres propriétés générales sur les G-topologies, issues du chapitre 9 de [8], qui seront essentielles pour définir les espace analytiques rigides.

Définition 1.2.7. *Soit* $\mathfrak{T}$ *une* G*-topologie sur un espace* X. *Une* G*-topologie* $\mathfrak{T}'$ *est dite légèrement plus fine que* $\mathfrak{T}$ *si*
— $\mathfrak{T}'$ *est plus fine que* $\mathfrak{T}$, *c'est-à-dire que tout* $\mathfrak{T}$*-ouvert est un* $\mathfrak{T}'$*-ouvert, et tout* $\mathfrak{T}$*-recouvrement est un* $\mathfrak{T}'$*-recouvrement.*
— *Les* $\mathfrak{T}$*-ouverts forment une base des* $\mathfrak{T}'$*-ouverts, c'est-à-dire que pour tout* $\mathfrak{T}'$*-ouvert* U *il existe un* $\mathfrak{T}'$*-recouvrement par des* $\mathfrak{T}$*-ouverts.*
— *Pour tout* $\mathfrak{T}'$*-recouvrement* $\{U_i\}_{i\in I}$ *d'un* $\mathfrak{T}$*-ouvert* U, *il existe un* $\mathfrak{T}$*-recouvrement* $\{V_j\}_{j\in J}$ *qui est un raffinement de* $\mathcal{U}$, *c'est-à-dire que pour tout* $j \in J$, *il existe* $i \in I$ *tel que* $V_j \subset U_i$.

Proposition 1.2.8. *Soit* $\mathfrak{T}$ *une* G*-topologie sur un espace* X *tel que* $\emptyset$ *et* X *sont des* $\mathfrak{T}$*-ouverts. L'ensemble des* G*-topologies légèrement plus fines que* $\mathfrak{T}$ *possède un unique élément maximal. Cette* G*-topologie sur* X *vérifie*

1. $\emptyset$ *et* X *sont des ouverts admissibles.*
2. *Soient* $\{U_i\}_{i\in I}$ *un recouvrement admissible d'un ouvert admissible* $U \subset X$, *et* $V \subset U$ *tel que pour tout* $i \in I$ *l'ensemble* $V \cap U_i$ *est un ouvert admissible de* X. *Alors* V *est un ouvert admissible de* X.
3. *Soit* $\{U_i\}_{i\in I}$ *un recouvrement d'un ouvert admissible* $U \subset X$ *par des ouverts admissibles tel que* $\{U_i\}_{i\in I}$ *admet un raffinement admissible. Alors* $\{U_i\}_{i\in I}$ *est un recouvrement admissible de* X.

On voit en proposition 2, section 9.1.2 de [8] une preuve incluant la construction de cette G-topologie maximale.

Théorème 1.2.9. *Soient $\mathfrak{T}$ une G-topologie sur un ensemble X, et $\mathfrak{T}'$ une G-topologie légèrement plus fine que $\mathfrak{T}$. Alors tout faisceau sur $\mathfrak{T}$ s'étend de manière unique en un faisceau sur $\mathfrak{T}'$.*

Démonstration. Voir [8], section 9.2.3, proposition 1. □

Grâce à ce théorème, on pourra toujours se permettre de se placer sur une topologie légèrement plus fine sans que cela ne change les raisonnements sur les faisceaux. On se permet donc de considérer sur les variétés affinoïdes une topologie plus fine que X_w.

Notation. *Soit X un espace affinoïde. On note X_{rig} la G-topologie maximale des G-topologies légèrement plus fines que X_w.*

- *Un sous-ensemble $U \subset X$ est un ouvert admissible pour X_{rig} s'il existe un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de U par des affinoïdes tel que pour tout morphisme d'espaces affinoïdes $\phi : Z \to X$ avec $\phi(Z) \subset U$, le recouvrement $\{\phi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ de Z admet un raffinement fini par des affinoïdes de Z.*
- *Un recouvrement $\{V_i\}_{i\in I}$ de $V \in X_{rig}$ est un recouvrement admissible pour X_{rig} si $V_i \in X_{rig}$ pour tout $i \in I$ et si pour tout morphisme d'espaces affinoïdes $\phi : Z \to X$ avec $\phi(Z) \subset V$, le recouvrement $\{\phi^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$ de Z admet un raffinement fini par des affinoïdes de Z.*

Cette G-topologie sera toujours celle employée sur les espaces affinoïdes sauf mention contraire. Cependant, il nous suffira de construire des faisceaux sur X_w pour définir de nouveaux faisceaux sur X_{rig} par extension. Précisons de plus que le X_w-faisceau $\mathcal{O}_X$ décrit précédemment s'étend de manière unique en un X_{rig}-faisceau $\mathcal{O}_X$.

Une fois la construction des espaces affinoïdes terminée, munis de leur G-topologie et de leur faisceau structural, on définit les espaces analytiques rigides qui correspondent à des espaces localement isomorphes à des espaces affinoïdes.

Définition 1.2.10. *Un K-espace (analytique) rigide est un couple $(X, \mathcal{O}_X)$ où X est un espace muni d'une G-topologie et $\mathcal{O}_X$ est un faisceau sur X, tel que*

- *la G-topologie sur X vérifie les 3 propriétés de la proposition 1.2.8.*
- *X admet un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ où $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ est isomorphe à un K-espace affinoïde pour tout $i \in I$.*

De même, on notera X_{rig} la G-topologie d'un espace rigide X.

Définition 1.2.11. *Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des K-espaces rigides. Un morphisme de K-espaces rigides de $(X, \mathcal{O}_X)$ vers $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un couple (φ, φ^*) où $\varphi : X \to Y$ est une application continue et φ^* est un système de K-morphismes $\varphi_V^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$ où V parcourt les ouverts admissibles de Y.*

Lorsque les données sont claires, on ne précise pas le faisceau structurel $\mathcal{O}_X$ d'un espace rigide X, et on ne précise pas non plus le système φ^* d'un morphisme d'espaces rigides φ.

Définition 1.2.12. *Soient X et Y des K-espaces rigides. Un morphisme de K-espaces rigides $f : Y \to X$ est lisse s'il existe un recouvrement admissible $\{Y_i\}_{i \in I}$ de Y par des affinoïdes tel que $\Omega_{Y_i/X}$ est un $\mathcal{O}_{Y_i}$-module libre de type fini.*

Remarque. *De manière équivalente, f est lisse si et seulement si il existe un recouvrement admissible $\{Y_i\}_{i \in I}$ de Y par des affinoïdes tel que pour tout $i \in I$, Y_i possède un système local de coordonnées sur X, c'est-à-dire qu'il existe une famille $(y_1, \cdots, y_r)$ de $\mathcal{O}_Y$ tel que $\Omega_{Y_i/X}$ est libre de type fini de base $(dy_1, \cdots, dy_r)$.*

Pour un espace rigide X, on peut donner une définition de lissité de X qui équivaut à ce que le morphisme $X \to K$ soit lisse, ce qui donne la définition suivante.

Définition 1.2.13. *Un K-espace rigide X est lisse de dimension n s'il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i \in I}$ de X par des affinoïdes tel que Ω_{X_i} est un $\mathcal{O}_{X_i}$-module libre de type fini de rang n.*

Remarque. *De manière équivalente, X est lisse si et seulement si il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i \in I}$ de X par des affinoïdes tel que pour tout $i \in I$, X_i possède un système local de coordonnées.*

Proposition 1.2.14. *Soient X et Y des K-espaces rigides, et $f : Y \to X$ un morphisme de K-espaces rigides. La suite suivante est exacte*

$$\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow \Omega_{Y/X} \longrightarrow 0$$

et si de plus f est un morphisme lisse alors on a la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\Omega_X \longrightarrow \Omega_Y \longrightarrow \Omega_{Y/X} \longrightarrow 0$$

Démonstration. Voir [12], théorème 25.1. $\square$

Notons X_w^c l'ensemble des sous-domaines affinoïdes U de X tel que $\mathcal{O}_X(U)$ possède un système de coordonnées locales, qui forme une G-topologie en considérant les recouvrement admissibles (dans le sens de X_{rig}) par des éléments de X_w^c.

Proposition 1.2.15. *Soit X un K-espace rigide lisse, la G-topologie X_{rig} est légèrement plus fine que X_w^c.*

Démonstration. Puisque X est lisse, alors il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ de X par des éléments de X_w^c. Soit U un ouvert admissible de X, pour tout $i \in I$ l'ensemble $U \cap X_i$ est admissible et possède un recouvrement admissible $\{U_{i,j}\}_{j\in J}$ par des éléments de X_w. Alors le recouvrement $\{U_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}$ de U est admissible. Puisque $X_i \in X_w^c$ pour tout $i \in I$, alors il existe un système de coordonnées locales $(x_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathcal{O}_X(X_i)$ et pour tout $j \in J$, la famille $(x_{k|U_{i,j}})_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système de coordonnées locales de $U_{i,j}$, donc $U_{i,j} \in X_w^c$.

Ainsi, X_w^c est une base de X_{rig}, tout X_{rig}-recouvrement possède un X_w^c-raffinement et donc X_{rig} est légèrement plus fine que X_w^c. □

Pour finir, on définit le faisceau $\widehat{D}$ sur un espace analytique rigide.

Théorème 1.2.16. *Soit X un K-espace rigide lisse. Pour tout $U \in X_w$, on pose*

$$\widehat{D}_X(U) := \widehat{U(\Theta_X(U))}.$$

et $\widehat{D}_X$ ainsi défini est un faisceau sur X_w qui s'étend uniquement en un faisceau sur X_{rig}.

Démonstration. Voir [2], théorème 8.1 et théorème 9.3. □

1.3 Foncteur Image inverse de D-module

Avant de construire un foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules, nous pouvons étudier le cas des opérateurs d'ordre fini. En géométrie algébrique complexe,il existe un foncteur image inverse de D-modules donné pour un morphisme $f : Y \to X$ entre variétés lisses par

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}.$$

Nous allons revoir cette construction dans le cadre de la géométrie analytique rigide, qui sera la première étape pour la construction du foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules.

Soient X et Y des K-espaces rigides lisses respectivement de rang n et m, et $f : Y \to X$ un morphisme lisse de K-espaces rigides.

Définition 1.3.1. *Avec les notations de la section, on note* Y_w^f *l'ensemble des sous-espaces affinoïdes* $V \in Y_w^c$ *tel qu'il existe* $U \in X_w^c$ *avec* $f(V) \subset U$*, et tel que* V *possède un système local de coordonnées sur* U*.*

Proposition 1.3.2. *L'ensemble* Y_w^f *avec les recouvrements admissibles forme une G-topologie de* Y*, et la G-topologie* Y_{rig} *est légèrement plus fine que* Y_w^f*.*

Démonstration. Puisque Y est lisse, il existe un recouvrement admissible $\{Y_j\}_{j\in J}$ de Y dans Y_w^c. Comme f est lisse, et quitte à raffiner ce recouvrement, on suppose de plus que les affinoïdes Y_j possèdent chacun un système local de coordonnées sur X. Comme X est lisse, il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i\in I}$ de X dans X_w^c. Pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$, notons $Y_{i,j} = f^{-1}(X_i) \cap Y_j$. Alors la famille $\{Y_{i,j}\}_{j\in J}$ est un recouvrement admissible de l'ouvert $f^{-1}(X_i)$, donc le recouvrement $\{Y_{i,j}\}_{i,j\in I,J}$ de Y est admissible.

Soit $V \in Y_{rig}$. Pour tout $i, j \in I, J$, l'ouvert admissible $V \cap Y_{i,j}$ admet un recouvrement admissible $\{V_{i,j,k}\}_{k\in K}$ dans Y_w^c. Le recouvrement $\{V_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I,J,K}$ de V est admissible, et de plus pour tout $i, j, k \in I, J, K$ on a $f(V_{i,j,k}) \subset X_i$ et $V_{i,j,k} \subset Y_j$. Comme Y_j possède un système local de coordonnées sur X, $V_{i,j,k}$ en possède aussi par restriction. Ainsi V possède un recouvrement admissible dans Y_w^f. □

Proposition 1.3.3. *Soient* $V \in Y_w^f$ *et* $U \in X_w^c$ *tel que* $f(V) \subset U$*. Notons* $A = \mathcal{O}_X(U)$ *et* $B = \mathcal{O}_Y(V)$*. Il existe des systèmes de coordonnées* $(x_i, \partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ *de* A *et* $(y_j, \partial_{y_j})_{j\in[\![1,m]\!]}$ *de* B *tel que* $y_i = f(x_i)$ *pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$*.*

Démonstration. Puisque f est lisse, on a la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_V \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_U} f^{-1}\Omega_U \longrightarrow \Omega_V \longrightarrow \Omega_{V/U} \longrightarrow 0$$

ce qui donne par évaluation en V la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow B \otimes_A \Omega_A \longrightarrow \Omega_B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

Ainsi $\Omega_B \simeq (B \otimes_A \Omega_A) \oplus \Omega_{B/A}$. Comme $U \in X_w^c$, il existe un système local de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ de A. On a par l'injection

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A \Omega_A & \longrightarrow & \Omega_B \\ b \otimes da & \longmapsto & bd(f(a)) \end{array}$$

un isomorphisme

$$B \otimes_A \Omega_A \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} B.d(f(x_i))$$

Comme $V \in Y_w^f$, il existe un système local de coordonnées $(y_{n+1}, \ldots, y_m)$ de B sur A, c'est-à-dire que $(dy_j)_{j \in [\![n+1,m]\!]}$ est une base de $\Omega_{B/A}$. Ainsi, en notant $y_i = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\Omega_B \simeq \bigoplus_{j=1}^{m} B.dy_j.$$

□

Proposition 1.3.4. *Avec les notations de la proposition précédente, on a un morphisme surjectif de B-modules*

$$\tilde{\cdot} : \Theta_B \twoheadrightarrow B \otimes_A \Theta_A \ , \ \theta \mapsto \tilde{\theta}$$

entièrement déterminé grâce aux systèmes locaux de coordonnées de A et B par

$$\forall j \in [\![1, m]\!] \ , \ \widetilde{\partial_{y_j}} = \begin{cases} 1 \otimes \partial_{x_j} & si\ j \leq n \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Démonstration. On a la suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow B \otimes_A \Omega_A \xrightarrow{\varphi} \Omega_B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0$$

avec φ définie par $\varphi(1 \otimes dx_i) = d(f(x_i)) = dy_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En prenant son dual, on obtient la suite exacte suivante par contravariance et exactitude du foncteur $\mathrm{Hom}_B(-, B)$ sur les suites exactes scindées

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\Omega_B, B) \xrightarrow{- \circ \varphi} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_A, B) \longrightarrow 0.$$

Or, nous pouvons donner des bases des B-modules suivants

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_B, B) = \bigoplus_{j=1}^{m} B.dy_j^*$$

$$\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A \Omega_A, B) \simeq B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A) = \bigoplus_{i=1}^{n} B.1 \otimes dx_i^*$$

et comme

$$\forall j \in [\![1,m]\!]\ ,\ dy_j^* \circ \varphi : 1 \otimes dx_i \mapsto dy_j^*(dy_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $dy_j^* \circ \varphi = 1 \otimes dx_j^*$ avec la convention que $dx_j^* = 0$ si $j > n$. Par les isomorphismes $\mathrm{Hom}_B(\Omega_B, B) \simeq \Theta_B$ et $\mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A) \simeq \Theta_A$, la surjection $- \circ \varphi$ nous permet d'obtenir un morphisme surjectif $\tilde{\cdot} : \Theta_B \to B \otimes \Theta_A$ dont les valeurs sur la base $(\partial_{y_j})_{j \in [\![1,m]\!]}$ de Θ_B sont données par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Theta_B \arrow[rrr, "\tilde{\cdot}"] \arrow[ddd] & & & B \otimes_A \Theta_A \arrow[ddd] \\
& \partial_{y_j} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 1 \otimes dx_j & \\
& dy_j^* \arrow[r, mapsto] & 1 \otimes dx_j^* \arrow[u, mapsto] & \\
\mathrm{Hom}_B(\Omega_B, B) \arrow[rrr, "- \circ \varphi"'] & & & B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(\Omega_A, A)
\end{tikzcd}$$

toujours avec la convention que $dx_j = 0$ si $j > n$. $\square$

Proposition 1.3.5. *L'espace $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est muni d'une structure de $U(\Theta_B)$-module.*

Démonstration. En reprenant les notations de la proposition 1.3.4, on définit l'application

$$\begin{array}{rccc} j_{\Theta_B} : & \Theta_B & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(B \otimes_A U(\Theta_A)) \\ & \theta & \longmapsto & (b \otimes s \mapsto \theta(b) \otimes s + b\tilde{\theta}.s) \end{array}$$

et on pose

$$\begin{array}{rccc} j_B : & B & \longrightarrow & \mathrm{End}_K(B \otimes_A U(\Theta_A)) \\ & a & \longmapsto & (b \otimes s \mapsto a.b \otimes s). \end{array}$$

Remarquons d'abord que j_{Θ_B} est un morphisme de K-algèbres de Lie, c'est-à-dire que pour tout $b, b' \in B$, pour tout $i, j \in [\![1,m]\!]$ et pour tout $b'' \otimes s \in B \otimes_A U(\Theta_A)$, on a

$$\begin{aligned}
[j_{\Theta_B}(b\partial_{y_i}), j_{\Theta_B}(b'\partial_{y_j})](b'' \otimes s) \quad &= b\partial_{y_i}(b'\partial_{y_j}(b'')) \otimes s + bb'\partial_{y_j}(b'') \otimes \partial_{x_i} s + b\partial_{y_i}(b'b'') \otimes \partial_{x_j} s \\
&\quad + bb'b'' \otimes \partial_{x_i}\partial_{x_j} s - b'\partial_{y_j}(b\partial_{y_i}(b'')) \otimes s - bb'\partial_{y_i}(b'') \otimes \partial_{x_j} s \\
&\quad - b\partial_{y_j}(bb'') \otimes \partial_{x_i} s - bb'b'' \otimes \partial_{x_j}\partial_{x_i} s \\
&= [b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}](b'') \otimes s + b\partial_{y_i}(b')b'' \otimes \partial_{x_j} s - b'\partial_{y_j}(b)b'' \otimes \partial_{x_i} s \\
&= [b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}](b'') \otimes s + b''\widetilde{[b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}]} s \\
&= j_{\Theta_B}([b\partial_{y_i}, b'\partial_{y_j}])(b'' \otimes s)
\end{aligned}$$

avec la convention que pour i ou j supérieur à n, alors ∂_{x_i} et ∂_{x_j} valent 0. On déduit par linéarité que pour tout $\theta, \theta' \in U(\Theta_B)$ on a

$$[j_{\Theta_B}(\theta), j_{\Theta_B}(\theta')] = j_{\Theta_B}([\theta, \theta']).$$

De plus, pour tout $b \in B$ et pour tout $\theta \in \Theta_B$ on a

— $j_B(b) j_{\Theta_B}(\theta) = j_{\Theta_B}(b\theta)$ car pour tout $b' \otimes s \in B \otimes_A U(\Theta_A)$, on a

$$j_B(b) j_{\Theta_B}(\theta)(b' \otimes s) = b\theta(b') \otimes s + bb'\tilde{\theta}(s) = j_{\Theta_B}(b\theta)(b' \otimes s).$$

— $[j_{\Theta_B}(\theta), j_B(b)] = j_B(\theta(b))$ car pour tout $b' \otimes s \in B \otimes_A U(\Theta_A)$, on a

$$\begin{aligned} [j_{\Theta_B}(\theta), j_B(b)](b' \otimes s) &= (\theta(bb') \otimes s + bb'\tilde{\theta}(s)) - (b\theta(b') \otimes s + bb'\tilde{\theta}(s)) \\ &= (\theta(bb') - b\theta(b')) \otimes s = \theta(b) b' \otimes s = j_B(\theta(b))(b' \otimes s). \end{aligned}$$

Donc par propriété universelle de l'algèbre enveloppante, on a bien une application

$$U(\Theta_B) \longrightarrow \mathrm{End}_K(B \otimes_A U(\Theta_A)).$$ □

Proposition 1.3.6. *Avec les notations de la proposition précédente, le $U(\Theta_B)$-module $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est de présentation finie engendré sur $U(\Theta_B)$ par l'élément $1 \otimes 1$, et on a l'isomorphisme de $U(\Theta_B)$-modules*

$$B \otimes_A U(\Theta_A) \simeq {}^{U(\Theta_B)}\Big/_{\sum_{j=n+1}^{m} U(\Theta_B).\partial_{y_j}}.$$

Démonstration. Les éléments de la forme $1 \otimes \partial_x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sont générateurs en tant que B-module de $B \otimes_A U(\Theta_A)$, où $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$. On remarque alors que, en prenant $\partial_y^\alpha \in U(\Theta_B)$, alors

$$\begin{aligned} \partial_y^\alpha.1 \otimes 1 &= \partial_{y_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{y_n}^{\alpha_n}.1 \otimes 1 = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{y_n}^{\alpha_n - 1}.\widetilde{\partial_{y_n}} = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{y_n}^{\alpha_n - 1}.1 \otimes \partial_{x_n} \\ &= \dots = 1 \otimes \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} = 1 \otimes \partial_x^\alpha. \end{aligned}$$

Donc $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est bien engendré par $1 \otimes 1$ sur $U(\Theta_B)$. On remarque de plus que $\partial_y^\beta.1 \otimes 1 = 0$ avec $\beta \in \mathbb{N}^m$ si et seulement si il existe $j \in]\!]n, m]\!]$ tel que $\beta_j > 0$. Comme

$$U(\Theta_B) = \bigoplus_{\beta \in \mathbb{N}^m} B.\partial_y^\beta$$

alors le noyau de l'application $U(\Theta_B) \to B \otimes_A U(\Theta_A)$ est engendré sur B par les éléments $\partial_{y_j}.\partial_y^\beta$ avec $j \in]\!]n,m]\!]$ et $\beta \in \mathbb{N}^m$, et donc engendré sur $U(\Theta_B)$ par les ∂_{y_j}, $j \in]\!]n,m]\!]$. On a donc la suite exacte

$$U(\Theta_B)^{m-n} \longrightarrow U(\Theta_B) \longrightarrow B \otimes_A U(\Theta_A) \longrightarrow 0$$

ou plus précisément

$$0 \longrightarrow \sum_{j=n+1}^{m} U(\Theta_B).\partial_{y_j} \longrightarrow U(\Theta_B) \longrightarrow B \otimes_A U(\Theta_A) \longrightarrow 0. \qquad \square$$

Proposition 1.3.7. *Notons $D_X = U(\Theta_X)$ et $D_Y = U(\Theta_Y)$. Pour tout D_X-module $\mathcal{M}$, on a sur Y_w^f un faisceau de D_Y-module $f^*\mathcal{M}$ défini par*

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}.$$

Démonstration. Pour tout $V \in Y_w^f$, il existe $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Soit $U' \subset U$ tel que $f(V) \subset U' \in X_w^c$, et posons $A = \mathcal{O}_X(U)$, $A' = \mathcal{O}_X(U')$ et $B = \mathcal{O}_Y(V)$. Par la proposition 1.3.5, $\mathcal{O}_Y(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} D_X(U')$ est un $D_Y(V)$-module. Ainsi,

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V) \subset U' \subset U} \mathcal{O}_Y(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{M}(U')$$

est une limite inductive de $D_Y(V)$-module donc est un $D_Y(V)$-module. Donc $f^*\mathcal{M}$ est un préfaisceau de D_Y-module, qui faisceautisé donne un faisceau de D_Y-module sur Y_w^f. $\square$

Corollaire 1.3.8. *Pour tout D_X-module $\mathcal{M}$, le D_Y-module $f^*\mathcal{M}$ sur Y_w^f s'étend uniquement en un D_Y-module sur Y_{rig}.*

Démonstration. Comme Y_{rig} est légèrement plus fine que Y_w^f par le lemme 1.3.2, le faisceau $f^*\mathcal{M}$ sur Y_w^f s'étend uniquement en un faisceau de D_Y-modules sur Y_{rig} par le théorème 1.2.9. $\square$

On va chercher à partir de ce résultat à construire un foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules.

Chapitre 2

Structures d'espaces

2.1 Algèbres de Fréchet-Stein

Pour définir la notion d'algèbre de Fréchet-Stein, nous aurons besoin d'introduire d'abord les espaces localement convexes et les espaces de Fréchet, ce que nous ferons avec l'aide du livre [16] de Schneider.

Définition 2.1.1. *Soit U un K-espace vectoriel. Un réseau de U est un R-sous-module de U tel que $K.L = U$.*

Définition 2.1.2. *Un K-espace vectoriel topologique U est localement convexe s'il existe une famille de réseaux $(L_i)_{i\in I}$ de U tel que*

$$\forall i \in I, \forall a \in K^\times, \exists j \in I, L_j \subset aL_i$$
$$\forall i, j \in I, \exists k \in I, L_k \subset L_i \cap L_j.$$

et que la topologie sur U a pour bases d'ouverts les ensembles $\{v + L_i,\ v \in U, i \in I\}$.

En notant Λ l'ensemble des réseaux ouverts de U pour cette topologie, pour tout réseau $L \in \Lambda$, on construit une semi-norme jauge q_L définie par

$$\forall x \in U, \quad q_L(x) = \inf_{r\in K}\{|r| \ / \ x \in rL\}.$$

On obtient la définition équivalente suivante, établie dans [16] en proposition 4.4.

Proposition 2.1.3. *La topologie d'un K-espace vectoriel localement convexe U est également définie par la famille de semi-normes $(q_{L_i})_{i\in I}$.*

Il suffit donc d'une famille de semi-normes pour définir la topologie d'un espace localement convexe. Cette proposition rejoint une autre définition équivalente énoncée en proposition 2 page 92 dans [18].

Proposition 2.1.4. *Un K-espace vectoriel topologique U est localement convexe si et seulement si il est limite projective d'espaces semi-normable $(U_i)_{i\in I}$.*

Si U est limite projective d'espaces semi-normables U_i, en notant q'_i une semi-norme sur U_i pour tout $i \in I$, la limite projective munit U d'une famille de semi-normes q_i, issues de q'_i par les morphismes $U \to U_i$, et qui définit la topologie localement convexe de U.

Inversement si U est localement convexe, donc défini par une famille de semi-normes $(q_{L_i})_{i\in I}$ issus de réseaux ouverts, alors U est limite projective des espaces semi-normés $(U, q_{L_i})_{i\in I}$, qui forme un système projectif par les morphismes continus $(U, q_{L_i}) \to (U, q_{L_j})$ lorsque $q_{L_i} \geq q_{L_j}$.

Proposition 2.1.5. *Soient U et V des espaces localement convexes, d'ensembles de réseaux ouverts Λ_U et Λ_V. Alors $U \otimes_K V$ est un espace localement convexe d'ensemble de réseaux ouverts Λ défini par*

$$\Lambda = \{L \otimes_R K \ / \ L \in \Lambda_U, K \in \Lambda_V\}.$$

Démonstration. Pour tout $a \in K^\times$ et pour tout $L \otimes_R K \in \Lambda$, il existe $L' \in \Lambda_U$ tel que $L' \subset aL$ et donc $L' \otimes_R K \subset aL \otimes_R K$. Pour tout $L \otimes_R K, L' \otimes_R K' \in \Lambda$, il existe $L'' \in \Lambda_U$ tel que $L'' \subset L \cap L'$ et $K'' \in \Lambda_V$ tel que $K'' \subset K \cap K'$, et ainsi $L'' \otimes_R K'' \subset (L \otimes_R K) \cap (L' \otimes_R K')$. Donc Λ est bien une famille de réseaux munissant $U \otimes_K V$ d'une structure d'espace localement convexe. □

Définition 2.1.6. *Soit U une K-algèbre localement convexe. Soient M un U-module à droite localement convexe et N un U-module à gauche localement convexe. La topologie localement convexe sur $M \otimes_U N$ est la topologie la plus fine rendant l'application $M \otimes_R N \to M \otimes_U N$ continue.*

Proposition 2.1.7. *Soit U un espace localement convexe défini par une famille de semi-normes $(q_i)_{i\in I}$. L'adhérence de $\{0\}$ est égale à*

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{i\in I} q_i^{-1}(\{0\})$$

et U est séparé si et seulement si $\{0\}$ est fermé dans U, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $v \in U$ non nul, il existe $i \in I$ tel que $q_i(v) \neq 0$.

Démonstration. Voir [16], lemme 4.6. □

Définition 2.1.8. *Soit U un espace vectoriel localement convexe défini par une famille*

$(q_i)_{i\in I}$ *de semi-normes.*

- *Un filet est une famille $(v_j)_{j\in J}$ d'éléments de U où J est un ensemble ordonné filtrant.*
- *Un filet $(v_j)_{j\in J}$ converge vers $v \in U$ si pour tout $i \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j \in J$ tel que $q_i(v_k - v) < \varepsilon$ pour tout $k \geq j$.*
- *Un filet de Cauchy est un filet $(v_j)_{j\in J}$ tel que pour tout $i \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j \in J$ tel que $q_i(v_k - v_l) < \varepsilon$ pour tout $k, l \geq j$.*
- *U est un espace localement convexe complet si tout filet de Cauchy converge vers un élément de U.*

Pour résumer, un filet converge si et seulement si il converge pour toutes les semi-normes de U, et un filet est de Cauchy si et seulement si il est de Cauchy pour toutes les semi-normes.

Proposition 2.1.9. *Pour tout K-espace localement convexe U, il existe un espace localement convexe séparé complet $\widehat{U}^h$ ainsi qu'un morphisme $c : U \to \widehat{U}^h$ tel que pour tout morphisme continu $g : U \to W$ dans un espace localement convexe séparé complet W, il existe un unique morphisme continu $\widehat{g}^h : \widehat{U}^h \to W$ tel que $g = \widehat{g}^h \circ c$.*

Démonstration. Voir [16], proposition 7.5. □

L'espace $\widehat{U}^h$ est appelé le complété de Hausdorff de U.

Proposition 2.1.10. *Pour tout espace localement convexe U, le complété de Hausdorff de U est isomorphe à*

$$\widehat{U}^h \simeq \varprojlim_{i\in I} \widehat{U}^{q_i}$$

où $\widehat{U}^{q_i}$ est le complété de U pour sa semi-norme q_i.

Précisons que dans le cas où q_i n'est pas une norme, la notation $\widehat{U}^{q_i}$ correspond au complété de l'espace $U/\{q_i = 0\}$ pour la norme quotient induite par q_i.

Démonstration. Notons pour cette preuve $\widehat{U} = \varprojlim \widehat{U}^{q_i}$, et notons $\widehat{q_i}$ les normes sur $\widehat{U}^{q_i}$ pour tout $i \in I$.

• Soit $v = (v_i)_{i\in I} \in \widehat{U}$, si $\widehat{q_i}(v) = 0$ pour tout $i \in I$, cela signifie que $\widehat{q_i}(v_i) = 0$ donc $v_i = 0$ pour tout $i \in I$, donc $v = 0$. Ainsi par la proposition 2.1.7, l'espace $\widehat{U}$ est séparé.

• Soit $(\widehat{v}_j)_{j\in J}$ un filet de Cauchy de $\widehat{U}$, où pour tout $j \in J$, $\widehat{v}_j = (u_{i,j})_{i\in I}$. Pour tout $i \in I$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $j \in J$ tel que $\widehat{q_i}(u_{i,k} - u_{i,l}) < \varepsilon$ pour tout $k, l \geq j$. Alors le filet

$(u_{i,j})_{j\in J}$ est de Cauchy dans le Banach $\widehat{U}^{q_i}$, et converge donc vers un élément $u_i \in \widehat{U}^{q_i}$. Le filet $(\widehat{v}_j)_{j\in J}$ converge alors vers l'élément $(u_i)_{i\in I} \in \widehat{U}$ et $\widehat{U}$ est complet.

• On dispose du morphisme dense entre espaces localement convexes suivant

$$c : U = \varprojlim (U, q_i) \longrightarrow \varprojlim (\widehat{U}^{q_i}, \widehat{q}_i) = \widehat{U}$$

de noyau $\overline{\{0\}}$. En notant $\overline{U} = U/\overline{\{0\}}$ le séparé de U, on obtient un morphisme injectif $\overline{c} : \overline{U} \to \widehat{U}$ et $\overline{U}$ est isomorphe à un sous-espace localement convexe dense de $\widehat{U}$.

Soient W un espace localement convexe séparé complet et $g : U \to W$ un morphisme continu. W étant séparé, l'image de $\overline{\{0\}}$ est nulle et par passage au quotient on a un morphisme continu $\overline{g} : \overline{U} \to W$. Par le lemme 7.3 de [16], comme $\overline{U}$ est dense dans U, il existe une application $\widehat{g} : \widehat{U} \to W$ tel que $\overline{g} = \widehat{g} \circ \overline{c}$. Donc $g = \widehat{g} \circ c$ et $\widehat{U}$ est bien le complété de Hausdorff de U. □

Proposition 2.1.11. *Un K-espace localement convexe séparé U est métrisable si et seulement si sa topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Voir [16], proposition 8.1, où la métrique utilisée est explicitement définie dans le cas où la topologie de U est défini par une famille dénombrable de semi-normes. □

Dans ce cas, on pourra toujours supposer la suite de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante quitte à considérer les semi-normes

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad q'_k = \max_{i\leq k} q_i$$

qui munissent U de la même topologie que les $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Précisons que U est complet au sens des espaces localement convexe si et seulement si il est complet au sens des espaces métrisables.

Définition 2.1.12. *Un K-espace de Fréchet est un K-espace localement convexe U qui est métrisable et complet. C'est de plus une K-algèbre de Fréchet si U est une K-algèbre dont la multiplication est continue.*

En résumé, pour une K-algèbre de Fréchet U, il existe une suite croissante de semi-normes d'algèbres $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sur U tel que

$$U \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \widehat{U}^{q_k}.$$

Pour l'étude des algèbres de Fréchet-Stein, on se réfèrera principalement à [17].

Définition 2.1.13. *Une K-algèbre de Fréchet U est une algèbre de Fréchet-Stein à gauche (resp. à droite) s'il existe une suite croissante de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'algèbres définissant la topologie de U tel que $\widehat{U}^{q_k}$ est noethérien et est un $\widehat{U}^{q_{k+1}}$-module plat à droite (resp. à gauche).*

On emploiera la notion d'algèbre de Fréchet-Stein bilatère pour les algèbres de Fréchet-Stein simultanément à gauche et à droite.

Proposition 2.1.14. *Une K-algèbre topologique U est une K-algèbre de Fréchet-Stein si et seulement si il existe une suite de K-algèbres de Banach noethériennes $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi qu'un morphisme continu d'algèbres $\rho_k : U_{k+1} \to U_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que U_k est un U_{k+1}-module plat à droite, l'image de U_{k+1} est dense dans U_k, et*

$$U \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} U_k.$$

Démonstration. Si U est une K-algèbre de Fréchet-Stein, alors en posant $U_k = \widehat{U}^{q_k}$, la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie toutes les conditions de la proposition.
Réciproquement, supposons qu'il existe une telle suite de K-Banach $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors U est localement convexe en tant que limite projective d'espaces normés, et notons $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de semi-normes sur U issue de cette limite projective. Par densité des applications ρ_k, on en déduit que $p_k : U \to U_k$ est dense pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $x \in U$, on a $p_k(x) = 0$ si et seulement si $q_k(x) = 0$, donc $Ker(p_k) = \{x \in U,\ q_k(x) = 0\}$. Par passage au quotient, on a l'injection dense

$$\overline{p_k} : U\big/\{q_k = 0\} \longrightarrow U_k$$

et U_k étant complet, on en conclut que $\widehat{U}^{q_k} \simeq U_k$. Ainsi U est complet et donc de Fréchet, et c'est bien une K-algèbre de Fréchet-Stein car $\widehat{U}^{q_k}$ vérifie toutes les propriétés souhaitées. □

Rappelons l'algèbre des opérateurs différentiels vu en définition 1.1.11, qui sera notre premier exemple d'une telle algèbre.

Théorème 2.1.15. *Soit A une algèbre affinoïde lisse. L'espace $\widehat{D}_A$ est muni d'une topologie localement convexe par*

$$\widehat{D}_A = \varprojlim D_k$$

et est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère.

Démonstration. $\widehat{D}_A$ est bien un espace localement convexe par la proposition 2.1.4 car il est limite projective des espaces normés $(D_k, |\cdot|_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
C'est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère par [2], section 6.4. □

2.2 Modules coadmissibles

Soit U une K-algèbre de Fréchet-Stein. On choisit une suite croissante de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de U qui définit sa topologie, et on note $U_k = \widehat{U}^{q_k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, tel que

$$U \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} U_k.$$

Définition 2.2.1. *Un U-module M est coadmissible s'il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de U_k-modules de type fini et des isomorphismes $U_k \otimes_{U_{k+1}} M_{k+1} \simeq M_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tels que*

$$M \simeq \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} M_k.$$

On constate déjà que U et tout module libre de type fini sur U sont coadmissibles.

Proposition 2.2.2. *Soit M un U-module coadmissible. En reprenant les notations ci-dessus, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'isomorphisme*

$$U_k \otimes_U M \simeq M_k.$$

Démonstration. Voir [17], corollaire 3.1. □

En particulier pour tout $k \in \mathbb{N}$, le U_k-module $U_k \otimes_U M$ est de type fini.

Nous pouvons citer quelques critères de coadmissibilité.

Proposition 2.2.3. *Tout U-module de présentation finie est coadmissible.*

Démonstration. Voir [17], corollaire 3.4. □

Proposition 2.2.4. *Soient V une K-algèbre de Fréchet-Stein et $U \to V$ un morphisme d'algèbres de Fréchet continu tel que V est un U-module coadmissible. Soit M un V-module. Alors M est V-coadmissible si et seulement si il est U-coadmissible.*

Démonstration. Voir [17], lemme 3.8. □

On déduit de cette propriété que la définition de coadmissibilité ne dépend pas du choix de la suite de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

On conclut avec quelques notions issues de l'article [2] d'Ardakov et de Wadsley.

Définition 2.2.5. *Soit M un U-module. On dit qu'un U-module coadmissible $\widehat{M}$ est le complété coadmissible de M si il existe un morphisme $i : M \to \widehat{M}$ tel que la propriété universelle suivante est vérifiée : pour tout U-module coadmissible N et morphisme $j : M \to N$, il existe un unique morphisme $\varphi : \widehat{M} \to N$ tel que $\varphi \circ i = j$.*

Lorsque le complété coadmissible existe, il est unique à isomorphisme près. On peut montrer qu'il existe et l'expliciter dans certains cas comme dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.6. *Soit M un U-module. Si $M_k = U_k \otimes_U M$ est un U_k-module de type fini pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors le complété coadmissible de M existe et est donné par*

$$\widehat{M} \simeq \varprojlim (U_k \otimes_U M) = \varprojlim M_k$$

où la structure de U-module coadmissible de $\widehat{M}$ est donnée par les $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Voir [2], proposition section 7.1. □

Définition 2.2.7. *Soit V une K-algèbre de Fréchet-Stein. Un K-espace de Fréchet M est un (U,V)-bimodule U-coadmissible si c'est un (U,V)-bimodule tel que M est coadmissible en tant que U-module et tel que le morphisme d'espaces de Fréchet $V^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_U(M)$ est continu.*

On précise que l'algèbre $\mathrm{End}_U(M)$ des endomorphismes de U-modules de M est une K-algèbre de Fréchet par

$$\mathrm{End}_U(M) \simeq \varprojlim \mathrm{End}_{U_k}(U_k \otimes_U M) = \varprojlim \mathrm{End}_{U_k}(M_k)$$

d'après le lemme 7.2 de [2].

Proposition 2.2.8. *Soit V une K-algèbre de Fréchet-Stein. Soient M un (U,V)-bimodule U-coadmissible et N un V-module coadmissible. Il existe un U-module coadmissible $M\widehat{\otimes}_V N$ qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout U-module coadmissible P et pour toute application U-linéaire V-balancée $M \times N \to P$, il existe un unique morphisme de*

U-modules $M\widehat{\otimes}_V N \to P$ tel que le diagramme commute

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r] \arrow[dr] & M\widehat{\otimes}_V N \arrow[d] \\ & P \end{tikzcd}$$

Et $M\widehat{\otimes}_V N$ est le complété coadmissible du produit tensoriel $M \otimes_V N$.

Démonstration. Le complété coadmissible de $M \otimes_V N$ est bien défini. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par continuité de l'application $V^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_U(M)$, il existe $i \in \mathbb{N}$ et un morphisme $V_i^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_{U_k}(M_k)$. Donc M_k est un (U_k, V_i)-bimodule et on a

$$M_k \otimes_V N \simeq M_k \otimes_{V_i} (V_i \otimes_V N)$$

où $V_i \otimes_V N$ est de type fini sur V_i par V-coadmissibilité de N, et M_k est de type fini sur U_k par U-coadmissibilité de M. On en conclut ainsi que le U_k-module $M_k \otimes_V N$ est de type fini pour tout $k \in \mathbb{N}$ et par la proposition 2.2.6 le complété coadmissible voulu existe bien. La propriété universelle du produit tensoriel coadmissible correspond alors à celle du complété coadmissible. □

Proposition 2.2.9. *Soit V une K-algèbre de Fréchet-Stein. Pour tout (U, V)-bimodule U-coadmissible M et pour tout V-module coadmissible N, on a*

$$M\widehat{\otimes}_V N \simeq M\widehat{\otimes}^h_V N.$$

Démonstration. Voir [6], corollaire A.6. □

2.3 Espaces bornologiques

Des liens existent entre les espaces vectoriels bornologiques et les espaces vectoriels localement convexes, ce qui nous permettra d'utiliser des propriétés inhérentes à ces espaces pour amener à des résultats sur les algèbres de Fréchet-Stein.

Pour l'étude des espaces bornologiques, nous pourrons nous référer à l'ouvrage [13] de Prosmans et Schneider qui traite ces notions pour le cas des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, mais on citera surtout l'article [3] de Bambozzi qui les étudie dans le cadre non-archimédien.

Définition 2.3.1. *Un ensemble E est un espace bornologique s'il est muni d'un ensemble de parties $\mathcal{B}_E$ de E tel que*

- *si $B \in \mathcal{B}_E$ et $B' \subset B$ alors $B' \in \mathcal{B}_E$.*
- *$\mathcal{B}_E$ contient les singletons.*
- *$\mathcal{B}_E$ est stable par unions finies.*

L'ensemble $\mathcal{B}_E$ est appelé une bornologie sur E et ses éléments sont appelés les bornés.

Les premiers exemples qu'on puisse avoir d'espaces bornologiques sont les espaces normés ou semi-normés, pour lesquels les bornés sont naturellement les ensembles bornés pour la norme ou la semi-norme de l'espace.

Définition 2.3.2. *Soient E et F des espaces bornologiques et $g : E \to F$ une application. On dit que g est bornée si l'image de tout borné de E est un borné de F.*

Définition 2.3.3. *Un K-espace vectoriel E est un K-espace vectoriel bornologique si les applications $(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda.x \in E$ et $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ sont bornées.*

Définition 2.3.4. *Soit E un K-espace vectoriel bornologique. Un borné $B \in \mathcal{B}_E$ est absolument convexe si c'est un R-module. On note $\tilde{\mathcal{B}}_E$ l'ensemble des bornés absolument convexes de E.*

Définition 2.3.5. *Un K-espace vectoriel bornologique E est de type convexe si pour tout $B \in \mathcal{B}_E$, il existe $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ tel que $B \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n$. On dit alors que la bornologie $\mathcal{B}_E$ a pour base $\tilde{\mathcal{B}}_E$.*

On note $\mathcal{B}or_K$ la catégorie des K-espaces bornologiques de type convexe, munie des applications K-linéaires bornées.

Remarque. *Tout espace localement convexe U, de famille de semi-normes $(q_i)_{i \in I}$, est muni d'une structure de K-espace bornologique de type convexe où les bornés sont les sous-ensembles B de U tel que pour tout $i \in I$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $q_i(B) \leq \lambda_i$, c'est-à-dire les sous-ensembles de U bornés pour toutes les semi-normes de U.*

Nous pouvons donc considérer les espaces localement convexes, et donc les algèbres de Fréchet-Stein, comme des espaces bornologiques si nécessaire.

Remarque. *Soient E et F des K-espaces bornologiques de type convexe. Alors $E \oplus F$ et $E \times F$ sont des K-espaces bornologiques de type convexe dont les bornés sont respectivement les sous-ensembles des sommes directes ou des produits directs de bornés de E et de F.*

Plus généralement, toute somme directe ou produit direct de K-espaces bornologique de type convexe est un K-espace bornologique de type convexe dont les bornés sont respectivement les sous-ensembles des sommes directes ou des produits directs de bornés.

Remarque. *Soient* $E, F \in \mathcal{B}or_K$. *Alors* $E \otimes_K F \in \mathcal{B}or_K$ *dont les bornés sont les sous-ensembles des produits tensoriels sur* R *de bornés absolument convexes de* E *et de* F. *Autrement dit,* $B \in \mathcal{B}_{E\otimes F}$ *si et seulement si il existe* $B_E \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ *et* $B_F \in \tilde{\mathcal{B}}_F$ *tel que* $B \subset B_E \otimes_R B_F$.

Proposition 2.3.6. *Soient* $E \in \mathcal{B}or_K$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors*

• *F est muni d'une bornologie restreinte $\mathcal{B}_F$ tel que $F \in \mathcal{B}or$, qui est la bornologie la plus fine rendant bornée l'inclusion $i : F \to E$.*

• *E/F est muni d'une bornologie quotient $\mathcal{B}_{E/F}$ tel que $E/F \in \mathcal{B}or_K$, qui est la bornologie la plus grossière rendant bornée la projection $\pi : E \to E/F$*

Démonstration.

• Cela signifie que $B \in \mathcal{B}_F$ si et seulement si $B \subset F$ et $B \in \mathcal{B}_E$. De cette façon F est muni d'une structure de K-espace vectoriel de type convexe.

• Cela signifie que $B \in \mathcal{B}_{E/F}$ si et seulement si il existe $C \in \mathcal{B}_E$ tel que $\pi(C) = B$. De cette façon E/F est muni d'une structure de K-espace vectoriel de type convexe. □

Définition 2.3.7. *Une catégorie est dite pré-abélienne si c'est une catégorie additive et que tous les morphismes de cette catégorie admettent un noyau et un conoyau. Dans une telle catégorie, on dit qu'un foncteur F est exact à gauche (resp. à droite) s'il est additif et préserve les noyaux (resp. les conoyaux), c'est-à-dire pour tout $g : C \to C'$*

$$Ker(F(g)) = F(Ker(g)) \quad (\textit{resp. } Coker(F(g)) = F(Coker(g))).$$

Proposition 2.3.8. *La catégorie $\mathcal{B}or_K$ est pré-abélienne. Dans cette catégorie, pour une morphisme borné $g : E \to F$*

— *Le noyau de g est $Ker(g) = g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{B}or_K$ muni de la bornologie restreinte.*

— *L'image de g est $Im(g) = g(E) \in \mathcal{B}or_K$ muni de la bornologie restreinte.*

— *Le conoyau de g est $Coker(g) = F/Im(g) \in \mathcal{B}or_K$ muni de la bornologie quotient.*

Remarquons que d'après la remarque suivant la définition 2.1.1 dans [4], la catégorie des espaces vectoriels bornologiques est même quasi-abélienne, et c'est aussi le cas de la catégorie $\mathcal{B}or_K$. Nous ne nous servirons pas de ce résultat.

Remarque. *La catégorie $\mathcal{B}or_K$ contient les limites projectives et les limites inductives. En effet, la limite projective est construite à partir de noyaux et de produits directs et la limite inductive est construite à partir de conoyaux et de sommes directes.*

Définition 2.3.9. *Soit $E \in \mathcal{B}or_K$. Pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$, on note $B_K = B \otimes_R K$ et on* *appelle semi-norme jauge de B la semi-norme q_B définie sur B_K par*

$$\forall x \in B_K, \quad q_B(x) = \inf_{r \in K} \{|r| \ / \ x \in rB\}.$$

Avec de telles notations, on remarque que la boule unité de B_K pour sa semi-norme q_B est le R-module B.

En effet si $x \in B$, alors $q_B(x) \leq 1$. Réciproquement, comme la norme sur K est issue d'une valuation discrète, l'image de K^* par cette norme est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$. Ainsi, si $x \neq 0$ et $q_B(x) \leq 1$, l'ensemble $\{|r| \ / \ x \in rB\}$ est discret. Sa borne inférieure est donc un minimum et il existe $r \in K$ tel que $x \in rB$ et $q_B(x) = r \leq 1$. Ainsi $x \in B$.

Remarque. *Soit $E \in \mathcal{B}or_K$. Alors*

$$E \simeq \varinjlim_{B \in \tilde{\mathcal{B}}_E} B_K$$

où la limite inductive est considérée dans la catégorie $\mathcal{B}or_K$.

Définition 2.3.10. *Un K-espace bornologique de type convexe E est complet si pour tout borné de E, il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ le contenant tel que l'espace (B_K, q_B) est un Banach.*

On note $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ la catégorie des K-espaces bornologiques complets.

Définition 2.3.11. *Soient E un K-espace bornologique et $x \in E$. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers x s'il existe $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ contenant x et les x_n à partir d'un certain rang, tel que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans B_K pour sa jauge.*
Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est fermé dans E si toute suite convergente d'éléments de F converge dans F. L'adhérence $\overline{F}$ de F est définie comme le plus petit fermé contenant F.

Proposition 2.3.12. *Soient E un K-espace bornologique complet et F un sous-K-espace vectoriel fermé de E. Alors F et E/F sont des K-espaces bornologiques complets.*

La preuve repose sur le fait que c'est le cas pour les espaces de Banach, et se trouve dans [13], prop. 5.3.

Proposition 2.3.13. *La catégorie $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ est pré-abélienne. Dans cette catégorie, pour un morphisme borné $g : E \to F$*

- *Le noyau de g est $Ker(g) = g^{-1}(\{0\}) \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*
- *L'image de g est $Im(g) = \overline{g(E)} \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*
- *Le conoyau de g est $Coker(g) = F/Im(g) \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*

De plus la catégorie $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ contient les limites projectives et les limites inductives.

Démonstration. C'est une catégorie quasi-abélienne par le lemme 3.46 de [5], donc elle est entre autre pré-abélienne. Par le même lemme, elle contient les limites projectives et inductives. □

Définition 2.3.14. *Soit E un K-espace bornologique. On note $\widehat{E}^b$ le complété bornologique de E donné par*

$$\widehat{E}^b = \varinjlim_{B \in \tilde{\mathcal{B}}_E} \widehat{B_K}^{q_B}$$

où la limite inductive est prise dans $\mathcal{B}or_K$.

Le complété bornologique s'accompagne d'un morphisme borné $E \to \widehat{E}^b$, obtenu par les applications $B_K \to \widehat{B_K}^{q_B}$ pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$ puis par passage à la limite inductive. Évidemment, le complété bornologique d'un espace bornologique complet est lui-même.

Proposition 2.3.15. *Soit E un espace bornologique. Le complété bornologique $\widehat{E}^b$ vérifie la propriété universelle suivante : pour tout espace bornologique complet F et morphisme borné $E \to F$, il existe un morphisme borné $\widehat{E}^b \to F$ tel que*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & F \\ \widehat{E}^b \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $g : E \to F$. Pour tout borné $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$, il existe $B' \in \tilde{\mathcal{B}}_F$ tel que $g(B) \subset B'$. Comme F est bornologiquement complet, on peut supposer que B'_K est un Banach. Alors $g(B_K) \subset B'_K$, et par propriété universelle on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B_K \arrow[r] \arrow[d] & B'_K \\ \widehat{B_K}^{q_B} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Enfin par passage à la limite inductive on a le diagramme commutatif voulu. □

Proposition 2.3.16. *La complétion bornologique forme un foncteur $\widehat{\cdot}^b : \mathcal{B}or_K \to \widehat{\mathcal{B}or}_K$.*

Démonstration.

- Pour tout $E \in \mathcal{B}or_K$, le complété $\widehat{E}^b \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$. En effet, pour tout $B \in \tilde{\mathcal{B}}_E$, l'espace

$\widehat{B_K}^{q_B}$ est un Banach donc complet bornologiquement. Puisque $\widehat{\mathcal{B}or}_K$ contient les limites inductives, alors $\widehat{E}^b \in \widehat{\mathcal{B}or}_K$.

• Pour tout morphisme borné $g : E \to F$, on a un morphisme borné $E \to \widehat{F}^b$ et par propriété universelle du complété on a $\widehat{g}^b : \widehat{E}^b \to \widehat{F}^b$ tel que

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{E}^b & \xrightarrow{\widehat{g}^b} & \widehat{F}^b. \end{array}$$

□

Proposition 2.3.17. *Le foncteur de la complétion bornologique* $\widehat{\cdot}^b$ *est adjoint à gauche du foncteur inclusion* $I : \widehat{\mathcal{B}or}_K \longrightarrow \mathcal{B}or_K$.

Démonstration. Voir dans [5] la discussion faite après la définition 3.44. □

Définition 2.3.18. *Une K-algèbre bornologique E est un K-espace bornologique muni d'une structure de K-algèbre tel que l'application $E \otimes_K E \to E$ est bornée.*
Un E-module bornologique M sur une K-algèbre bornologique E est un K-espace bornologique muni d'une structure de E-module tel que l'application $E \otimes_K M \to M$ est bornée.

On note $\mathcal{B}or_K(E)$ la catégorie des E-modules bornologiques, et on note $\widehat{\mathcal{B}or}_K(E)$ la catégorie des E-modules bornologiques complets (si E est complète).

Proposition 2.3.19. *Il existe également un foncteur* $\widehat{\cdot}^b$ *de la complétion bornologique pour les modules bornologiques.*

$$\widehat{\cdot}^b : \mathcal{B}or_K(E) \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b).$$

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{B}or_K(E)$. En complétant l'application $E \otimes_K M \to M$ on obtient les applications bornées $\widehat{E}^b \otimes_K \widehat{M}^b \to \widehat{E}^b \widehat{\otimes}^b_K \widehat{M}^b \to \widehat{M}^b$ et $\widehat{M}^b \in \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)$. □

Remarque. *La proposition 2.3.17 se généralise au foncteur de la complétion bornologique des modules bornologiques. C'est-à-dire, soit E une K-algèbre bornologique, alors le foncteur* $\widehat{\cdot}^b$ *est adjoint à gauche du foncteur inclusion* $I : \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b) \longrightarrow \mathcal{B}or_K(E)$.

Proposition 2.3.20. *Le foncteur* $\widehat{\cdot}^b : \mathcal{B}or_K(E) \longrightarrow \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)$ *est exact à droite.*

Démonstration. Soit $g : M' \to M$ un morphisme de E-modules bornologiques. Considérons le conoyau de g muni de son morphisme associé $q : M \to Coker(g)$. Pour tout

$X \in \widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)$, on a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}or_K(E)}(Coker(g), I(X)) \xrightarrow{-\circ q} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}or_K(E)}(M, I(X)) \xrightarrow{-\circ g} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}or_K(E)}(M', I(X)).$$

Il s'agit d'une suite exacte car

- Puisque q est un épimorphisme alors $- \circ q$ est injectif.
- Puisque $q \circ g = 0$ alors $Im(- \circ q) \subset Ker(- \circ g)$.
- Soit $u \in Ker(- \circ g)$, c'est-à-dire $u \circ g = 0$. Alors par propriété universelle du conoyau il existe $v : Coker(g) \to I(X)$ tel que $u = v \circ q \in Im(- \circ q)$ comme montré sur le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "g"] & M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"] & I(X) \\ & Coker(g) \arrow[ur, "v"] & \end{tikzcd}$$

On obtient donc la suite exacte suivante par l'adjonction des foncteurs $\widehat{\cdot}^b$ et I

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{Coker(g)}^b, X) \xrightarrow{-\circ \widehat{q}^b} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{M}^b, X) \xrightarrow{-\circ \widehat{g}^b} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{M'}^b, X)$$

et ainsi

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(\widehat{Coker(g)}^b, X) \xrightarrow[-\circ \widehat{q}^b]{\simeq} Ker(- \circ \widehat{g}^b).$$

Par les mêmes raisonnements sur le conoyau de l'application $\widehat{g}^b$ et son application associée $p : \widehat{M} \to Coker(\widehat{g}^b)$, on obtient que

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{B}or}_K(\widehat{E}^b)}(Coker(\widehat{g}^b), X) \xrightarrow[-\circ p]{\simeq} Ker(- \circ \widehat{g}^b).$$

Ainsi pour $X = Coker(\widehat{g}^b)$ on en conclut qu'il existe $u : \widehat{Coker(g)}^b \to Coker(\widehat{g}^b)$ tel que $id \circ p = u \circ \widehat{q}$. De même pour $X = \widehat{Coker(g)}^b$, il existe $v : Coker(\widehat{g}^b) \longrightarrow \widehat{Coker(g)}^b$ tel que $id \circ \widehat{q}^b = v \circ p$. Pour conclure,

$$u \circ v \circ p = u \circ \widehat{q}^b = p$$

et puisque p est un épimorphisme alors $u \circ v = id$ sur $\widehat{Coker(g)}^b$. De même

$$v \circ u \circ \widehat{q}^b = v \circ p = \widehat{q}^b$$

qui nous donne $v \circ u = id$ sur $Coker(\widehat{g}^b)$. Finalement,

$$Coker(\widehat{g}^b) \simeq \widehat{Coker(g)}^b$$

et le foncteur $\widehat{\cdot}^b$ est exact à droite. $\square$

De manière générale dans les catégories pré-abéliennes, tout foncteur adjoint à gauche est exact à droite.

Proposition 2.3.21. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ un système inductif d'espaces bornologiques et notons E leur limite inductive dans $\mathcal{B}or$. Alors*

$$\widehat{E}^b \simeq \varinjlim_{i\in I} \widehat{E_i}^b$$

où la limite inductive est prise dans $\widehat{\mathcal{B}or}_K$.

Démonstration. Pour tout $i \in I$, il existe des applications bornées $c_i : E_i \to \widehat{E}_i^b$, et par passage à la limite inductive on obtient une application bornée $c : E \to \varinjlim \widehat{E}_i^b$.

Soient F un espace bornologique complet et $g : E \to F$ une application bornée. Il existe pour tout $i \in I$ une application bornée $g_i : E_i \to F$ qui est la composition des application $E_i \to E$ et de g. Par passage au complété bornologique, pour tout $i \in I$ il existe $\widehat{g}_i : \widehat{E_i}^b \to F$. Par propriété universelle de la limite inductive il existe une application bornée $\widehat{g} : \varinjlim \widehat{E_i}^b \to F$ tel que

$$\begin{tikzcd}
E_i \arrow[rrrr, "c_i"] \arrow[dd] \arrow[dr] & & & & \widehat{E}_i^b \arrow[dd] \arrow[dl] \\
& E \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend left, "c"] & F & \varinjlim \widehat{E}_i^b \arrow[l, "\widehat{g}"] & \\
E_{i+1} \arrow[ur] \arrow[rrrr, "c_{i+1}"'] & & & & \widehat{E}_{i+1}^b \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Ainsi, comme $\varinjlim \widehat{E_i}$ est complet en tant que limite inductive dans $\widehat{\mathcal{B}or}_K$, il s'agit du complété bornologique de E. $\square$

Définition 2.3.22. *Soit E une K-algèbre bornologique de type convexe. Soient M un E-module à droite bornologique de type convexe, et N un E-module à gauche bornologique de* *type convexe. On munit $M \otimes_E N$ de la bornologie dont les bornés sont les sous-ensembles des images des bornés de $M \otimes_K N$ par le morphisme $M \otimes_K N \to M \otimes_E N$.*

Autrement dit, c'est la bornologie la moins fine rendant le morphisme $M \otimes_K N \to M \otimes_E N$ borné.

2.4 Nucléarité et pseudo-nucléarité

Soit A une K-algèbre de Banach noethérienne, dont la boule unité $\mathcal{A}$ est une R-algèbre noethérienne.

Définition 2.4.1. *Un A-module M est dit Banach contractant si c'est un Banach et que sa boule unité M° est $\mathcal{A}$-stable.*

Définition 2.4.2. *Soient M, N des A-modules Banach contractants et $f : M \to N$ un morphisme de A-modules continu. f est strictement complètement continue (scc) si il existe une suite de morphismes de A-modules continus $f_i : M \to N$ convergeant uniformément vers f tel que $f_i(M^\circ)$ est de type fini sur $\mathcal{A}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Définition 2.4.3. *Soit M un A-module de Fréchet. M est dit A-nucléaire si M possède une décomposition de Fréchet $M \simeq \varprojlim M_n$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

- *M_n est Banach contractant.*
- *L'image de M est dense dans M_n.*
- *Il existe un A-module Banach contractant F_n est une surjection stricte $F_n \to M_n$ tel que la composition $F_n \to M_n \to M_{n-1}$ est scc.*

Proposition 2.4.4. *Soit U une K-algèbre de Fréchet-Stein A-nucléaire. Alors tout U-module coadmissible est également A-nucléaire.*

Démonstration. En reprenant les notations de la section 2.2, par A-nucléarité de U pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe F_n un A-module Banach contractant tel que $F_n \to U_n \to U_{n-1}$ est scc. Notons $M \simeq \varprojlim M_k$, avec M_k un U_k-module de type fini. Alors il existe $r_n \in \mathbb{N}$ et une surjection $U_n^{r_n} \to M_n$, et la suite $F_n^{r_n} \to U_n^{r_n} \to M_n \to M_{n-1}$ est scc. Comme U_n est Banach contractant et que M_n est un U_n-module de type fini, alors M_n est aussi Banach contractant. Enfin, comme $U_n \otimes_U M \simeq M_n$, alors M est dense dans M_n. Donc M est également A-nucléaire. □

Définition 2.4.5. *Soit U un K-espace vectoriel topologique localement convexe et métrisable, limite projective d'une suite d'espaces semi-normés $(U_k, q_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $\rho_k : U_{k+1} \to U_k$ et $p_k : U \to U_k$.*

Alors U est pseudo-nucléaire si pour tout sous-ensemble borné $B \subset U_{k+1}$ et pour tout R-sous-module ouvert $V \subset U_k$, il existe un sous-ensemble borné $B' \subset U$ tel que

$$\rho_k(B) \subset V + p_k(B').$$

Proposition 2.4.6. *Soit U un K-espace localement convexe métrisable. Pour que U soit pseudo-nucléaire, il suffit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, il existe $B' \subset U$ borné tel que*

$$\rho_k(\mathcal{B}_{k+1}(1)) \subset \pi^j \mathcal{B}_k(1) + p_k(B')$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathcal{B}_k(1)$ la boule de rayon 1 dans U_k pour sa semi-norme.

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$, et $B \subset U_{k+1}$ borné. Il existe $d \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B \subset \mathcal{B}_{k+1}(d)$, et il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{B}_{k+1}(d) \subset \pi^i \mathcal{B}_{k+1}(1)$. Soit V un R-sous-module ouvert de U_k, il existe alors $d' \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathcal{B}_k(d') \subset V$, et $i' \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{B}_k(d') \supset \pi^{i'} \mathcal{B}_k(1)$. Si la condition de la proposition est vérifiée, alors il existe $B' \subset U$ borné tel que

$$\rho_k(\mathcal{B}_{k+1}(1)) \subset \pi^{i'-i} \mathcal{B}_k(1) + p_k(B').$$

Or, puisque $\rho_k(B) \subset \rho_k(\pi^i \mathcal{B}_{k+1}(1))$ et que $\pi^{i'} \mathcal{B}_k(1) \subset V$, alors

$$\rho_k(B) \subset \pi^i \rho_k(\mathcal{B}_{k+1}(1)) \subset \pi^{i'} \mathcal{B}_k(1) + \pi^i p_k(B') \subset V + p_k(\pi^i B')$$

et U est pseudo-nucléaire. □

Proposition 2.4.7. *Tout espace A-nucléaire est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Voir la remarque après la définition 3.34 dans [7]. □

Théorème 2.4.8. *Soit U un K-espace pseudo-nucléaire. Il existe un isomorphisme d'espaces bornologiques $\widehat{U}^h \simeq \widehat{U}^b$.*

Démonstration. Voir [7], proposition 3.36. □

Chapitre 3

Opérateurs G-équivariants

3.1 Anneau de groupe tordu et trivialisation

Les définitions et propriétés de cette section proviennent de la section 2.2 de l'article d'Ardakov [1] qui se consacre aux trivialisation sur les anneaux de groupe tordu, qui seront des outils qui nous serviront dans la suite.

Définition 3.1.1. *Soit G un groupe agissant sur un anneau S par automorphismes d'anneaux par un morphisme ρ. L'anneau de groupe tordu $S \rtimes G$ (parfois aussi appelé algèbre de groupe tordu) est une S-algèbre définie comme étant le S-module libre de base G muni de la multiplication*

$$\forall s, s' \in S, \ \forall g, g \in G, \ s.g \times s'.g' = s\rho(g)(s').gg'.$$

On pourra remarquer que dans $S \rtimes G$, on a pour tout $s \in S$ et pour tout $g \in G$

$$g.s.g^{-1} = \rho(g)(s).$$

On définit de manière équivalente l'algèbre $S \rtimes G$ comme étant le S-module libre de base G muni d'une multiplication qui vérifie cette relation.

Définition 3.1.2. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu. Une trivialisation de $S \rtimes G$ est un morphisme de groupes $\beta : G \to S^\times$ tel que pour tout $g \in G$, l'action par conjugaison de $\beta(g)$ sur S coïncide avec $\rho(g)$.*

Proposition 3.1.3. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu. Une trivialisation β sur $S \rtimes G$ induit un isomorphisme d'anneaux $\tilde{\beta} : S[G] \to S \rtimes G$ défini par*

$$\forall s \in S, g \in G, \quad \tilde{\beta}(s) = s \quad et \quad \tilde{\beta}(g) = \beta(g)^{-1}g.$$

Démonstration. Voir lemme 2.2.2 dans [1]. □

Définition 3.1.4. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu et N un sous-groupe normal de G. Une trivialisation $\beta : N \to S^\times$ de $S \rtimes N$ est dite G-équivariante si on a*

$$\forall g \in G, h \in N, \quad \beta(ghg^{-1}) = \rho(g)(\beta(h)).$$

On peut voir cette condition comme une extension sur G de la propriété définissant une trivialisation puisqu'on a déjà pour une trvialisation $\beta(h)s\beta(h)^{-1} = \rho(h)(s)$ pour tout $s \in S$ et $h \in N$.

Lemme 3.1.5. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu et N un sous-groupe normal de G. Soit $\beta : N \to S^\times$ une trivialisation G-équivariante de $S \rtimes N$. L'idéal $(S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)$ de $S \rtimes G$ est bilatère.*

Démonstration. Soient $s \in S$, $g \in G$ et $h \in H$. Alors

$$\begin{aligned}(\tilde{\beta}(h) - 1).sg &= (\beta(h)^{-1}h - 1).sg = \beta(h)^{-1}\rho(h)(s).hg - sg \\ &= s\beta(h)^{-1}.hg - sg\end{aligned}$$

car β est une trivialisation. De plus, par G-équivariance de β on a

$$\beta(h)^{-1} = \beta(g.(g^{-1}h^{-1}g).g^{-1}) = \rho(g)\left(\beta(g^{-1}hg)^{-1}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}(\tilde{\beta}(h) - 1).sg &= s\rho(g)\left(\beta(g^{-1}hg)^{-1}\right).gg^{-1}hg - sg \\ &= sg.\left(\beta(g^{-1}hg)^{-1}.g^{-1}hg - 1\right) = sg.(\tilde{\beta}(g^{-1}hg) - 1)\end{aligned}$$

Comme N est normal dans G, l'élément $g^{-1}hg \in N$ et donc $(\tilde{\beta}(h) - 1).sg$ appartient à l'idéal $(S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)$. C'est donc un idéal bilatère. □

Définition 3.1.6. *Soit $S \rtimes G$ un anneau de groupe tordu et N un sous-groupe normal de G. Soit $\beta : N \to S^\times$ une trivialisation G-équivariante de $S \rtimes N$. On définit l'anneau*

$$S \rtimes_N^\beta G := {}^{S \rtimes G}\big/_{(S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)}$$

où $(S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)$ est l'idéal à gauche engendré par les éléments $\tilde{\beta}(h) - 1$ pour $h \in N$.

Par le lemme précédent, comme $(S \rtimes G) \cdot (\tilde{\beta}(N) - 1)$ est bilatère, alors $S \rtimes_N^\beta G$ est bien un anneau.

Lorsque la trivialisation β est claire, on notera simplement cet ensemble $S \rtimes_N G$.

3.2 Action de groupe sur une algèbre affinoïde

Notre but est d'ajouter une action de groupe sur une algèbre affinoïde et de construire une nouvelle algèbre d'opérateurs différentiels dans ce nouveau contexte. Nous regardons déjà comment munir une algèbre affinoïde et ses dérivations d'une action de groupe.

Dans cette section, on note A une K-algèbre affinoïde normée munie d'un système local de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. On note G un groupe topologique compact agissant sur A par un morphisme de groupe continu $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$, dont on précise la topologie ci-dessous.

Notation.

• *On note* $\mathrm{End}_K(A)$ *l'algèbre des endomorphismes de K-algèbres de A, muni de la norme subordonnée à la norme sur A.* $\mathrm{Aut}_K(A) \subset \mathrm{End}_K(A)$ *est son sous-groupe des automorphismes de K-algèbres, muni de la topologie restreinte.*

• *Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. On note* $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ *l'algèbre des endomorphismes de R-algèbres de $\mathcal{A}$, qu'on identifie à la R-sous-algèbre de* $\mathrm{End}_K(A)$ *des endomorphismes qui stabilisent $\mathcal{A}$. De même,* $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$ *est son sous-groupe des automorphismes de R-algèbres, muni de la topologie restreinte.*

Lemme 3.2.1. *Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel de A. En munissant A de la norme jauge de $\mathcal{A}$, la R-sous-algèbre* $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ *de* $\mathrm{End}_K(A)$ *est la boule unité de* $\mathrm{End}_K(A)$ *pour sa norme subordonnée.*

Démonstration. Notons $|\cdot|$ la norme jauge de $\mathcal{A}$ sur A, et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à cette dernière. Soit $\varphi \in \mathrm{End}_K(A)$ tel que $\|\varphi\| \leq 1$, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $|\varphi(a)| \leq |a| \leq 1$ et donc $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Réciproquement soit $\varphi \in \mathrm{End}_K(A)$ stabilisant $\mathcal{A}$. Soit $a \in A \setminus \{0\}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|a| = |p^k|$. Comme $a/p^k \in \mathcal{A}$, on obtient

$$\frac{|\varphi(a)|}{|a|} = \frac{|\varphi(a)|}{|p^k|} = |\varphi(a/p^k)| \leq 1.$$

Donc $\|\varphi\| \leq 1$ et ainsi $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ est la boule unité de $\mathrm{End}_K(A)$. □

Notamment, $\mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ est un ouvert de $\mathrm{End}_K(A)$. De même $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$ est un ouvert de $\mathrm{Aut}_K(A)$. Toutes les normes jauges de modèles formels sur A sont équivalentes, donc ce sont des ouverts peu importe la norme choisie.

Proposition 3.2.2. *Tout modèle formel $\mathcal{A}$ de A est contenu dans un modèle formel G-stable.*

Démonstration. Le morphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$ est continu, donc la préimage de l'ouvert $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Aut}_K(A)$ par ρ est ouverte. Cette préimage est le stabilisateur $\mathrm{Stab}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ dans G, et puisque G est compact et $Stab(\mathcal{A})$ est un sous-groupe ouvert, alors l'indice de $Stab(\mathcal{A})$ dans G est fini. Ainsi, il existe $(x_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ un nombre fini de générateurs à droite de G sur $Stab(\mathcal{A})$ tel que

$$G = \bigsqcup_{i\in[\![1,k]\!]} x_i.Stab(\mathcal{A}).$$

Pour tout $g \in G$, il existe un unique $i \in [\![1,k]\!]$ et $h \in Stab(\mathcal{A})$ tel que $g = x_i h$, et ainsi

$$\rho(g)(\mathcal{A}) = \rho(x_i)(\rho(h)(\mathcal{A})) = \rho(x_i)(\mathcal{A}).$$

En notant $\mathcal{A}_i = \rho(x_i)(\mathcal{A})$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, c'est un modèle formel de A et alors $\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_k$ est G-stable et c'est un modèle formel contenant $\mathcal{A}$ par la proposition 1.1.6. $\square$

Cette proposition nous assure toujours l'existence d'un modèle formel G-stable.

Notation.

• *On note* $\mathrm{End}_K(\Theta_A)$ *l'espace des endomorphismes continus de K-algèbre de Lie de Θ_A, muni d'une norme subordonnée où Θ_A en tant que A-module libre est muni naturellement d'une norme par la norme sur A.*

• $\mathrm{End}_K(U(\Theta_A))$ *est l'ensemble des endomorphismes continus de K-algèbre de $U(\Theta_A)$, muni d'une norme subordonnée où $U(\Theta_A)$ en tant que A-module libre est muni d'une norme par la norme sur A.*

Lemme 3.2.3. *Tout automorphisme $\phi \in \mathrm{End}_K(A)$ se relève de façon unique en un automorphisme de $U(\Theta_A)$ défini par $s \in U(\Theta_A) \mapsto \phi \circ s \circ \phi^{-1}$.*

Démonstration. Notons $\varphi : \theta \in \Theta_A \mapsto \phi \circ \theta \circ \phi^{-1}$.

— Soit $\theta \in \Theta_A$. L'image $\varphi(\theta) \in \Theta_A$ car il s'agit d'une application K-linéaire sur A et que pour tout $a, b \in A$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta)(ab) &= \phi\theta\left(\phi^{-1}(a).\phi^{-1}(b)\right) \\
&= \phi\left(\phi^{-1}(a)\theta(\phi^{-1}(b)) + \theta(\phi^{-1}(a))\phi^{-1}(b)\right) \\
&= a.\phi\theta\phi^{-1}(b) + \phi\theta\phi^{-1}(a).b \\
&= a.\varphi(\theta)(b) + \varphi(\theta)(a).b
\end{aligned}$$

ce qui confirme que $\varphi(\theta)$ est bien une dérivation. Ainsi φ est une application de Θ_A dans Θ_A.

— Soient $\theta, \theta' \in \Theta_A$. L'application φ est K-linéaire et

$$\begin{aligned}
\varphi([\theta,\theta']) &= \phi[\theta,\theta']\phi^{-1} = \phi\theta\theta'\phi^{-1} - \phi\theta'\theta\phi^{-1} \\
&= \phi\theta\phi^{-1}\phi\theta'\phi^{-1} - \phi\theta'\phi^{-1}\phi\theta\phi^{-1} \\
&= \varphi(\theta)\varphi(\theta') - \varphi(\theta')\varphi(\theta) \\
&= [\varphi(\theta), \varphi(\theta')]
\end{aligned}$$

donc φ est un endomorphisme de K-algèbre de Lie de Θ_A. De plus, il est bijectif de réciproque $\varphi^{-1} : \theta \mapsto \phi^{-1} \circ \theta \circ \phi$. Donc φ est un automorphisme de K-espace vectoriel de Θ_A.

Donc tout automorphisme de A se relève en un automorphisme de Θ_A.

Par la définition de l'algèbre enveloppante, il existe $i_A : A \to U(\Theta_A)$ et $i_L : \Theta_A \to U(\Theta_A)$. Posons $j_A = i_A \circ \phi$ et $j_L = i_L \circ \varphi$. En vérifiant que j_A et j_L vérifient les conditions de la propriété universelle de l'algèbre enveloppante en proposition 1.1.9, il existe un unique $\psi : U(\Theta_A) \to U(\Theta_A)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j_A"] & U(\Theta_A) & \Theta_A \arrow[l, "j_L"'] \\
A \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "i_A"'] & U(\Theta_A) \arrow[u, "\psi"] & \Theta_A. \arrow[l, "i_L"] \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

On construit de la même façon ψ^{-1} à partir de ϕ^{-1}, ce qui permet de conclure que $\psi \in \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$. On constate de plus que le morphisme $s \mapsto \phi \circ s \circ \phi^{-1}$ convient. $\square$

Proposition 3.2.4. *Le morphisme de groupes continu $\rho_U : G \to \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ défini par*

$$\forall g \in G,\ \forall s \in U(\Theta_A)\ ,\ \rho_U(g)(s) = \rho(g) \circ s \circ \rho(g)^{-1}$$

munit $U(\Theta_A)$ d'une action de groupe de G. On a de même un morphisme de groupes continu $G \to \mathrm{Aut}_K(\Theta_A)$ qui munit Θ_A d'une action de groupe par G.

Démonstration. Par le lemme précédent, pour tout $g \in G$ on relève l'automorphisme $\rho(g) \in \mathrm{Aut}_K(A)$ en un automorphisme $\rho_U(g) \in \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ tel que défini ci-dessus. De plus, l'application $g \in G \mapsto \rho_U(g)$ est un morphisme de groupes.

De cette façon, en notant $\mathrm{Conj}_U : \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A)) \to \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ la conjugaison sur $\mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$, on constate que $\rho_U = \mathrm{Conj}_U \circ \rho$. C'est donc un morphisme de groupes continu en tant que composition de morphismes de groupes continus. □

Puisque le morphisme ρ_U prolonge $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$, on notera sans perdre de généralité $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(U(\Theta_A))$ l'action de G sur $U(\Theta_A)$.

Remarque. *Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A. De la même façon, on munit $U(\Theta_{\mathcal{A}})$ d'une action de groupe de G.*

De cette façon, $\Theta_{\mathcal{A}}$ est un $\mathcal{A}$-réseau de Lie G-stable. Mais nous aimerions disposer d'un $\mathcal{A}$-réseau de Lie G-stable qui est libre, ce qui n'est pas garanti. On peut tout de même énoncer un résultat s'en approchant par la proposition suivante.

Proposition 3.2.5. *Soient $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A, et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie. Il existe un sous-groupe ouvert H de G tel que $\mathcal{L}$ est H-stable.*

Démonstration. Le morphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(\Theta_A)$ est continu par 3.2.4 donc la préimage de l'ouvert $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{L})$ par ρ, qui est le stabilisateur de $\mathcal{L}$, est ouverte. Donc $\mathcal{L}$ est H-stable avec $H = Stab(\mathcal{L})$ ouvert. □

Par la proposition 1.1.13, quitte à redimensionner le système local de coordonnées, il existe un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre $\mathcal{L}$ de base $(\partial_{x_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$, et par la proposition précédente il existe un sous-groupe ouvert H de G tel que $\mathcal{L}$ est H-stable. A restriction près du groupe G, il existe donc un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre G-stable.

Proposition 3.2.6. *Soient $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre G-stable. En reprenant la notation $D_k = \widehat{U(\pi^k \mathcal{L})}_K$, le morphisme de groupes continu $\widehat{\rho} : G \to \mathrm{Aut}_K(D_k)$ défini par*

$$\forall g \in G,\ \forall s \in D_k\ ,\ \widehat{\rho}(g)(s) = \rho(g) \circ s \circ \rho(g)^{-1}$$

munit D_k d'une action de groupe de G. On dispose de la même façon d'une action de groupe de G sur $\mathcal{D}_k = \widehat{U(\pi^k \mathcal{L})}$.

Démonstration. De la même façon que dans la proposition 3.2.4, on a une action de G sur $U(\pi^k \mathcal{L})$. Donc pour tout $g \in G$ on a un automorphisme de R-algèbres

$$\rho(g) : U(\pi^k \mathcal{L}) \to U(\pi^k \mathcal{L}).$$

En prenant le complété de cette application, on obtient une application $\widehat{\rho(g)} : \mathcal{D}_k \to \mathcal{D}_k$ et on constate alors que $\widehat{\rho}(g) = \widehat{\rho(g)}$ pour tout $g \in G$. $\square$

De même par abus de notation on notera $\rho : G \to D_k$ et $\rho : G \to \mathcal{D}_k$ les morphismes définissant les actions de G sur D_k et $\mathcal{D}_k$.

3.3 Opérateurs G-équivariants sur une algèbre affinoïde

Dans cette section on va définir une généralisation de l'algèbre des opérateurs différentiels sur une algèbre affinoïde lorsqu'un groupe agit dessus. Cette construction est détaillée dans l'article [1] d'Ardakov, sous le nom de "completed skew-group algebra" ou algèbre de groupe tordu complète.

On reprend les notations de la section précédente. Soient A une K-algèbre affinoïde munie d'un système local de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. Soit G un groupe topologique compact agissant sur A par un morphisme de groupe continu $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$. Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel G-stable de A et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie de Θ_A qui est G-stable et libre de base $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$. Enfin, on note $D_k = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}_K$ et $\mathcal{D}_k = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}$.

Nous commençons par introduire des séries particulières de D_k qui sont les séries exponentielles et logarithmes et qui sont étudiées dans le chapitre 6 de [10] (et notamment la proposition 6.22).

Lemme 3.3.1. *La série d'éléments de K*

$$\exp(p^\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^{\varepsilon i}}{i!}$$

converge et $p^{\varepsilon i}/i! \in p^\varepsilon R$ pour tout $i > 0$, où $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } p \neq 2 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

Démonstration. Pour obtenir la convergence de la série, on montre que son terme général tend vers 0, ce qui revient à montrer que la valuation $\nu(p^{\varepsilon i}/i!)$ tend vers ∞. Soit $i \in \mathbb{N}^*$, prenons un encadrement de i : il existe $j \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $kp^j \leq i < (k+1)p^j$.

On montre par récurrence que

$$\nu((kp^j)!) = k\frac{p^j - 1}{p - 1}$$

donc

$$\begin{aligned}
\nu(p^{\varepsilon i}) - \nu(i!) \quad &> \varepsilon k p^j - (k+1)\frac{p^j - 1}{p-1} = \frac{\varepsilon k p^{j+1} - \varepsilon k p^j - (k+1)p^j + k + 1}{p-1} \\
&= \left[p^j\left(\varepsilon k(p-1) - k - 1\right) + k + 1\right]\frac{1}{p-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le terme tend vers l'infini quand i tend vers l'infini si $(\varepsilon k(p-1) - k - 1) > 0$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, donc si $\varepsilon(p-1) > (k+1)/k > 1$. On en conclut que si $p = 2$, alors $\varepsilon = 2$ suffit et si $p \neq 2$ alors $\varepsilon = 1$ suffit.

On constate de plus que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\nu(p^{\varepsilon i}/i!) > \left[p^j\left(\varepsilon k(p-1) - k - 1\right) + k + 1\right]\frac{1}{p-1} > \frac{k+1}{p-1} > 0.$$

Donc si $p = 2$ alors $\nu(p^{\varepsilon i}/i!) > k + 1 \geq 2$ et $p^{\varepsilon i}/i! \in p^2 R$, et si $p > 2$ alors $\nu(p^{\varepsilon i}/i!) > 0$ donc $p^{\varepsilon i}/i! \in pR$. Dans tous les cas $p^{\varepsilon i}/i! \in p^{\varepsilon} R$. $\square$

Proposition 3.3.2. *Soit S une K-algèbre de Banach, et soit $\mathcal{S}$ sa boule unité qui est une R-algèbre. Les séries suivantes sont bien définies*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & p^{\varepsilon}\mathcal{S} & \to & 1 + p^{\varepsilon}\mathcal{S} \\ & s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{s^k}{k!} \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{rccc} \log : & 1 + p^{\varepsilon}\mathcal{S} & \to & p^{\varepsilon}\mathcal{S} \\ & 1 + s & \mapsto & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-s)^k}{k} \end{array}$$

où $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \textit{si } p \neq 2 \\ 2 & \textit{sinon.} \end{cases}$

Démonstration. Soit $s \in \mathcal{S} \subset S$. En notant $\|\cdot\|$ la norme sur S, on a $\|s\| \leq 1$. Par le lemme précédent, les termes de la série

$$\exp(p^{\varepsilon} s) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p^{\varepsilon i}}{i!} s^i$$

convergent vers 0 puisque $\|p^{\varepsilon i} s^i / i!\| \leq |p^{\varepsilon i}/i!|$ qui tend vers 0 quand i tend vers l'infini.

Comme S est complet, la série converge dans S. De plus, le premier terme de la série est 1, et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, par le lemme précédent, $p^{\varepsilon i} s^i / i! \in p^\varepsilon \mathcal{S}$. On en conclut que

$$\| \exp(p^\varepsilon s) - 1 \| = \left\| \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{p^{\varepsilon i}}{i!} s^i \right\| \leq |p^\varepsilon|$$

donc $\exp(p^\varepsilon \varphi) - 1 \in p^\varepsilon \mathcal{S}$ et on a bien défini $\exp : p^\varepsilon \mathcal{S} \to 1 + p^\varepsilon \mathcal{S}$.

Puisque les séries exp et log sont réciproques l'une de l'autre on a également

$$\log : 1 + p^\varepsilon \mathcal{S} \to p^\varepsilon \mathcal{S},$$

ce qui prouve la propriété. □

Corollaire 3.3.3. *Les séries exponentielles sont bien définies sur les espaces suivants :*

$$\begin{array}{rccc} \exp : & p^\varepsilon \mathcal{A} & \to & 1 + p^\varepsilon \mathcal{A} \\ \exp : & p^\varepsilon \operatorname{End}_R(\mathcal{A}) & \to & 1 + p^\varepsilon \operatorname{End}_R(\mathcal{A}) \\ \exp : & p^\varepsilon \mathcal{D}_k & \to & 1 + p^\varepsilon \mathcal{D}_k \end{array}$$

ainsi que les séries logarithmes qui en sont les réciproques.

Démonstration. On applique simplement la proposition précédente avec $S = A$ qui a pour boule unité $\mathcal{S} = \mathcal{A}$. De même, pour $S = \operatorname{End}_K(A)$ et sa norme subordonnée, par le lemme 3.2.1 on obtient que sa boule unité est $\mathcal{S} = \operatorname{End}_R(\mathcal{A})$. Enfin, pour $S = D_k$ et sa norme $|\cdot|_k$, sa boule unité est $\mathcal{S} = \mathcal{D}_k$. □

Proposition 3.3.4. *Soit $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble* $\exp(p^\varepsilon \pi^k \mathcal{L})$ *est un sous-groupe de* $\operatorname{Aut}_R(\mathcal{A})$.

Démonstration. Par le corollaire précédent, comme $\pi^k \mathcal{L} \subset \mathcal{D}_k$, l'image de $p^\varepsilon \pi^k \mathcal{L}$ par l'exponentielle est bien défini et

$$\exp(p^\varepsilon \pi^k \mathcal{L}) \subset 1 + p^\varepsilon \mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_k.$$

Soit $u \in \pi^k \mathcal{L}$. Tout élément de $\mathcal{D}_k$ est également une R-application linéaire sur $\mathcal{A}$, donc $\exp(p^\varepsilon u)$ est une application R-linéaire sur $\mathcal{A}$. C'est également un endomorphisme de

R-algèbre de $\mathcal{A}$ puisque pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ on a

$$\begin{aligned}
\exp(p^\varepsilon u)(a.b) &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p^{\varepsilon i}u^i}{i!}(ab) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p^{\varepsilon i}}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} u^j(a)u^{i-j}(b) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{i} \frac{p^{\varepsilon i}}{i!} \frac{i!}{j!(i-j)!} u^j(a)u^{i-j}(b) = \sum_{l\in\mathbb{N}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{p^{\varepsilon(l+j)}}{j!l!} u^j(a)u^l(b) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{p^{\varepsilon j}}{j!} u^j(a). \sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{p^{\varepsilon l}}{l!} u^l(b) = \exp(p^\varepsilon u)(a). \exp(p^\varepsilon u)(b).
\end{aligned}$$

Enfin, l'application $\exp(p^\varepsilon u) \in \mathrm{End}_R(\mathcal{A})$ est inversible d'inverse $\exp(-p^\varepsilon u) \in \exp(p^\varepsilon \mathcal{L})$ donc $\exp(p^\varepsilon \mathcal{L}) \subset \mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$. Montrons que c'est un groupe, donc stable par composition.

On note $\phi(X,Y) = \log(\exp(X)\exp(Y))$, la série de Campbell-Baker-Hausdorff dont les premiers termes sont

$$\phi(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] + \frac{1}{12}[Y,[Y,X]] + \dots$$

En notant $u_n(X,Y)$ la somme des monômes de degré n dans la série pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a en regroupant les monômes de même degré

$$\phi(X,Y) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(X,Y).$$

D'après le théorème 6.28 de [10], pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme u_n est de la forme

$$u_n(X,Y) = \sum_{\substack{e\in\mathbb{N}^n \\ |e|=n-1}} q_e.(X,Y)_e$$

où les $(X,Y)_e$ sont des compositions de commutateurs en X et Y définis par

$$(X,Y)_e = \Big[.. [[[.. [[[.. [[X, \underbrace{Y], Y], \dots], Y}_{e_1 \text{ fois}}], \underbrace{X], \dots], X}_{e_2 \text{ fois}}], Y] \dots \Big]$$

et où $q_e \in K$ pour tout $e \in \mathbb{N}^n$ avec

$$\lim_{|e|\to\infty} \left| p^{\varepsilon|e|} q_e \right| = 0 \text{ dans } R.$$

Alors pour tout $u, v \in \pi^k\mathcal{L}$ on a $\exp(p^\varepsilon u).\exp(p^\varepsilon v) = \exp(\phi(p^\varepsilon u, p^\varepsilon v))$ et on explicite

$$\phi(p^\varepsilon u, p^\varepsilon v) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p^{2\varepsilon n} u_n(u,v) = p^{2\varepsilon} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{\substack{e\in\mathbb{N}^n \\ |e|=n-1}} p^{2\varepsilon|e|} q_e.(u,v)_e.$$

Puisque $p^{2\varepsilon|e|}q_e \in R$ et que $\pi^k\mathcal{L}$ est une R-algèbre de Lie, il s'agit d'une série dont les termes appartiennent à $\pi^k\mathcal{L}$, et qui convergent vers 0. Or $\pi^k\mathcal{L}$ étant π-adiquement complète, alors $\phi(p^\varepsilon u, p^\varepsilon v) \in p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L}$ et $\exp(p^\varepsilon u).\exp(p^\varepsilon v) \in \exp(p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L})$. Ainsi $\exp(p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L})$ est bien un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$. □

Corollaire 3.3.5. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Le sous-ensemble $G_{\pi^k\mathcal{L}}$ de G défini par*

$$G_{\pi^k\mathcal{L}} := \rho^{-1}(\exp(p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L}))$$

est un sous-groupe normal de G, où $\rho : G \to \mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$ est l'action de groupe de G sur $\mathcal{A}$.

Démonstration. Par la proposition précédente $\exp(p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$ et puisque que $\rho : G \to \mathrm{Aut}_R(\mathcal{A})$ est un morphisme de groupe, alors $G_{\pi^k\mathcal{L}}$ est un sous-groupe de G. Soient $g \in G$ et $u \in \pi^k\mathcal{L}$, comme $g \cdot u \in \pi^k\mathcal{L}$ par G-stabilité de $\pi^k\mathcal{L}$, alors

$$\rho(g)\exp(p^\varepsilon u)\rho(g^{-1}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{p^{\varepsilon i}}{i!}\rho(g)u^i\rho(g^{-1}) = \exp(p^\varepsilon g\cdot u) \in \exp(p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L})$$

donc $G_{\pi^k\mathcal{L}}$ est un sous-groupe normal de G. □

Lemme 3.3.6. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et N un sous-groupe normal de G inclus dans $G_{\pi^k\mathcal{L}}$. L'application $\rho_{|N} : N \to D_k^\times$ est une trivialisation G-équivariante de $D_k \rtimes N$.*

Démonstration. On a $\rho(N) \subset \rho(G_{\pi^k\mathcal{L}}) \subset \exp(p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L}) \subset D_k^\times$. On pose donc la trivialisation $\beta = \rho_{|N}$ qui vérifie bien par définition que pour tout $h \in N$ et $s \in D_k$ on a $\beta(h)s\beta(h^{-1}) = h\cdot s$. Elle est G-équivariante car pour tout $g \in G$ et $h \in H$, on a $\rho(g)(\beta(h)) = \rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1} = \beta(ghg^{-1})$. □

Définition 3.3.7. *Soit $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes ouverts normaux de G tel que*

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} N_k = \{1\} \quad et \quad \forall k\in\mathbb{N},\ N_k \subset G_{\pi^k\mathcal{L}}$$

On pose

$$\widehat{D}(A,G) := \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})_K} \rtimes_{N_k} G$$

où la trivialisation G-équivariante choisie pour chaque N_k est $\beta_k = \rho_{|N_k} : N_k \to D_k^{\times}$.

Une telle suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existe toujours, et dans le cas où l'action de G sur A est fidèle on prend simplement la suite $(G_{\pi^k\mathcal{L}})_{k\in\mathbb{N}}$. En effet, il n'y a que dans ce cas seulement que la suite $(G_{\pi^k\mathcal{L}})_{k\in\mathbb{N}}$ est d'intersection nulle.

La limite projective ci-dessus est bien définie. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a une application $D_{k+1} \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G$, et comme $N_{k+1} \subset N_k$ alors $\tilde{\beta}_{k+1}(N_{k+1}) \subset \tilde{\beta}_k(N_k)$. Par passage au quotient on obtient une application

$$D_{k+1} \rtimes_{N_{k+1}} G \to D_k \rtimes_{N_k} G.$$

Ce qui donne le système projectif $(D_k \rtimes_{N_k} G)_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.3.8. *La définition précédente de $\widehat{D}(A,G)$ ne dépend ni du modèle formel $\mathcal{A}$ choisi, ni du réseau de Lie $\mathcal{L}$, ni de la suite de sous-groupes $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. On a une définition équivalente de $\widehat{D}(A,G)$, énoncée en définition 3.3.1 de [1] et prouvée en lemme 3.3.4

$$\widehat{D}(A,G) \simeq \varprojlim \widehat{U(\mathcal{L})}_K \rtimes_N G$$

où la limite projective est prise sur l'ensemble des $\mathcal{A}$-réseau de Lie G-stable $\mathcal{L}$ et des sous-groupes ouverts N de G contenus dans $G_{\mathcal{L}}$. Cela prouve que $\widehat{D}(A,G)$ ne dépend ni du réseau de Lie $\mathcal{L}$ choisi, ni de la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus il ne dépend pas non plus du modèle formel choisi par la propriété 3.3.8 de [1]. □

Remarque. *Lorsque G est le groupe trivial $\{1\}$, on a $\widehat{D}(A,G) = \widehat{D}_A$, ce qui fait de cette algèbre une généralisation de l'algèbre des opérateurs différentiels.*

Proposition 3.3.9. *En reprenant les notations de la définition 3.3.7, l'espace $D_k \rtimes_{N_k} G$ est un D_k-module libre de type fini dont une base est formée par une famille de représentants $(g_i)_{i\in I_k}$ du quotient G/N_k. C'est de plus une K-algèbre de Banach par la norme q_k définie par*

$$q_k\left(\sum_{i\in I_k} s_i.g_i\right) := \max_{i\in I_k} |s_i|_k.$$

Démonstration. L'espace $D_k \rtimes_{N_k} G$ est le quotient du D_k-module libre $D_k \rtimes G$ par les éléments de la forme $\rho(h) - h$ où $h \in N_k$. Comme N_k est ouvert et G est compact, l'indice de N_k dans G est fini. Notons alors $\{g_i\ ,\ i \in I_k\}$ un ensemble fini de représentants dans

G des classes du quotient à gauche G/N_k. Pour tout élément $s = \sum s_g.g \in D_k \rtimes G$ avec $s_g \in D_k$ pour tout $g \in G$, on a

$$\sum_{g\in G} s_g.g = \sum_{i\in I_k}\sum_{h\in N} s_{hg_i}.hg_i \equiv \sum_{i\in I_k}\left(\sum_{h\in N} s_{hg_i}\rho(h)\right).g_i.$$

Donc les $g_i, i \in I_k$ engendrent $D_k \rtimes_{N_k} G$ en tant que D_k-module, et on a même

$$D_k \rtimes_{N_k} G = \bigoplus_{i\in I_k} D_k.g_i.$$

En tant que D_k-module libre de type fini de base $(g_i)_{i\in I_k}$, on munit cet espace d'une norme q_k définie par

$$q_k\left(\sum_{i\in I_k} s_i.g_i\right) := \max_{i\in I_k} |s_i|_k.$$

Et $D_k \rtimes_{N_k} G$ est complet pour q_k car D_k est complet pour $|\cdot|_k$. □

Comme pour le cas trivial $\widehat{D}_A$, on obtient le résultat suivant, énoncé et prouvé par Ardakov au théorème 3.4.8 de [1].

Théorème 3.3.10. $\widehat{D}(A,G)$ *est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère.*

Démonstration. Par le théorème 2.1.15, $\widehat{D}_A$ est une K-algèbre de Fréchet-Stein bilatère donc D_k est un D_{k+1}-module plat (à gauche et à droite) et est noethérien pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or $D_k \rtimes_{N_k} G$ est un D_k-module libre de type fini donc est plat et noethérien. On a

$$\begin{tikzcd}
D_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed] & D_k \arrow[d, hook] \\
D_{k+1} \rtimes_{N_{k+1}} G \arrow[r] & D_k \rtimes_{N_k} G
\end{tikzcd}$$

où la flèche diagonale est plate, et se factorise par l'injection présente à gauche dans le diagramme en un morphisme plat $D_{k+1} \rtimes_{N_{k+1}} G \to D_k \rtimes_{N_k} G$, en utilisant le lemme 2.2 de [15]. Ainsi $\widehat{D}(A,G)$ est bien une K-algèbre de Fréchet-Stein. □

Proposition 3.3.11. $\widehat{D}(A,G)$ *est A-nucléaire.*

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $F_k = A\langle\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n}\rangle \rtimes G/N_k$. Notons $\{g_i, i \in I_k\}$ une famille de représentants dans G du quotient G/N_k qui est fini. Il existe alors une surjection $F_k \to D_k \rtimes_{N_k} G$ par

$$f : \sum_{i \in I_k} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha . g_i \longmapsto \sum_{i \in I_k} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \pi^{k|\alpha|} \partial^\alpha . g_i .$$

Alors f est limite de la suite de morphismes de A-modules $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ définies pour tout $j \in \mathbb{N}$ par

$$f_j : \sum_{i \in I_k} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \partial^\alpha . g_i \longmapsto \sum_{i \in I_k} \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{k|\alpha|} \partial^\alpha . g_i .$$

On constate alors que $f_j(\mathcal{A}\langle \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}) \rtimes G/N_k)$ est de type fini sur $\mathcal{A}$, et donc f est scc. Ainsi $\widehat{D}(A, G)$ est A-nucléaire. $\square$

3.4 Opérateurs d'ordre fini dans $\widehat{D}(A, G)$

Dans cette section, on reprend toutes les notations utilisées lors de la section précédente. On reprend également les notations de la définitions 3.3.7, et on a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ un espace $D_k \rtimes_{N_k} G$, qui par la proposition 3.3.9 est muni d'une base finie $\{g_i\}_{i \in I_k}$ sur D_k et d'une norme q_k.

Le but de cette section est de montrer que $\widehat{D}(A, G)$ est la complétion en tant que module bornologique de $U(\Theta_A) \rtimes G$, l'algèbre engendrée sur G par les opérateurs d'ordre fini.

Remarque. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les applications suivantes*

$$U(\Theta_A) \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G \xrightarrow{\pi_k} D_k \rtimes_{N_k} G$$

munissent, par la norme q_k sur $D_k \rtimes_{N_k} G$, les espaces $U(\Theta_A) \rtimes G$ et $D_k \rtimes G$ d'une semi-norme qu'on notera aussi abusivement q_k définie par

$$q_k \left(\sum_{g \in G} s_g . g \right) = q_k \left(\pi_k \left(\sum_{g \in G} s_g . g \right) \right) = \max_{i \in I_k} \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_i} \rho(h) \right|_k .$$

Lemme 3.4.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $h \in N_k$, on a $|\rho(h)|_k = 1$.*

Démonstration. Soit $h \in N_k$, puisque $\rho(h) \in \exp(p^\varepsilon \pi^k \mathcal{L})$ et que $\pi^k \mathcal{L} \subset \mathcal{D}_k$, alors par le corollaire 3.3.3 on a $\rho(h) \in 1 + p^\varepsilon \mathcal{D}_k$. Il existe $s \in \mathcal{D}_k$ tel que $\rho(h) = 1 + p^\varepsilon s$, et comme $|p^\varepsilon s|_k < |1|_k$ alors $|\rho(h)|_k = |1|_k = 1$. $\square$

Lemme 3.4.2. *Pour tout $g \in G$ et pour tout $s \in D_k$, on a $|\rho(g) s \rho(g^{-1})|_k \leq |s|_k$.*

Démonstration. Soient $g \in G$ et $s \in D_k$. Il existe $i \in \mathbb{Z}$ tel que $|s|_k = |\pi^i|$ et donc $\pi^{-i}s \in \mathcal{D}_k$. Or, $\mathcal{L}$ est G-stable donc $\mathcal{D}_k$ l'est aussi. Ainsi comme $\mathcal{D}_k$ est la boule unité de D_k on a $|\rho(g)(\pi^{-i}s)|_k \leq 1$. On en conclut $|\rho(g)(s)|_k \leq |\pi^i| = |s|_k$. □

Proposition 3.4.3. *La norme q_k sur $D_k \rtimes_{N_k} G$ est sous-multiplicative, ainsi que les semi-normes induites sur $D_k \rtimes G$ et $U(\Theta_A) \rtimes G$.*

Démonstration. Soient $s, r \in D_k \rtimes G$. On les écrit de la forme

$$s = \sum_{g \in G} s_g.g \quad \text{et} \quad r = \sum_{h \in G} r_h.h \quad \text{avec } s_g, r_h \in D_k \quad \forall g, h \in G.$$

Alors le produit s'écrit

$$s.g = \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} s_g \rho(g)(r_h).gh = \sum_{h \in G} \left(\sum_{g \in G} s_g \rho(g)(r_{g^{-1}h}) \right).h.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
q_k(s.r) = \max_{i \in I_k} \left| \sum_{\gamma \in N_k} \sum_{g \in G} s_g \rho(g)(r_{g^{-1}\gamma g_i}) \rho(\gamma) \right|_k &= \max_{i \in I_k} \left| \sum_{\gamma \in N_k} \sum_{j \in I_k} \sum_{h \in N_k} s_{hg_j} \rho(hg_j)(r_{g_j^{-1}h^{-1}\gamma g_i}) \rho(\gamma) \right|_k \\
&\leq \max_{i \in I_k} \max_{j \in I_k} \left| \sum_{\gamma \in N_k} \sum_{h \in N_k} s_{hg_j} \rho(h) \rho(g_j)(r_{g_j^{-1}h^{-1}\gamma g_i}) \rho(h)^{-1} \rho(\gamma) \right|_k \\
&\leq \max_{i \in I_k} \max_{j \in I_k} \left| \sum_{\gamma \in N_k} \sum_{h \in N_k} s_{hg_j} \rho(h) \rho(g_j)(r_{\gamma g_i}) \rho(\gamma) \right|_k \\
&\leq \max_{i \in I_k} \max_{j \in I_k} \left| \sum_{\gamma \in N_k} \rho(g_j)(r_{\gamma g_i}) \rho(\gamma) \right|_k . \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_j} \rho(h) \right|_k \\
&\leq \max_{i \in I_k} \max_{j \in I_k} \left| \rho(g_j) \left(\sum_{\gamma \in N_k} r_{\gamma g_i} \rho(\gamma) \right) \rho(g_j)^{-1} \right|_k . \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_j} \rho(h) \right|_k \\
&\leq \max_{i \in I_k} \left| \sum_{\gamma \in N_k} r_{\gamma g_i} \rho(\gamma) \right|_k . \max_{j \in I_k} \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_j} \rho(h) \right|_k = q_k(r).q_k(s)
\end{aligned}$$

car par la norme $|\cdot|_k$ est sous-multiplicative et par le lemme précédent. □

Proposition 3.4.4. *Soit $d \in \mathbb{R}_+$, notons $\mathcal{B}_k$ la boule de rayon 1 fermée de $D_k \rtimes G$ pour sa norme q_k. Alors $\mathcal{D}_k \rtimes G \subset \mathcal{B}_k$.*

Démonstration. Soit $s \in \mathcal{D}_k \rtimes G \subset D_k \rtimes G$, c'est-à-dire

$$s = \sum_{g \in G} s_g.g \text{ avec } \forall g \in G,\ |s_g|_k \leq 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} q_k(s) &= \max_{i \in I_k} \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_i} \rho(h) \right|_k \leq \max_{i \in I_k} \max_{h \in N_k} |s_{hg_i} \rho(h)|_k \\ &\leq \max_{i \in I_k, h \in N_k} |s_{hg_i}|_k \underbrace{|\rho(h)|_k}_{=1} = \max_{g \in G} |s_g|_k \leq 1. \end{aligned}$$

ce qu'on obtient notamment par sous-multiplicativité de la norme $|\cdot|_k$ et par le lemme précédent, et ainsi $s \in \mathcal{B}_k$. $\square$

Plus généralement si les coordonnées sur D_k d'un élément de $D_k \rtimes G$ sont de norme inférieure à d pour $|\cdot|_k$, alors cet élément est de norme inférieure à d pour q_k. L'inverse n'est pas vrai en général.

Proposition 3.4.5. *Les espaces $U(\Theta_A) \rtimes G$ et $\widehat{D}_A \rtimes G$ sont des K-espaces vectoriels localement convexes par les décompositions*

$$\begin{aligned} U(\Theta_A) \rtimes G &\simeq \varprojlim (U(\Theta_A) \rtimes G, q_k) \\ \widehat{D}_A \rtimes G &\simeq \varprojlim (D_k \rtimes G, q_k). \end{aligned}$$

On a

$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{h} \simeq \widehat{\widehat{D}_A \rtimes G}^{h} \simeq \widehat{D}(A, G).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\widehat{D}_A \rtimes G \simeq \varprojlim D_k \rtimes G$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ une injection $\widehat{D}_A \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G$ qui par exactitude à gauche de la limite projective donne l'injection $\widehat{D}_A \rtimes G \hookrightarrow \varprojlim D_k \rtimes G$. Soit $s \in \varprojlim D_k \rtimes G$. On écrit s de la forme

$$s = \left(\sum_{g \in G} s_{g,k}.g \right)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{k \in \mathbb{N}} D_k \rtimes G \quad \text{tel que } \forall k, l \in \mathbb{N},\ \sum_{g \in G} s_{g,k}.g = \sum_{g \in G} s_{g,l}.g.$$

Notamment pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\sum s_{g,0}.g = \sum s_{g,k}.g$ ce qui signifie que pour tout $g \in G$ on a $s_{g,0} = s_{g,k} \in D_k$. Comme $s_{g,0} \in D_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ on en conclut que $s_{g,0} \in \widehat{D}_A$. Ainsi $\sum s_{g,0}.g \in \widehat{D}_A \rtimes G$ est un antécédent de s pour l'injection $\widehat{D}_A \rtimes G \hookrightarrow \varprojlim D_k \rtimes G$ qui est donc un isomorphisme.

Montrons ensuite que $\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{q_k} \simeq \widehat{D_k \rtimes G}^{q_k} \simeq D_k \rtimes_{N_k} G$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par les applications suivantes

$$U(\Theta_A) \rtimes G \hookrightarrow D_k \rtimes G \overset{\pi_k}{\twoheadrightarrow} D_k \rtimes_{N_k} G$$

pour tout $s \in D_k \rtimes G$, on a $q_k(s) = q_k(\pi_k(s))$ et puisque q_k est une norme sur $D_k \rtimes_{N_k} G$ alors $\pi_k(s) = 0$ si et seulement si $q_k(s) = 0$. Donc

$$U(\Theta_A) \rtimes G \big/ \{q_k = 0\} \hookrightarrow D_k \rtimes G \big/ \{q_k = 0\} \simeq D_k \rtimes_{N_k} G.$$

Ces espaces quotients sont munis de la norme quotient issue de q_k, et les applications ci-dessus étant injectives et denses, on a alors

$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{q_k} \simeq \widehat{D_k \rtimes G}^{q_k} \simeq D_k \rtimes_{N_k} G.$$

Ainsi
$$\begin{aligned}
\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{h} &\simeq \varprojlim \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^{q_k} &&\simeq \varprojlim D_k \rtimes_{N_k} G &&= \widehat{D}(A, G) \\
\widehat{\widehat{D}_A \rtimes G}^{h} &\simeq \varprojlim \widehat{D_k \rtimes G}^{q_k} &&\simeq \varprojlim D_k \rtimes_{N_k} G &&= \widehat{D}(A, G).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemme 3.4.6. *Soit $s \in D_k \rtimes G$ tel que $q_k(s) \leq 1$. Il existe $s', s_0 \in D_k \rtimes G$ avec $q_k(s_0) = 0$ et $s' \in \mathcal{D}_k \rtimes G$ tels que $s = s_0 + s'$.*

Démonstration. Soit $s \in D_k \rtimes G$ tel que $q_k(s) \leq 1$. On écrit s de la forme

$$s = \sum_{g \in G} s_g . g \quad \text{où} \quad \forall g \in G,\ s_g \in D_k.$$

On a donc pour tout $i \in I_k$,

$$|t_i|_k \leq 1 \quad \text{où} \quad t_i = \sum_{h \in N_k} s_{hg_i} \rho(h) \in D_k.$$

Il suffit alors de prendre

$$s' = \sum_{i \in I_k} t_i . g_i \in D_k \rtimes G.$$

Puisque $|t_i|_k \leq 1$ pour tout $i \in I_k$, alors $t_i \in \mathcal{D}_k$, et $s' \in \mathcal{D}_k U(\pi^k \mathcal{L}) \rtimes G$. Ainsi, en posant

$s_0 = s - s'$, alors

$$q_k(s_0) = \max_{i \in I_k} \left| \sum_{h \in N_k} s_{hg_i} \rho(h) - t_i \right|_k = 0$$

et on a la décomposition $s = s_0 + s'$ voulue. □

Lemme 3.4.7. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{D}_{k+1} \subset \pi^j \mathcal{D}_k + F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L})$$

où $F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L})$ est un sous-ensemble de $U(\pi^{k+1}\mathcal{L})$ tel que

$$F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L}) := \left\{ \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha \ / \ a_\alpha \in \mathcal{A} \right\}.$$

Démonstration. Soit $t \in \mathcal{D}_{k+1}$. On écrit t de la forme

$$t = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha \quad \text{où} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \ a_\alpha \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \lim_{|\alpha| \to \infty} a_\alpha = 0.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} t &= \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha + \sum_{|\alpha| > j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha + \pi^j \sum_{|\alpha| > j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha| - j} \partial^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq j} a_\alpha \pi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha + \pi^j \sum_{|\alpha| > j} \underbrace{(a_\alpha \pi^{|\alpha| - j})}_{\in \mathcal{A}} \pi^{k|\alpha|} \partial^\alpha = t_j + \pi^j t' \end{aligned}$$

avec $t_j \in F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L})$ et $t' \in \mathcal{D}_k$. Ainsi, on a bien

$$\mathcal{D}_{k+1} \subset \pi^j \mathcal{D}_k + F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L}).$$

□

Corollaire 3.4.8. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{D}_{k+1} \rtimes G \subset \pi^j \mathcal{D}_k \rtimes G + F_j U(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \rtimes G.$$

Démonstration. S'en déduit directement du lemme précédent. □

Lemme 3.4.9. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'ensemble $F_jU(\pi^k\mathcal{L})$ est un borné de $\widehat{D}_A$ et $F_jU(\pi^k\mathcal{L}) \rtimes G$ est un borné de $\widehat{D}_A \rtimes G$.*

Démonstration. Soit $s \in F_jU(\pi^k\mathcal{L})$. L'élément s s'écrit de la forme

$$s = \sum_{|\alpha|\leq j} a_\alpha \pi^{k|\alpha|}\partial^\alpha \quad \text{où} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ a_\alpha \in \mathcal{A}.$$

Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$|s|_i = \max_{|\alpha|\leq j} |a_\alpha \pi^{k-i}| \leq |\pi^{k-i}|.$$

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble $F_jU(\pi^k\mathcal{L})$ est borné par la constante $|\pi^{k-i}|$, donc $F_jU(\pi^k\mathcal{L}) \subset \pi^{k-i}\mathcal{D}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et c'est un sous-ensemble borné de $\widehat{D}_A$ puisqu'il est borné pour toutes ses semi-normes. De la même façon par la proposition 3.4.4 on a $F_jU(\pi^k\mathcal{L}) \rtimes G \subset \pi^{k-i}\mathcal{D}_k \rtimes G \subset \pi^{k-i}\mathcal{B}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et c'est un borné de $\widehat{D}_A \rtimes G$. □

Proposition 3.4.10. *L'espace $\widehat{D}_A \rtimes G$ est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathcal{B}_{k+1}$, qui désigne la boule unité de $D_{k+1} \rtimes G$. Il existe par le lemme 3.4.6 des éléments $s_0 \in D_{k+1} \rtimes G$ et $s' \in \mathcal{D}_{k+1} \rtimes G$ tels que $q_{k+1}(s_0) = 0$ et $s = s_0 + s'$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe par le corollaire 3.4.8 des éléments $t_j \in F_jU(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \rtimes G$ et $t' \in \mathcal{D}_k \rtimes G$ tels que $s' = t_j + \pi^j t'$. Ainsi

$$s = s_0 + \pi^j t' + t_j.$$

Comme $q_{k+1}(s_0) = 0$, on a $q_k(s_0) = 0$ et $s_0 \in \pi^j\mathcal{B}_k$. De plus, $t' \in \mathcal{D}_k \rtimes G \subset \mathcal{B}_k$ par la proposition 3.4.4, et donc l'élément $s_0 + \pi^j t' \in \pi^j\mathcal{B}_k$. On pose $B' = F_jU(\pi^{k+1}\mathcal{L}) \rtimes G$. Alors B' est un borné de $\widehat{D}_A \rtimes G$ par le lemme précédent et on a

$$\mathcal{B}_{k+1} \subset \pi^j\mathcal{B}_k + B'.$$

Donc par la proposition 2.4.6, $\widehat{D}_A \rtimes G$ est pseudo-nucléaire. □

Corollaire 3.4.11. *L'espace $U(\Theta_A) \rtimes G$ est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in U(\Theta_A) \rtimes G$ tel que $q_{k+1}(s) \leq 1$. Alors $s \in \mathcal{B}_{k+1}$ et en reprenant les notations de la preuve précédente on a pour tout $j \in \mathbb{N}$ la décomposition

$$s = s_0 + \pi^j t' + t_j.$$

Or $B' \subset U(\Theta_A) \rtimes G$, donc $s_0 + \pi^j t' = s - t_j$ appartient à $U(\Theta_A) \rtimes G$. Ainsi

$$\mathcal{B}_{k+1} \cap (U(\Theta_A) \rtimes G) \subset \pi^j \mathcal{B}_k \cap (U(\Theta_A) \rtimes G) + B'$$

où pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{B}_k \cap (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est la boule unité de $U(\Theta_A) \rtimes G$ pour q_k. Donc par la proposition 2.4.6, $U(\Theta_A) \rtimes G$ est pseudo-nucléaire. □

Théorème 3.4.12. *On a*

$$\begin{gathered}\widehat{\widehat{D}_A \rtimes G}^b \simeq \widehat{\widehat{D}_A \rtimes G}^h \simeq \widehat{D}(A, G)\\ \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^b \simeq \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^h \simeq \widehat{D}(A, G).\end{gathered}$$

Démonstration. Puisque $\widehat{D}_A \rtimes G$ et $U(\Theta_A) \rtimes G$ sont pseudo-nucléaires, par la proposition 2.4.8 on a

$$\begin{gathered}\widehat{\widehat{D}_A \rtimes G}^b \simeq \widehat{\widehat{D}_A \rtimes G}^h\\ \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^b \simeq \widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^h.\end{gathered}$$

De plus par la proposition 3.4.5, on a

$$\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^h \simeq \widehat{\widehat{D}_A \rtimes G}^h \simeq \widehat{D}(A, G).$$

Ce qui prouve la propriété. □

3.5 Action d'un groupe de Lie sur une variété rigide

La construction de $\widehat{D}(A, G)$ sur une algèbre affinoïde n'est qu'un outil permettant d'étudier le cas de l'algèbre des opérateurs différentiels sur une variété rigide lorsqu'un groupe agit dessus.

On s'intéresse donc à l'action d'un groupe sur une variété rigide et ses dérivations, et on introduit tout d'abord la notion de groupe de Lie p-adique (ou groupe p-adique analytique). On pourra se référer à [10] en définition 8.6 pour la notion d'atlas et en 8.8 pour la notion de variété analytique, qui ne seront pas redéfinies ici. La définition suivante provient de la définition 8.14 de [10].

Définition 3.5.1. *Un groupe topologique G est un groupe de Lie p-adique, ou groupe analytique p-adique, s'il est muni d'un atlas faisant de lui une variété analytique, tel que les opérations de multiplication et d'inverse sont des fonctions analytiques.*

Proposition 3.5.2. *Soit G un groupe de Lie p-adique. Tout sous-groupe ouvert de G possède un sous-groupe ouvert compact.*

Démonstration. En tant que groupe de Lie p-adique, G est localement compact et totalement discontinu. Par la proposition B7 de l'appendice B de [10], tout voisinage de 1 dans G contient un sous-groupe ouvert compact de G. Un sous-groupe ouvert de G est un voisinage de 1, donc contient un sous-groupe ouvert compact. □

Le reste de cette section sera majoritairement issu de [1].

Définition 3.5.3. *Soit G un groupe topologique et X une variété rigide. On dit que G agit continuement sur X si on a un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(X)$ tel que pour tout ouvert affinoïde quasi-compact et quasi-séparé U de X le stabilisateur G_U de U dans G est ouvert et la restriction $\rho_U : G_U \to \mathrm{Aut}_K(U)$ est continue.*

Proposition 3.5.4. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une variété X. Pour tout $U \in X_{rig}$ et pour tout $g \in G$, on a le morphisme d'algèbre bijectif*

$$\begin{array}{rccc} g^{\mathcal{O}_X}(U): & \mathcal{O}_X(U) & \to & \mathcal{O}_X(gU) \\ & a & \mapsto & (u \mapsto g.a(g^{-1}.u)) \end{array}$$

qui munit $\mathcal{O}_X(U)$ d'une action de G_U par

$$\forall g \in G_U, \forall a \in \mathcal{O}_X(U), \forall u \in U, \quad (g.a)(u) = g.a(g^{-1}.u).$$

Définition 3.5.5. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une variété rigide lisse X. Un couple (U, H) est dit petit dans X si*

- *U est un sous-espace affinoïde de X.*
- *H est un sous-groupe ouvert compact de G_U.*
- *U possède un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre H-stable, où $\mathcal{A}$ est un modèle formel H-stable de $\mathcal{O}_X(U)$.*

On dit alors que H est U-petit.

Proposition 3.5.6. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une* *variété rigide lisse X. Pour tout $U \in X_w^c$, il existe un sous-groupe H de G_U tel que H est U-petit.*

Démonstration. Comme G agit continuement sur X, alors G_U est ouvert et par la proposition 3.5.2 il existe un sous-groupe ouvert compact N de G_U. Donc N agit sur $\mathcal{O}_X(U)$ par un morphisme de groupe continu et par la proposition 3.2.2 il existe un modèle formel $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}_X(U)$ qui est N-stable. En prenant un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre $\mathcal{L}$, par la proposition 3.2.5 il existe également un sous-groupe ouvert H de N tel que $\mathcal{L}$ est H-stable. Comme N est compact et que H est un ouvert de N, donc également un fermé, alors H est compact. Ainsi (U, H) est petit. □

Dans le cas où (U, H) est petit dans X avec $U \in X_w^c$, toutes les conditions de la définition 3.3.7 sont vérifiées pour $\mathcal{O}_X(U)$ et H, et $\widehat{D}(\mathcal{O}_X(U), H)$ est bien défini. On le notera simplement $\widehat{D}(U, H)$.

Proposition 3.5.7. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une variété rigide lisse X. Soient $U \in X_w^c$ et H un sous-groupe U-petit de G. On a les propriétés suivantes*

- *Si $N \leq H$ est un sous-groupe ouvert compact de H, alors N est U-petit.*
- *Si $V \subset U$ est un affinoïde stable par H, alors H est V-petit.*
- *Si $g \in G$, alors $gU \in X_w^c$ et gHg^{-1} est gU-petit.*

Démonstration. Notons $\mathcal{A}$ un modèle formel H-stable de $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre H-stable de base $(\partial_{x_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ où $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système de coordonnées de $\mathcal{O}_X(U)$.
• N est un sous-groupe ouvert compact de G_U, et U est bien un sous-espace affinoïde possédant un $\mathcal{A}$ réseau de Lie H-stable, donc N-stable.
• Par l'application de restriction $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$, l'image de $\mathcal{A}$ donne un modèle formel H-stable $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}_X(V)$. Par lissité de X, $(x_{i|V})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système local de coordonnées de V et le $\mathcal{B}$-module de base $(\partial_{x_{i|V}})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un $\mathcal{B}$-réseau de Lie libre H-stable.
• Tout d'abord, gU est naturellement gHg^{-1}-stable. Par l'application $g^{\mathcal{O}_X}(U)$ définie en proposition 3.5.4, $\mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{O}_X(gU)$ sont en bijection. Comme $\mathcal{O}_X(U)$ est affinoïde, il existe une surjection $T_k \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(U) \simeq \mathcal{O}_X(gU)$, et $\mathcal{O}_X(gU) \in X_w^c$ par le système local de coordonnées $(g^{\mathcal{O}_X}(U)(x_i))_{i\in[\![1,n]\!]} = (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. De même, $g^{\mathcal{O}_X}(U)(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ est un modèle formel gHg^{-1}-stable de $\mathcal{O}_X(gU)$. Enfin, le $\mathcal{B}$-module de base $(\partial_{y_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un $\mathcal{B}$-réseau de Lie libre gHg^{-1}-stable. □

Lemme 3.5.8. *Soient $\varphi : A \to B$ un morphisme entre deux algèbres affinoïdes et H un* *groupe topologique compact agissant sur A et B par un morphisme continu. Il existe des modèles formels H-stables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de A et B tel que $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.*

Démonstration. Par la proposition 3.2.2, il existe un modèle formel $\mathcal{A}$ de A qui est H-stable. Soit $\mathcal{B}'$ un modèle formel de B, alors $\varphi(\mathcal{A}).\mathcal{B}'$ est un modèle formel de B. Par la proposition 3.2.2 il existe un modèle formel $\mathcal{B}$ contenant $\varphi(\mathcal{A}).\mathcal{B}'$ tel que $\mathcal{B}$ est H-stable. Et dans ce cas on a bien $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. $\square$

Proposition 3.5.9. *Soient $U, V \in X_w^c$ tel que $U \subset V$, et $H \leq N$ des sous-groupes de G qui sont U-petits et V-petits. On a des applications tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{D}(V,H) & \longrightarrow & \widehat{D}(U,H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{D}(V,N) & \longrightarrow & \widehat{D}(U,N). \end{array}$$

Démonstration. Tout d'abord par la proposition 3.5.7, tous les espaces ci-dessus sont bien définis. Notons $B = \mathcal{O}_X(U)$ et $A = \mathcal{O}_X(V)$. L'inclusion $U \hookrightarrow V$ donne le morphisme de restriction $\varphi : A \to B$. Par le lemme précédent, il existe $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des modèles formels N-stables de A et B, tel que $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$. Puisque (V, N) est petit, il existe un $\mathcal{A}$-réseau de Lie libre N-stable $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. On prend $(\partial_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une $\mathcal{A}$-base de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ et on note $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ le $\mathcal{B}$-réseau de Lie libre généré sur $\mathcal{B}$ par les $\partial_{i|U}$. Ainsi il existe $\tilde{\varphi} : \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, qu'on étend avec φ par la propriété universelle de l'algèbre enveloppante en un morphisme $\varphi_k : U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \to U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En notant ι l'inclusion de H dans N, on construit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le morphisme

$$\hat{\varphi}_k \rtimes \iota : \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})}_K \rtimes H \to \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})}_K \rtimes N.$$

Prenons une suite $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes de H vérifiant les conditions de la définition 3.3.7 pour $\widehat{D}(A, H)$, alors cette même suite vérifie également ces conditions en tant que suite de sous-groupes de N pour $\widehat{D}(B, N)$. En constatant que

$$(\hat{\varphi} \rtimes \iota)^{-1}(\tilde{\beta}_B(N_k) - 1) \subset (\tilde{\beta}_A(N_k) - 1)$$

on obtient par passage au quotient

$$\widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})}_K \rtimes_{N_k} H \to \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})}_K \rtimes_{N_k} N.$$

Ainsi par passage à la limite projective on obtient le morphisme de K-algèbres

$$\widehat{D}(V,H) \to \widehat{D}(U,N).$$

La construction de ce morphisme se fait pareillement en considérant que $N = H$ ou que $U = V$, donc les compositions

$$\begin{aligned}\widehat{D}(V,H) \to \widehat{D}(V,N) \to \widehat{D}(U,N)\\ \widehat{D}(V,H) \to \widehat{D}(U,H) \to \widehat{D}(U,N)\end{aligned}$$

coïncident et le diagramme est commutatif. $\square$

Lemme 3.5.10. *Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une variété rigide lisse X. Pour tout $g \in G$, pour tout $U \in X_w^c$ et H sous-groupe U-petit de G, il existe une application*

$$g_{U,H} : \widehat{D}(U,H) \to \widehat{D}(gU, gHg^{-1})$$

tel que pour tout $V \subset U$ stable par H, le diagramme commute

$$\begin{array}{ccc}\widehat{D}(V,H) & \longrightarrow & \widehat{D}(gV, gHg^{-1})\\ \downarrow & & \downarrow\\ \widehat{D}(U,H) & \longrightarrow & \widehat{D}(gU, gHg^{-1}).\end{array}$$

Démonstration. On pose l'application entre espaces bornologiques

$$\begin{array}{ccc}D_U \rtimes H & \longrightarrow & D_{gU} \rtimes gHg^{-1}\\ \sum_{h\in H} s_h.h & \longmapsto & \sum_{h\in H} \rho(g)(s_h).ghg^{-1}\end{array}$$

qu'on prouve être bornée. En effet, en choisissant une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ adéquate, et en notant $\{g_i, i \in I_k^H\}$ une famille de représentants de H/N_k pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espace $D_U \rtimes H$ est muni d'une bornologie par la section précédente définie par la suite de semi-normes $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$q_k\left(\sum_{h\in H} s_h.h\right) = \max_{i\in I_k^H}\left|\sum_{n\in N_k} s_{ng_i}\rho(n)\right|_k.$$

De même sur $D_{gU} \rtimes gHg^{-1}$ avec la famille $\{gg_ig^{-1}, i \in I_k^H\}$ de représentants de gHg^{-1}/N_k.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
q_k\left(\sum_{h\in H}\rho(g)(s_h).ghg^{-1}\right) &= q_k\left(\sum_{h\in gHg^{-1}}\rho(g)s_{g^{-1}hg}\rho(g^{-1}).h\right)\\
&= \max_{i\in I_k^H}\left|\sum_{n\in N_k}\rho(g)s_{g^{-1}ngg_i}\rho(g^{-1})\rho(n)\right|_k\\
&= \max_{i\in I_k^H}\left|\sum_{n\in N_k}\rho(g)s_{ng_i}\rho(n)\rho(g^{-1})\right|_k\\
&\leq |\rho(g)|_k \max_{i\in I_k^H}\left|\sum_{n\in N_k}s_{ng_i}\rho(n)\right|_k |\rho(g^{-1})|_k\\
&= q_k\left(\sum_{h\in H}s_h.h\right)|\rho(g)|_k|\rho(g^{-1})|_k.
\end{aligned}$$

Finalement l'application est bornée, et par le théorème 3.4.12 on obtient $g_{U,H}$ par passage au complété bornologique. □

3.6 $\widehat{D}$-modules G-équivariants

On définit enfin dans cette section l'algèbre $\widehat{D}(X,G)$ sur une variété analytique rigide en suivant la construction faite par Ardakov dans [1], et en reprenant la construction faite sur les algèbres affinoïdes dans la section 3.3.

Soit G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur une variété rigide lisse X par un morphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}_K(X)$. Soient $U \in X_w^c$ et H un sous-groupe U-petit de G.

Définition 3.6.1. *Soit M un $\widehat{D}(U,H)$-module coadmissible. On pose pour tout $V \in U_w^c$ et pour tout sous-groupe V-petit N de H*

$$M(V,N) := \widehat{D}(V,N)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N)}M.$$

Lemme 3.6.2. *Soient $V \in X_w^c$ et N un sous-groupe V-petit de G. Soit $N' \leq N$ un sous-groupe ouvert compact. On a l'isomorphisme de $\widehat{D}(V,N')$-modules*

$$\widehat{D}(V,N') \otimes_{K[N']} K[N] \simeq \widehat{D}(V,N).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{O}_X(V) = A$ et $\mathcal{A}$ un modèle formel de A ainsi que $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-réseau de Lie N'-stable. Comme dans la définition 3.3.7, on se donne une suite décroissante

$(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes ouverts normaux de N' tel que

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} N_k = \{1\} \quad \text{et} \quad \forall k\in\mathbb{N},\ N_k \subset N'_{\pi^k\mathcal{L}}.$$

On a pour tout $k\in\mathbb{N}$ l'isomorphisme de $(D_k \rtimes N')$-modules (où $D_k = \widehat{U(\pi^k\mathcal{L})}_K$)

$$(D_k \rtimes N') \otimes_{K[N']} K[N] \simeq D_k \rtimes N.$$

Puisque l'image inverse de $(\tilde{\beta}_k(N_k)-1)$ par cet isomorphisme est $(\tilde{\beta}_k(N_k)-1)\otimes_{K[N']} K[N]$, par passage au quotient cela donne un isomorphisme

$$(D_k \rtimes_{N_k} N') \otimes_{K[N']} K[N] \simeq D_k \rtimes_{N_k} N.$$

Comme les $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont aussi une suite de sous-groupes de N convenable pour la définition 3.3.7 pour $\widehat{D}(V,N)$, on en conclut par limite projective l'isomorphisme de $\widehat{D}(V,N')$-modules

$$\widehat{D}(V,N') \otimes_{K[N']} K[N] \simeq \widehat{D}(V,N). \qquad \square$$

Lemme 3.6.3. *Soient $V \in U_w^c$ et N un sous-groupe V-petit de H. Soit N' un sous-groupe ouvert compact de N. On a l'isomorphisme de $\widehat{D}(V,N')$-modules*

$$\widehat{D}(V,N')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N')}\widehat{D}(U,N) \simeq \widehat{D}(V,N).$$

Démonstration. Grâce au lemme précédent on a

$$\begin{aligned}\widehat{D}(V,N')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N')}\widehat{D}(U,N) &= \widehat{D}(V,N')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N')}\left(\widehat{D}(U,N') \otimes_{K[N']} K[N]\right)\\ &\simeq \widehat{D}(V,N') \otimes_{K[N']} K[N] \simeq \widehat{D}(V,N). \qquad \square\end{aligned}$$

Proposition 3.6.4. *Soit M un $\widehat{D}(U,H)$-module coadmissible. Soit $V \in U_w^c$, N un sous-groupe V-petit de H et N' un sous-groupe ouvert compact de N. On a l'isomorphisme de $\widehat{D}(V,N')$-modules*

$$M(V,N') \simeq M(V,N).$$

Démonstration. Grâce au lemme précédent on a

$$\begin{aligned} M(V,N') &= \widehat{D}(V,N')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N')}M = \left(\widehat{D}(V,N')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N')}\widehat{D}(U,N)\right)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N)}M \\ &\simeq \widehat{D}(V,N)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N)}M = M(V,N). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.6.5. *Soient $V \in X_w^c$ et N un sous-groupe V-petit de G. Soit N' un sous-groupe ouvert compact de N. Alors $\widehat{D}(V,N)$ est un $\widehat{D}(V,N')$-module coadmissible.*

Démonstration. Comme l'indice de N' dans N est fini, alors $K[N]$ est un $K[N']$-module libre de présentation fini, et donc $\widehat{D}(V,N)$ est un $\widehat{D}(V,N')$-module de présentation finie par l'isomorphisme

$$\widehat{D}(V,N) \simeq \widehat{D}(V,N') \otimes_{K[N']} K[N].$$

Ainsi par la proposition 2.2.3, $\widehat{D}(V,N)$ est $\widehat{D}(V,N')$-coadmissible. □

Définition 3.6.6. *Soit M un $\widehat{D}(U,H)$-module coadmissible. On définit pour tout $V \in U_w^c$*

$$Loc_{U,H}(M)(V) := \varprojlim_{N \leq H \ V\text{-petit}} M(V,N).$$

La limite projective ci-dessus a bien un sens. En effet, pour tout $N' \leq N$ des sous-groupes V-petits, on a l'application

$$\widehat{D}(V,N') \to \widehat{D}(V,N)$$

du lemme 3.5.9, qui donne alors une application $\widehat{D}(U,N')$-balancée

$$\widehat{D}(V,N') \times M \to \widehat{D}(V,N)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(X,N)}M.$$

Par la proposition 2.2.4 et le lemme précédent, $\widehat{D}(V,N)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N)}M$ est $\widehat{D}(V,N)$-coadmissible donc $\widehat{D}(V,N')$-coadmissible, et par propriété universelle du produit tensoriel coadmissible on obtient les applications du système projectif

$$\widehat{D}(V,N')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,N')}M \to \widehat{D}(V,N)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(V,N)}M.$$

Remarque. *On a alors pour tout (V,N) petit dans U avec $N \leq H$*

$$Loc_{U,H}(M)(V) \simeq M(V,N).$$

Proposition 3.6.7. *Soit M un $\widehat{D}(U,H)$-module coadmissible. $Loc_{U,H}(M)$ est un faisceau sur U_w^c,qu'on étend en un faisceau sur U_{rig}.*

Démonstration. Voir [1], théorème 3.5.11. □

Définition 3.6.8. *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau de K-espaces vectoriels sur X. On appelle structure équivariante K-linéaire sur $\mathcal{F}$ un ensemble $\{g^{\mathcal{F}}\}_{g\in G}$ de morphismes de préfaisceaux*

$$g^{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to g^{\#}\mathcal{F}$$

où $g^{\#}\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(gU)$ pour tout $U \in X_{rig}$, et tel que pour tout $g, h \in G$, on a

$$(gh)^{\mathcal{F}} = h^{\#}(g^{\mathcal{F}}) \circ h^{\mathcal{F}}.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est un préfaisceau G-équivariant s'il est muni d'une telle structure équivariante.

Définition 3.6.9. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des préfaisceaux G-équivariants. Un morphisme de préfaisceaux de K-module $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ est un morphisme de préfaisceaux G-équivariants si pour tout $g \in G$ on a*

$$g^{\#}(\varphi) \circ g^{\mathcal{F}} = g^{\mathcal{F}'} \circ \varphi.$$

Proposition 3.6.10. *$\mathcal{O}_X$ est un faisceau de K-algèbres G-équivariant sur X.*

Démonstration. Par le morphisme de la proposition 3.5.4, on a pour tout $g \in G$ un morphisme de faisceaux $g^{\mathcal{O}_X} : \mathcal{O}_X \to g^{\#}\mathcal{O}_X$. Alors $\{g^{\mathcal{O}_X}\}_{g\in G}$ munit $\mathcal{O}_X$ d'une structure équivariante qui en fait un préfaisceau G-équivariant. Comme $\mathcal{O}_X$ est un faisceau, c'est donc un faisceau G-équivariant. □

Proposition 3.6.11. *$\widehat{D}_X$ est un faisceau de K-algèbres G-équivariant sur X.*

Démonstration. Soient $U \in X_w^c$ et $g \in G$. On considère les applications $g^{\mathcal{O}_X}(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(gU)$ et $(g^{-1})^{\mathcal{O}_X}(gU) : \mathcal{O}_X(gU) \to \mathcal{O}_X(U)$, réciproques l'une de l'autre. On considère également un système local de coordonnées $\{x_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathcal{O}_X(U)$. En posant $y_i = g^{\mathcal{O}_X}(U)(x_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'ensemble $\{y_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système local de coordonnées de $\mathcal{O}_X(gU)$. On pose alors, en notant Θ_X le faisceau tangent sur X,

$$\begin{array}{rccc} g^{\Theta_X}(U) : & \Theta_X(U) & \longrightarrow & \Theta_X(gU) \\ & \theta & \longmapsto & g^{\mathcal{O}_X}(U) \circ \theta \circ (g^{-1})^{\mathcal{O}_X}(gU) \end{array}$$

qui pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ envoie ∂_{x_i} sur ∂_{y_i}. Par cette structure équivariante, Θ_X est un faisceau G-équivariant. Par propriété universelle de l'algèbre enveloppante, il existe un morphisme de K-algèbres $g^{\widehat{D}_X}(U)$ tel que le diagramme commute

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d, "g^{\mathcal{O}_X}(U)"] & \widehat{D}_X(U) \arrow[d, "g^{\widehat{D}_X}(U)"] & \Theta_X(U) \arrow[l] \arrow[d, "g^{\Theta_X}(U)"] \\
\mathcal{O}_X(gU) \arrow[r] & \widehat{D}_X(gU) & \Theta_X(gU). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Par cette structure équivariante, $\widehat{D}_X$ est un faisceau G-équivariant. $\square$

Définition 3.6.12. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de K-algèbres G-équivariant sur X. On dit que $\mathcal{M}$ est un G-$\mathcal{F}$-module, ou un faisceau de $\mathcal{F}$-module G-équivariant, si c'est un faisceau G-équivariant sur X tel que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{F}$-module et que pour tout $U \in X_{rig}$, pour tout $g \in G$*

$$g^{\mathcal{M}}(a.m) = g^{\mathcal{F}}(a).g^{\mathcal{M}}(m) \text{ pour tout } a \in \mathcal{F}(U) \text{ et } m \in \mathcal{M}(U)$$

Définition 3.6.13. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de K-algèbres G-équivariant sur X. Un morphisme de G-$\mathcal{F}$-modules est un morphisme de faisceaux de $\mathcal{F}$-modules qui est aussi un morphisme de faisceaux G-équivariants.*

Notre exemple principal de tels modules sera les G-$\widehat{D}_X$-modules.

Proposition 3.6.14. *$Loc_{U,H}$ est un foncteur de la catégorie des $\widehat{D}(U,H)$-modules coadmissibles dans la catégorie des H-$\widehat{D}_U$-modules.*

Démonstration. Soit M un $\widehat{D}(U,H)$-module coadmissible, on note $\mathcal{M} = Loc_{U,H}(M)$. Soit $g \in G$, pour tout (V,N) petit dans U avec $N \leq H$ les applications $g_{V,N}$ donne des applications $g^{M}_{V,N} : M(V,N) \to M(gV, gNg^{-1})$ et par limite projective on définit pour tout $V \in X^c_w$ une application

$$g^{\mathcal{M}}(V) : \mathcal{M}(V) \to \mathcal{M}(gV)$$

qui munit $\mathcal{M}$ d'une structure équivariante par construction. $\square$

Définition 3.6.15. *Un G-$\widehat{D}_X$-module $\mathcal{M}$ est dit coadmissible si pour tout $U \in X^c_w$ il existe un sous-groupe U-petit H de G tel que $\mathcal{M}(U)$ est un $\widehat{D}(U,H)$-module coadmissible et*

$$\mathcal{M}_{|U} \simeq Loc_{U,H}(\mathcal{M}(U)).$$

On note $\mathcal{C}_{X/G}$ la catégorie des $\widehat{D}_X$-modules G-équivariants coadmissibles dont les morphismes sont les morphismes de G-$\widehat{D}_X$-modules continus.

Chapitre 4

Foncteur image inverse de G-$\widehat{D}$-modules

4.1 Image inverse de $\widehat{D}(A, G)$-modules

Hypothèses. *Dans cette section, on suppose que l'on a*

- *Des K-algèbres affinoïdes A et B respectivement de rang n et m et munies de systèmes locaux de coordonnées.*
- *Un groupe topologique compact G agissant sur A et B par des morphismes de groupes continus $\rho_A : G \to \mathrm{Aut}_K(A)$ et $\rho_B : G \to \mathrm{Aut}_K(B)$.*
- *Un morphisme lisse de K-algèbres affinoïdes $f : A \to B$ qui est G-équivariant, c'est-à-dire que pour tout $a \in A$ et pour tout $g \in G$ on a*

$$f(g \cdot a) = g \cdot f(a).$$

- *Des systèmes locaux de coordonnées $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(y_j)_{j \in [\![1,m]\!]}$ de A et de B tels que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.*
- *Des modèles formels G-stables $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tels que $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.*
- *Un $\mathcal{A}$-réseau $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ de Θ_A et un $\mathcal{B}$-réseau $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ de Θ_B, tous deux libres et G-stables, tels que*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}.\partial_{x_i} \quad \textit{et} \quad \mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{B}.\partial_{y_j}.$$

Nous constatons tout d'abord que nous obtenons des résultats similaires à ceux de la section 1.3 pour les opérateurs d'ordre fini.

Proposition 4.1.1. *$B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est un $(U(\Theta_B) \rtimes G)$-module.*

Démonstration. L'espace $B \otimes_A U(\Theta_A)$ est muni d'une structure de $U(\Theta_B)$-module par la proposition 1.3.5. On munit naturellement l'espace $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ d'une structure de $U(\Theta_B)$-module par l'action a_U définie pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ et pour tout $t \in U(\Theta_B)$ par

$$a_U(t)(b \otimes s.g) = (t \cdot (b \otimes s)).g.$$

Cet espace est aussi muni d'une action a_G de G définie pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ et pour tout $h \in G$ par

$$a_G(h)(b \otimes s.g) = \rho_B(h)(b) \otimes \rho_A(h) s \rho_A(h^{-1}).hg.$$

Les éléments de $U(\Theta_B) \rtimes G$ agissent donc sur cet espace. Or, pour tout $h \in G$ et pour tout $\theta \in \Theta_B$, on a pour tout $\sum(b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g) \in B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$

$$\begin{aligned}
&a_G(h) \circ a_U(\theta) \circ a_G(h^{-1}) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g \right) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \rho_B(h)(\theta)(b_\alpha) \otimes \partial^\alpha.g + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{i=1}^{n} b_\alpha \rho_B(h)(\theta(f(x_i))) \otimes \rho_A(h) \partial_{x_i} \rho_A(h^{-1}) \partial^\alpha.g.
\end{aligned}$$

Or, $\rho_A(h)$ est un isomorphisme de A, donc $d\rho_A(h)$ est un isomorphisme semi-linéaire de Ω_A, qui transforme la base $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de Ω_A en une base $(d\rho_A(h)(x_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$ de Ω_A. Ainsi en notant $x'_i = \rho_A(h)(x_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on obtient $\partial_{x'_i} = \rho_A(h)(\partial_{x_i})$ et $(x'_i, \partial_{x'_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système local de coordonnées de A. Donc

$$\begin{aligned}
&a_G(h) \circ a_U(\theta) \circ a_G(h^{-1}) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g \right) \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \rho_B(h)(\theta)(b_\alpha) \otimes \partial^\alpha.g + \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{i=1}^{n} b_\alpha \rho_B(h)(\theta)(f(x'_i))) \otimes \partial_{x'_i} \partial^\alpha.g \\
&= a_U(\rho_B(h)(\theta)) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} b_\alpha \otimes \partial^\alpha.g \right)
\end{aligned}$$

où on a utilisé la G-équivariance de f. On obtient ainsi pour tout $h \in G$ et pour tout $t \in U(\Theta_B)$

$$a_G(h) \circ a_U(t) \circ a_G(h^{-1}) = a_U(\rho_B(h)(t))$$

et par la relation $h.t.h^{-1} = \rho_B(h)(t)$ qui définit $U(\Theta_B) \rtimes G$, on obtient finalement une action de $U(\Theta_B) \rtimes G$ sur $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$. $\square$

Proposition 4.1.2. *Le* $(U(\Theta_B) \rtimes G)$*-module* $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ *est de présentation finie* *engendré sur $(U(\Theta_B) \rtimes G)$ par l'élément $1 \otimes 1$ tel que*

$$B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G) \simeq {(U(\Theta_B) \rtimes G)}\Big/ {\sum_{j=n+1}^{m} (U(\Theta_B) \rtimes G).\partial_{y_j}}.$$

Démonstration. On définit le morphisme de $U(\Theta_B) \rtimes G$-modules

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U(\Theta_B) \rtimes G & \longrightarrow & B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G) \\ & \sum_{g \in G} s_g.g & \longmapsto & \Big(\sum_{g \in G} s_g.g \Big).1 \otimes 1 \end{array}$$

Les éléments de la forme $1 \otimes \partial_x^{\alpha}.g$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $g \in G$ sont générateurs en tant que B-module de $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$. Ainsi, puisque pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $g \in G$

$$\varphi(\partial_y^{\alpha}.g) = (\partial_y^{\alpha}.g).1 \otimes 1 = 1 \otimes \partial_x^{\alpha}.g,$$

par B-linéarité de φ, on obtient que φ est surjective. Or le noyau de ce morphisme est engendré sur $(U(\Theta_B) \rtimes G)$ par les $(\partial_{y_j})_{j \in [\![n+1,m]\!]}$ de telle sorte que

$$B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G) \simeq {(U(\Theta_B) \rtimes G)}\Big/ {\sum_{j=n+1}^{m} (U(\Theta_B) \rtimes G).\partial_{y_j}}. \qquad \square$$

Comme dans le cas des $\widehat{D}$-modules étudié par Bode dans [7], on tentera de définir un bimodule de transfert qu'on voudra de la forme $B\widehat{\otimes}_A^b \widehat{D}(A,G)$. En montrant que l'action définie dans la proposition 4.1.1 est bornée et en utilisant les propriétés des modules bornologiques, on pourra conclure par passage au complété bornologique.

Lemme 4.1.3. *Le morphisme de B-module $\tilde{\cdot} : \Theta_B \to B \otimes_A \Theta_A$ se restreint en un morphisme de $\mathcal{B}$-modules*

$$\tilde{\cdot} : \mathcal{L}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}.$$

Démonstration. On rappelle que Θ_A est un A-module libre de base $(\partial_{x_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ et Θ_B est un B-module libre de base $(\partial_{y_j})_{j \in [\![1,m]\!]}$. Par la proposition 1.3.4, l'application $\tilde{\cdot}$ est entièrement déterminée par l'image de la base de Θ_B comme ceci

$$\forall j \in [\![1,m]\!] \ , \ \tilde{\partial}_{y_j} = \begin{cases} 1 \otimes \partial_{x_j} & \text{si } j \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque ainsi que l'image de la $\mathcal{B}$-base de $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ appartient à $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ et on en conclut que $\tilde{\cdot}\,(\mathcal{L}_{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, qui permet la restriction voulue. $\square$

Lemme 4.1.4. *Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{S}_k = U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})$, $S_k = \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})}_K$ et $T_k = \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})}_K$. Alors $\big(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k \rtimes G)\big)_K$ est un $T_k \rtimes G$-module et on a une application*

$$(T_k \rtimes G) \times (B \otimes_A (S_k \rtimes G)) \longrightarrow (\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k \rtimes G))_K.$$

Démonstration. Par l'application $\tilde{\cdot} : \mathcal{L}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ du lemme précédent, et par la même preuve que dans la proposition 4.1.1, on munit l'espace $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \rtimes G)$ d'une structure de $U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}}) \rtimes G$-module. En passant au complété π-adique et en tensorisant avec K, on obtient que $(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k \rtimes G))_K$ est un $T_k \rtimes G$-module. Enfin, par l'application

$$B \otimes_A (S_k \rtimes G) \to (\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k \rtimes G))_K$$

on obtient l'application souhaitée. $\square$

Lemme 4.1.5. *On pose*

$$\begin{array}{rccl} S : & B \otimes_A \Theta_A & \to & \Theta_B \\ & \displaystyle\sum_{1 \le i \le n} b_i \otimes \partial_{x_i} & \mapsto & \displaystyle\sum_{1 \le i \le n} b_i \partial_{y_i} \end{array}$$

une section de l'application $\tilde{\cdot}$, et par extension on note également S la composition

$$\begin{array}{c} \Theta_A \to B \otimes_A \Theta_A \to \Theta_B \\ \displaystyle\sum_{1 \le i \le n} a_i \partial_{x_i} \longmapsto \sum_{1 \le i \le n} f(a_i) \partial_{y_i}. \end{array}$$

Alors pour tout $v \in \Theta_A$ on a $f \circ v = S(v) \circ f$.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\partial_{y_i} \circ f = f \circ \partial_{x_i}$. Par définition, on a $\partial_{x_i} = (dx_i)^* \circ d_A$ et $\partial_{y_i} = (dy_i)^* \circ d_B$. Or, par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"'] & B \arrow[d, "d_B"] \\ \Omega_A \arrow[r, "df"] & \Omega_B \end{tikzcd}$$

on a

$$\begin{aligned}\partial_{y_i} \circ f = f \circ \partial_{x_i} &\iff (dy_i)^* \circ d_B \circ f = f \circ (dx_i)^* \circ d_A \\ &\iff (dy_i)^* \circ df \circ d_A = f \circ (dx_i)^* \circ d_A\end{aligned}$$

Et il suffit de montrer que $(dy_i)^* \circ df = f \circ (dx_i)^*$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a en effet

— $(dy_i)^* \circ df(dx_j) = (dy_i)^*(df(x_j)) = (dy_i)^*(dy_j) = \delta_{i,j}$.

— $f \circ (dx_i)^*(dx_j) = f(\delta_{i,j}) = \delta_{i,j}$.

Et comme les $(dx_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ forment une base de Ω_A, par linéarité les applications sont égales. □

Lemme 4.1.6. *En notant $J_{A,k} = (S_k \rtimes G).(\beta_A(N_k) - 1)$ et $J_{B,k} = (T_k \rtimes G).(\beta_B(N_k) - 1)$, l'application du lemme 4.1.4 donne les applications restreintes*

$$\begin{gathered}(T_k \rtimes G) \times (B \otimes_A J_{A,k}) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}} \\ (J_{B,k} \rtimes G) \times (B \otimes_A (S_k \rtimes G)) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}}\end{gathered}$$

où $\overline{B \otimes_A J_{A,k}}$ désigne l'adhérence de l'image de $B \otimes_A J_{A,k}$ dans $(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}_k \rtimes G))_K$.

Démonstration. Pour tout $g \in G$, $\theta \in \pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ et pour tout $b \otimes s.(\rho(h) - h) \in B \otimes_A J_{A,k}$, où $b \in B$, $s \in S_k \rtimes G$ et $h \in N_k$, on a

$$\begin{aligned}g.(b \otimes s.(\rho(h) - h)) &= \rho(g)(b) \otimes g.s.(\rho(h) - h) \in B \otimes_A J_{A,k} \\ \theta.(b \otimes s.(\rho(h) - h)) &= \theta(b) \otimes s.(\rho(h) - h) + b\tilde{\theta}s.(\rho(h) - h) \in B \otimes_A J_{A,k}\end{aligned}$$

Ainsi $U(\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}) \rtimes G \subset T_k \rtimes G$ stabilise $B \otimes_A J_{A,k}$ et par passage au complété, $T_k \rtimes G$ stabilise $\overline{B \otimes_A J_{A,k}}$ et on a bien l'application

$$(T_k \rtimes G) \times (B \otimes_A J_{A,k}) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}}$$

Soit $h \in N_k \subset G_{\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{B}}}$, il existe $v \in p^\varepsilon\pi^k\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ tel que $\rho_A(h) = \exp(v)$. Par le lemme 4.1.5 on a l'application S tel que $f \circ v = S(v) \circ f$. Soit $a \in A$, par G-équivariance de f on a

$$\begin{aligned}\rho_B(h)(f(a)) &= f(\rho_A(h)(a)) = f(\exp(v)(a)) = f\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{v^k}{k!}(a)\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{f \circ v^k}{k!}(a) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{S(v)^k}{k!}(f(a)) = \exp(S(v))(f(a))\end{aligned}$$

Or $h \in N_k \subset G_{\pi^k \mathcal{L}_\mathcal{B}}$ donc il existe $u \in p^\epsilon \pi^k \mathcal{L}_\mathcal{B}$ tel que $\rho_B(h) = \exp(u)$. Ainsi,

$$\rho_B(h)_{|f(A)} = \exp(u)_{|f(A)} = \exp(S(v))_{|f(A)}$$

Donc par le log, $u_{|f(A)} = S(v)_{|f(A)}$ et en notant

$$u = \sum_{j=1}^{m} b_j \partial_{y_j} \ , \ \ v = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{x_i} \ \text{ et donc } \ S(v) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \partial_{y_i}$$

on a

$$u = S(v) + \sum_{j=n+1}^{m} b_j \partial_{y_j}$$

Ainsi $\tilde{u} = 1 \otimes v$, et pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (S_k \rtimes G)$ on a

$$\begin{aligned} u.(b \otimes s.g) &= u(b) \otimes s.g + b \otimes vs.g \\ u^k.(b \otimes s.g) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^i(b) \otimes v^{k-i} s.g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(u).(b \otimes s.g) \quad &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{u^k}{k!}(b \otimes s.g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{u^i(b)}{k!} \otimes v^{k-i} s.g \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \binom{i+j}{i} \frac{u^i(b)}{(i+j)!} \otimes v^j s.g = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{u^i(b)}{i!} \otimes \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{v^j}{j!} s.g \\ &= \exp(u)(b) \otimes \exp(v) s.g \end{aligned}$$

Donc finalement, pour tout $h \in N_k$ et pour tout $b \otimes s.g \in B \otimes_A (S_k \rtimes G)$ on a

$$\begin{aligned} (\rho_B(h) - h).(b \otimes s.g) \quad &= \exp(u).b \otimes s.g - \rho_B(h)(b) \otimes \rho_A(h)(s).hg \\ &= \exp(u)(b) \otimes \exp(v)s.g - \exp(u)(b) \otimes \rho_A(h)(s).hg \\ &= \exp(u)(b) \otimes (\rho_A(h)s.g - \rho_A(h)(s).hg) \\ &= \exp(u)(b) \otimes ((\rho_A(h) - h).(s.g)) \in \overline{B \otimes_A J_{A,k}} \end{aligned}$$

et on a bien l'application

$$(J_{B,k} \rtimes G) \times (B \otimes_A (S_k \rtimes G)) \to \overline{B \otimes_A J_{A,k}}$$

$\square$

Précisons qu'on peut munir $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ d'une bornologie. En effet, en notant

$\mathcal{B}_{A,k}$ la boule unité de $U(\Theta_A) \rtimes G$, on peut munir cet espace d'une suite de semi-normes correspondant aux jauges des réseaux $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k}$.

Proposition 4.1.7. *L'action de $U(\Theta_B) \rtimes G$ sur $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est bornée.*

Démonstration. Soient $\mathbb{B}_{A,k}$ et $\mathbb{B}_{B,k}$ les boules unités de $T_k \rtimes G$ et $S_k \rtimes G$. Soient $\mathcal{B}_{A,k}$ et $\mathcal{B}_{B,k}$ les boules unités de $U(\Theta_A) \rtimes G$ et $U(\Theta_B) \rtimes G$ tel que

$$\mathcal{B}_{A,k} = \mathbb{B}_{A,k} \cap U(\Theta_A) \rtimes G \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_{B,k} = \mathbb{B}_{B,k} \cap U(\Theta_B) \rtimes G$$

Soient $t \in \mathcal{B}_{B,k}$ et $b \otimes s \in \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k}$. On veut montrer que $t.b \otimes s \in \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k}$ afin de conclure que l'action est bornée, et il suffit pour cela de montrer que cet élément appartient à $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$ puisqu'on sait déjà qu'il appartient à $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$. Pour cela, on décompose t et s en utilisant le lemme 3.4.6

$$\begin{aligned} t = t_0 + t', \quad \text{avec} \quad q_k(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad t' \in \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})} \rtimes G \\ s = s_0 + s', \quad \text{avec} \quad q_k(s_0) = 0 \quad \text{et} \quad s' \in \widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})} \rtimes G \end{aligned}$$

Donc avec les notations du lemme précédent, $t_0 \in J_{B,k}$ et $s_0 \in J_{A,k}$. Alors par ce même lemme

$$t.b \otimes s = \underbrace{t_0.b \otimes s}_{\in \overline{B \otimes_A J_{A,k}}} + \underbrace{t'.b \otimes s_0}_{\in \overline{B \otimes_A J_{A,k}}} + t'.b \otimes s'.$$

Et $\overline{B \otimes_A J_{A,k}} \subset \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$. De plus, par l'action de $U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}}) \rtimes G$ sur $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \rtimes G)$ évoquée au début de la preuve de la proposition 4.1.4, on obtient une action

$$\widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{B}})} \rtimes G \curvearrowright \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})} \rtimes G)$$

et $t'.b \otimes s' \in \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\widehat{U(\pi^k \mathcal{L}_{\mathcal{A}})} \rtimes G) \subset \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$. Donc $t.b \otimes s \in \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$, et comme $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}$ est un réseau ouvert de $B \otimes_A (S_k \rtimes G) \subset (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\mathcal{S}_k \rtimes G))_K$, par [16] remarque 7.4 on a

$$(\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}) \cap (B \otimes_A (S_k \otimes G)) = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}.$$

Donc $t.b \otimes s \in (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{B}_{A,k}) \cap (B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)) = \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{A,k}$. $\square$

Proposition 4.1.8. *On définit le $\left(\widehat{D}(B,G), \widehat{D}(A,G)\right)$-bimodule*

$$\widehat{D}^G_{A \to B} := B \widehat{\otimes}^b_A \widehat{D}(A,G).$$

qu'on appellera bimodule de transfert de $f : A \to B$.

Démonstration. Par la proposition précédente, $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est un $U(\Theta_B) \rtimes G$-module bornologique. Par passage au complété bornologique et par le corollaire 3.4.12, l'espace $B\widehat{\otimes}^b_A(U(\Theta_A) \rtimes G)$ est un $\widehat{D}(B, G)$-module bornologique. De plus, par ce même corollaire on a

$$B\widehat{\otimes}^b_A(U(\Theta_A) \rtimes G) = B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{U(\Theta_A) \rtimes G}^b \simeq B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{D}(A, G)$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Proposition 4.1.9. *$\widehat{D}^G_{A\to B}$ est un $\widehat{D}(B, G)$-module coadmissible et on a*

$$\widehat{D}^G_{A\to B} \simeq \widehat{D}(B, G)\Big/\sum_{j=n+1}^{m} \widehat{D}(B, G).\partial_{y_j}.$$

Démonstration. Le $(U(\Theta_B) \rtimes G)$-module $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est de présentation fini par la proposition 4.1.2, il est donc isomorphe au conoyau d'un morphisme de $(U(\Theta_B) \rtimes G)$-modules libres de type fini $g : (U(\Theta_B) \rtimes G)^{m-n} \to (U(\Theta_B) \rtimes G)$. Puisque le foncteur $\widehat{\cdot}^b$ est exact à droite par la proposition 2.3.20, alors

$$B\widehat{\otimes}^b_A\widehat{D}(A, G) \simeq \widehat{B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)}^b \simeq \widehat{Coker(g)}^b \simeq Coker(\widehat{g}^b)$$

où $\widehat{g}^b : \widehat{D}(B, G)^{m-n} \to \widehat{D}(B, G)$ est un morphisme de $\widehat{D}(B, G)$-modules libres de type fini. Donc $\widehat{D}^G_{A\to B}$ est un $\widehat{D}(B, G)$-module de présentation finie, et par la proposition 2.2.3 c'est un $\widehat{D}(B, G)$-module coadmissible. $\square$

Proposition 4.1.10. *$B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est pseudo-nucléaire et*

$$\widehat{D}^G_{A\to B} \simeq B\widehat{\otimes}^h_A\widehat{D}(A, G).$$

Démonstration. Par la proposition 3.4.11 on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{B}_{A,k+1} \subset \pi^j\mathcal{B}_{A,k} + F_jU(\pi^{k+1}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \rtimes G.$$

Alors

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k+1} \subset \pi^j\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_{A,k} + \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} F_jU(\pi^{k+1}\mathcal{L}_{\mathcal{A}}) \rtimes G$$

et $B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes G)$ est pseudo-nucléaire. Donc par la proposition 2.4.8

$$\widehat{D}^G_{A\to B} \simeq B\widehat{\otimes}^h_A \widehat{D}(A,G). \qquad \square$$

4.2 Foncteur image inverse

Nous venons de développer des objets et des propriétés sur les algèbres affinoïdes qui vont nous servir à bien définir le foncteur image inverse. Soient X et Y des espaces analytiques rigides lisses respectivement de dimensions n et m, et G un groupe de Lie p-adique agissant continuement sur X et Y. Soit $f : Y \to X$ un morphisme lisse G-équivariant d'espaces rigides.

Pour se rapporter au cas local, nous reprenons la G-topologie Y^f_w définie dans le lemme 1.3.2. Nous essayons tout d'abord de retrouver les hypothèses de la section précédente pour pouvoir utiliser ses résultats.

Notation. *Soient $U \in X^c_w$ et $V \in Y^f_w$ tel que $f(V) \subset U$. Un sous-groupe H de G vérifie les hypothèses locales pour U et V si $\mathcal{O}_X(U)$, $\mathcal{O}_Y(V)$, H et $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(V)$ respectent les hypothèses de la section 4.1.*

Proposition 4.2.1. *Pour tout $V \in Y^f_w$ et pour tout $U \in X^c_w$ tel que $f(V) \subset U$, il existe un sous-groupe H de G tel que H vérifie les hypothèses locales pour U et V.*

Démonstration. Notons $A = \mathcal{O}_X(U)$, $B = \mathcal{O}_Y(V)$ et abusivement $f : A \to B$.

• Comme $G_U \cap G_V$ est un sous-groupe ouvert de G, par la proposition 3.5.2 il existe G' un sous-groupe ouvert compact de $G_U \cap G_V$.

• Par la proposition 1.3.3, il existe des systèmes locaux de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(y_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ de A et de B tel que $f(y_i) = x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

• Soit $\mathcal{A}$ un modèle formel G'-stable de A, qui existe par la proposition 3.2.2. Il existe un ensemble fini $S \subset A$ tel que $\mathcal{A} = \overline{\langle S\rangle}_R$. Soit $\overline{\langle T\rangle}_R$ un modèle formel de B, avec $T \subset B$ un ensemble fini. L'ensemble $\overline{\langle f(S), T\rangle}_R$ est encore un modèle formel de B, et par la proposition 3.2.2 il existe $\mathcal{B}$ un modèle formel G'-stable de B contenant $\overline{\langle f(S), T\rangle}_R$. Ainsi, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont G'-stables avec $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.

• Par la proposition 1.1.13, on redimensionne les systèmes de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et

$(y_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ tel que les $\mathcal{A}$-module et $\mathcal{B}$-module

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{A}.\partial_{x_i} \text{ et } \mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{B}.\partial_{y_j}$$

sont des $\mathcal{A}$-réseau et $\mathcal{B}$-réseau de Lie. De plus, par la proposition 3.2.5, il existe un sous-groupe ouvert compact H de G' tel que $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ sont H-stables.

Ainsi, le sous-groupe H permet de vérifier toutes les hypothèses voulues. □

Sous ces conditions, le bimodule de transfert $\widehat{D}^H_{A\to B}$ est bien défini par la proposition 4.1.8. Nous noterons lorsque H vérifie les hypothèses locales pour U et V

$$\widehat{D}^H_{V\to U} := \widehat{D}^H_{\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_Y(V)} = \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{D}(U,H).$$

Remarquons notamment que H est U-petit et V-petit.

Remarque. *Sous les notations de la proposition précédente, soit $U' \in X^c_w$ tel que $U' \subset U$, soit $V \in Y^f_w$ tel que $V' \subset V$ et $f(V') \subset U'$. Tout sous-groupe U'-petit et V'-petit de H vérifie les hypothèses locales pour U' et V'.*

C'est le cas en particulier si on prend $U' = U$ ou $V' = V$.

Lemme 4.2.2. *Soient $U, U' \in X^c_w$ avec $U' \subset U$ et H un sous-groupe U-petit et U'-petit de G. En considérant le morphisme d'inclusion $U' \to U$, H vérifie les hypothèses locales pour U' et U et on a*

$$\widehat{D}^H_{U'\to U} = \mathcal{O}_X(U')\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{D}(U,H) \simeq \widehat{D}(U',H).$$

Démonstration. En notant $D(U) = U(\Theta(U))$ et $D(U') = U(\Theta(U'))$ alors $\widehat{D}^H_{U'\to U}$ est par définition le complété bornologique du $(D(U') \rtimes H)$-module $\mathcal{O}_X(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (D(U) \rtimes G)$. Comme $\mathcal{O}_X(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} D(U) \simeq D(U')$ on obtient alors

$$\mathcal{O}_X(U') \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (D(U) \rtimes G) \simeq D(U') \rtimes G.$$

Donc par complétion bornologique on a l'isomorphisme voulu. □

Proposition 4.2.3. *Soient $V \in Y^f_w$ et $U, U' \in X^c_w$ tel que $f(V) \subset U' \subset U$, et un sous-groupe H de G vérifiant les hypothèses locales pour U et V, et pour U' et V. Alors il existe* *un isomorphisme de* $\left(\widehat{D}(V,H),\widehat{D}(U,H)\right)$*-bimodules tel que*

$$\widehat{D}^H_{V\to U'} \simeq \widehat{D}^H_{V\to U}.$$

Démonstration. Par le lemme précédent on a

$$\begin{aligned}\widehat{D}^H_{V\to U} &\simeq \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{D}(U,H)\\ &\simeq \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\left(\mathcal{O}_X(U')\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\widehat{D}(U,H)\right)\\ &\simeq \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\widehat{D}(U',H) \simeq \widehat{D}^H_{V\to U'}. \qquad \square\end{aligned}$$

Proposition 4.2.4. *Soient* $V, W \in Y_w^f$ *tel que* $W \subset V$*, et soit* $U \in X_w^c$ *tel que* $f(V) \subset U$*. Soit* H *un sous-groupe de* G *vérifiant les hypothèses locales pour* U *et* V*, et pour* U *et* W*. Alors il existe un isomorphisme de* $\left(\widehat{D}(W,H),\widehat{D}(U,H)\right)$*-module tel que*

$$\widehat{D}(W,H)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(V,H)}\widehat{D}^H_{V\to U} \simeq \widehat{D}^H_{W\to U}.$$

Démonstration. On a $\mathcal{O}_Y(W)\otimes_{\mathcal{O}_Y(V)}(D(V)\rtimes H) \simeq D(W)\rtimes H$ donc

$$(D(W)\rtimes H)\otimes_{D(V)\rtimes H}\mathcal{O}_Y(V)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}(D(U)\rtimes H) \simeq \mathcal{O}_Y(W)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}(D(V)\rtimes H).$$

Or $\mathcal{O}_Y(W)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}(D(V)\rtimes H)$ est pseudo-nucléaire par la proposition 4.1.10 et son complété bornologique est donc isomorphe à son complété séparé par la proposition 2.4.8. Donc

$$\begin{aligned}\widehat{D}^H_{W\to U} &\simeq \mathcal{O}_Y(W)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U)}(D(V)\rtimes H)\\ &\simeq (D(W)\rtimes H)\widehat{\otimes}^h_{D(V)\rtimes H}\left(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U)}(D(U)\rtimes H)\right)\\ &\simeq \widehat{D}(W,H)\widehat{\otimes}^h_{\widehat{D}(V,H)}\widehat{D}^H_{V\to U} \simeq \widehat{D}(W,H)\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(V,H)}\widehat{D}^H_{V\to U} \qquad \square\end{aligned}$$

Lemme 4.2.5. *Soient* $U \in X_w^c$ *et* H *un sous-groupe* U*-petit de* G*. Tout* $\widehat{D}(U,H)$*-module coadmissible est pseudo-nucléaire.*

Démonstration. Soit M un $\widehat{D}(U,H)$-module coadmissible. Par la proposition 3.3.11, $\widehat{D}(U,H)$ est $\mathcal{O}_X(U)$-nucléaire. Or par la proposition 2.4.4, M est également $\mathcal{O}_X(U)$-nucléaire. Ainsi M est pseudo-nucléaire par la proposition 2.4.7. $\square$

Proposition 4.2.6. *Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$. On pose le préfaisceau $f^*\mathcal{M}$ sur Y_{rig} défini pour tout $V \in Y_w^f$ par*

$$f^*\mathcal{M}(V) := \left(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X(V)} f^{-1}\mathcal{M}(V)\right)$$

et qu'on note $f^*\mathcal{M} := \left(\mathcal{O}_Y\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}\right)$.

Démonstration. Soient $V, W \in Y_w^f$ avec $V \subset W$. Puisque $\mathcal{M}$ est un faisceau, on a une application de restriction $\rho^{\mathcal{M}}_{VW} : \mathcal{M}(W) \to \mathcal{M}(V)$, et on a également l'application de restriction $\rho^{\mathcal{O}_Y}_{VW} : \mathcal{O}_Y(W) \to \mathcal{O}_Y(V)$. Alors le passage au complété bornologique de l'application $\rho^{\mathcal{O}_Y}_{VW} \otimes \rho^{\mathcal{M}}_{VW}$ donne une application de restriction $\rho_{VW} : f^*\mathcal{M}(W) \to f^*\mathcal{M}(V)$, qui munit $f^*\mathcal{M}$ d'une structure de préfaisceausur Y_w^f. C'est donc un préfaisceau sur Y_{rig} par la proposition 1.3.2. □

Théorème 4.2.7. *Pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$, on dispose du faisceau $f^*\mathcal{M}$ sur Y_{rig} défini par*

$$f^*\mathcal{M} := \left(\mathcal{O}_Y\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{M}\right)$$

et f^* est un foncteur

$$\begin{array}{cccc} f^* : & \mathcal{C}_{X/G} & \longrightarrow & \mathcal{C}_{Y/G} \\ & \mathcal{M} & \longmapsto & f^*\mathcal{M} \end{array}$$

qu'on appelle foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules G-équivariant par f.

Démonstration. Soit $\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{X/G}$.

• Soient $V \in Y_w^f$ et $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Soit H un sous-groupe de G vérifiant les hypothèses locales pour U et V. Par la proposition 2.3.21 on écrit

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\mathcal{M}(U')$$

où la limite est prise sur les $U' \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U'$. On restreint les éléments du système inductif précédent aux $U' \in U_w^c$ et on a

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U')}\mathcal{M}(U').$$

Comme $\mathcal{M}$ est coadmissible, pour tout $U' \in U_w^c$ et pour tout H sous-groupe U'-petit de G, $\mathcal{M}(U')$ est un $\widehat{D}(U', H')$-module coadmissible et donc $\mathcal{M}(U')$ est pseudo-nucléaire par le lemme 4.2.5. Ainsi, l'espace $\mathcal{O}_Y(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(U')} \mathcal{M}(U')$ est pseudo-nucléaire et par le théorème 2.4.8 on a l'isomorphisme

$$f^*\mathcal{M}(V) \simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U')}\mathcal{M}(U').$$

Comme $\mathcal{M}$ est coadmissible et que (U,H) est petit, alors $\mathcal{M}_{|U} \simeq Loc_{U,H}(\mathcal{M}(U))$ et pour tout (U',H') petit dans U, on a

$$\mathcal{M}(U') \simeq \widehat{D}(U',H')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U) \simeq \widehat{D}(U',H')\widehat{\otimes}^h_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U)$$

grâce à la proposition 2.2.9 pour le deuxième isomorphisme. Ainsi, comme H' vérifie également les hypothèses locales pour U' et V, et en utilisant la proposition 4.2.3 on obtient

$$\begin{aligned} f^*\mathcal{M}(V) &\simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^h_{\mathcal{O}_X(U')}\widehat{D}(U',H')\widehat{\otimes}^h_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U) \\ &\simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \widehat{D}^{H'}_{V\to U'}\widehat{\otimes}^h_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U) \\ &\simeq \varinjlim_{f(V)\subset U'\subset U} \widehat{D}^{H'}_{V\to U}\widehat{\otimes}^h_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U) \simeq \widehat{D}^{H'}_{V\to U}\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U). \end{aligned}$$

On constate alors que $f^*\mathcal{M}(V)$ est un $\widehat{D}(V,H)$-module coadmissible pour tout $V \in Y^f_w$. Soit $W \in Y^f_w$ tel que $W \subset V$ et soit H' un sous-groupe W-petit de H. Alors H' vérifie les hypothèses locales pour U et W, et en utilisant la proposition 4.2.4 on a

$$\begin{aligned} Loc_{V,H}(f^*\mathcal{M}(V))(W) &\simeq \widehat{D}(W,H')\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(V,H')}\widehat{D}^{H'}_{V\to U}\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U) \\ &\simeq \widehat{D}^{H'}_{W\to U}\widehat{\otimes}_{\widehat{D}(U,H')}\mathcal{M}(U) \simeq f^*\mathcal{M}(W). \end{aligned}$$

Donc pour tout $V \in Y^f_w$ il existe H un sous-groupe V-petit tel que

$$f^*\mathcal{M}_{|V} \simeq Loc_{V,H}(f^*\mathcal{M}(V)).$$

• Ainsi, $f^*\mathcal{M}$ est un préfaisceau de $\widehat{D}_Y$-module sur Y^f_w, puisque pour tout $V \in Y^f_w$, $f^*\mathcal{M}(V)$ est un $\widehat{D}_Y(V)$-module. C'est en réalité un faisceau de $\widehat{D}_Y$-module puisque pour tout $V \in Y^f_w$, on a $f^*\mathcal{M} \simeq Loc_{V,H}(f^*\mathcal{M}(V))$ ce qui permet de bons recollements. Comme Y^f_w est une base pour Y_{rig} par la proposition 1.3.2, on conclut par le théorème 1.2.9 que

$f^*\mathcal{M}$ est un faisceau de $\widehat{D}_Y$-module sur Y_{rig}.

De plus $f^*\mathcal{M}$ est muni d'une structure équivariante. Soit $g \in G$, comme $\mathcal{M}$ est un G-$\widehat{D}_X$-module il existe $g^{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to g^{\#}\mathcal{M}$ et on pose $g^{f^*\mathcal{M}} := g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(g^{\mathcal{M}})$. Pour tout $V \in Y_{rig}$ on a

$$g^{f^*\mathcal{M}}(V) : f^*\mathcal{M}(V) \longrightarrow \varinjlim_{f(V)\subset U} \mathcal{O}_Y(gV)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(gU)}\mathcal{M}(gU).$$

Or par G-équivariance de f on a

$$\varinjlim_{f(V)\subset U} \mathcal{O}_Y(gV)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(gU)}\mathcal{M}(gU) \simeq \varinjlim_{f(gV)\subset U} \mathcal{O}_Y(gV)\widehat{\otimes}^b_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{M}(U) \simeq f^*\mathcal{M}(gV).$$

Donc $g^{f^*\mathcal{M}} : f^*\mathcal{M} \to g^{\#}f^*\mathcal{M}$ et pour tout $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned}(gh)^{f^*\mathcal{M}} &= (gh)^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\left((gh)^{\mathcal{M}}\right) = \left(h^{\#}(g^{\mathcal{O}_Y}) \circ h^{\mathcal{O}_Y}\right)\widehat{\otimes}^b f^{-1}\left(h^{\#}(g^{\mathcal{M}}) \circ h^{\mathcal{M}}\right) \\ &= \left(h^{\#}(g^{\mathcal{O}_Y})\widehat{\otimes}^b f^{-1}(h^{\#}g^{\mathcal{M}})\right) \circ \left(h^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(h^{\mathcal{M}})\right) \\ &= h^{\#}(g^{f^*\mathcal{M}}) \circ h^{f^*\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

Donc $f^*\mathcal{M}$ est muni d'une structure équivariante et est un faisceau G-équivariant sur Y_{rig}.

Ainsi $f^*\mathcal{M}$ est un G-$\widehat{D}_Y$-module, donc $f^*\mathcal{M} \in \mathcal{C}_{Y/G}$.

• Soient $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{C}_{X/G}$. Soit $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morphisme de G-$\widehat{D}_X$-modules. Soient $V \in Y_w^f$ et $U \in X_w^c$ tel que $f(V) \subset U$. Soit H un sous-groupe de G vérifiant les hypothèses locales pour U et V. Notons $A = \mathcal{O}_X(U)$, $B = \mathcal{O}_Y(V)$ et $M = \mathcal{M}(U)$, $N = \mathcal{N}(U)$. En notant $I_{\mathcal{O}_Y}$ le morphisme identité sur le faisceau $\mathcal{O}_Y$, et par $\mathcal{O}_X$-linéarité de φ, on a le morphisme

$$(I_{\mathcal{O}_Y}(V) \otimes \varphi(U)) : B \otimes_A M \to B \otimes_A N.$$

Alors le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(U(\Theta_B) \rtimes H) \times (B \otimes_A M) \arrow[r, "\mathrm{id} \times (I_{\mathcal{O}_Y}(V)\otimes\varphi(U))"] \arrow[d] & (U(\Theta_B) \rtimes H) \times (B \otimes_A N) \arrow[d] \\
(B \otimes_A M) \arrow[r, "I_{\mathcal{O}_Y}(V)\otimes\varphi(U)"] & (B \otimes_A N)
\end{tikzcd}$$

où id : $U(\Theta_B) \rtimes H \to U(\Theta_B) \rtimes H$ est l'identité. Les flèches verticales sont obtenues par l'action de la proposition 4.1.7 car $B \otimes_A M \simeq (B \otimes_A (U(\Theta_A) \rtimes H)) \otimes_{U(\Theta_A)\rtimes H} M$. Par passage à la complétion bornologique, comme les applications sont bornées, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widehat{D}(B,H) \times (B\widehat{\otimes}^b_A M) & \xrightarrow{\widehat{\mathrm{id}}^b \times (I_{\mathcal{O}_Y}(V)\widehat{\otimes}^b \varphi(U))} & \widehat{D}(B,H) \times (B\widehat{\otimes}^b_A N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (B\widehat{\otimes}^b_A M) & \xrightarrow{\quad I_{\mathcal{O}_Y}(V)\widehat{\otimes}^b \varphi(U) \quad} & (B\widehat{\otimes}^b_A N). \end{array}$$

Par passage à la limite inductive, on obtient une application

$$(I_{\mathcal{O}_Y}(V) \otimes f^*\varphi) : \Big(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X(V)} f^{-1}\mathcal{M}(V)\Big) \longrightarrow \Big(\mathcal{O}_Y(V)\widehat{\otimes}^b_{f^{-1}\mathcal{O}_X(V)} f^{-1}\mathcal{N}(V)\Big)$$

qui est $\widehat{D}(U,H)$-linéaire. Le morphisme de faisceau $f^*\varphi := I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\varphi$ ainsi défini est $\widehat{D}_X$-linéaire. De plus, pour tout $g \in G$ on obtient par G-équivariance de φ

$$\begin{aligned} g^{\#}(f^*\varphi) \circ g^{f^*\mathcal{M}} &= g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(g^{\#}\varphi \circ g^{\mathcal{M}}) \\ &= g^{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(g^{\mathcal{N}} \circ \varphi) = g^{f^*\mathcal{N}} \circ f^*\varphi. \end{aligned}$$

Donc $f^*\varphi$ est G-équivariant et c'est un morphisme de G-$\widehat{D}_Y$-modules. On constate de plus que si $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est l'identité sur $\mathcal{M}$, alors $f^*\varphi$ est l'identité sur $f^*\mathcal{M}$. De même si $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{P}$, alors

$$f^*(\psi \circ \varphi) = I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}(\psi \circ \varphi) = (I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\psi) \circ (I_{\mathcal{O}_Y}\widehat{\otimes}^b f^{-1}\varphi) = f^*\psi \circ f^*\varphi.$$

Ainsi f^* est un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}_{X/G}$ dans la catégorie $\mathcal{C}_{Y/G}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Konstantin ARDAKOV, « Equivariant D-modules on rigid analytic spaces », in : *Astérisque 423* (2021).

[2] Konstantin ARDAKOV et Simon J. WADSLEY, « $\widehat{D}$-modules on rigid analytic spaces. I. », in : *J. Reine Angew. Math.* 747 (2019), p. 221-275.

[3] Federico BAMBOZZI, « Closed graph theorems for bornological spaces », in : *Khayyam J. Math. 2.1* (2016), p. 81-111.

[4] Federico BAMBOZZI, « On a generalization of affinoid varieties », Ph.D. thesis, University of Padova, 2013.

[5] Federico BAMBOZZI et Oren BEN-BASSAT, « Dagger geometry as Banach algebraic geometry », in : *J. Number Theory* 162 (2016), p. 391-462.

[6] Thomas BITOUN et Andreas BODE, « Extending meromorphic connections to coadmissible $\widehat{D}$-modules. », in : *J. Reine Angew. Math.* 778 (2021), p. 97-118.

[7] Andreas BODE, *Six Operations for $\widehat{D}$-modules on rigid analytic spaces*, 2021.

[8] S. BOSCH, U. GÜNTZER et R. REMMERT, *Non-Archimedean analysis*, t. 261, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[9] Siegfried BOSCH, *Lectures on formal and rigid geometry*, t. 2105, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Cham, 2014.

[10] J. D. DIXON et al., *Analytic pro-p groups*, Second, t. 61, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[11] Ryoshi HOTTA, Kiyoshi TAKEUCHI et Toshiyuki TANISAKI, *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, Japanese, t. 236, Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008, p. xii+407.

[12] Hideyuki MATSUMURA, *Commutative ring theory*, Second, t. 8, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Translated from the Japanese by M. Reid, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[13] Fabienne Prosmans et Jean-Pierre Schneiders, *A homological study of bornological spaces*, 2000.

[14] George S. Rinehart, « Differential forms on general commutative algebras », in : *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), p. 195-222.

[15] Tobias Schmidt, « On locally analytic Beilinson-Bernstein localization and the canonical dimension », in : *Math. Z.* 275.*3-4* (2013), p. 793-833.

[16] Peter Schneider, *Nonarchimedean functional analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[17] Peter Schneider et Jeremy Teitelbaum, « Algebras of p-adic distributions and admissible representations », in : *Invent. Math.* 153.*1* (2003), p. 145-196.

[18] *Séminaire Banach*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 277, Tenu à l'École Normale Supérieure en 1962–1963, Edité par C. Houzel, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

Titre : Image inverse pour les $\widehat{D}$-modules équivariants sur les espaces analytiques rigides

Mot clés : Espaces analytiques rigides, $\widehat{D}$-modules équivariants, foncteur image inverse, espaces bornologiques

Résumé : En géométrie analytique rigide, on étudie certaines propriétés des $\widehat{D}$-modules comme la coadmissibilité ou l'équivariance. Lorsque l'on construit un foncteur image inverse pour les $\widehat{D}$-modules, on s'intéresse aux propriétés que ce foncteur va préserver. D'autres travaux ont déjà permis d'établir dans un certain cadre un foncteur image inverse de $\widehat{D}$-modules préservant la coadmissibilité. Etant donné un groupe de Lie p-adique G agissant continuement sur des espaces analytiques rigides lisses, et un morphisme lisse G-équivariant entre ces espaces, l'objectif de ce manuscrit est de construire une image inverse de $\widehat{D}$-modules G-équivariants, en cohérence avec les images inverses construites précédemment.

Title: Inverse image functor for equivariant $\widehat{D}$-modules on rigid analytic spaces

Keywords: Rigid analytic spaces, equivariant $\widehat{D}$-modules, inverse image functor, bornological spaces

Abstract: In rigid analytic geometry, we study certain properties of $\widehat{D}$-modules, such as coadmissibility or equivariance. When constructing an inverse image functor for $\widehat{D}$-modules, we are interested in the properties that this functor will preserve. Other work has already established a coadmissibility-preserving inverse image functor for $\widehat{D}$-modules in a certain framework. Given a p-adic Lie group G acting continuously on smooth rigid analytic spaces, and a smooth G-equivariant morphism between these spaces, the aim of this manuscript is to construct an inverse image of G-equivariant $\widehat{D}$-modules, consistent with the inverse images constructed previously.