Algorithmus 5.17: Netzwerk Simplex Algorithmus für MCFP

(Input) *Netzwerk* $(N, A; \underline{b}; \underline{0}, \underline{u}, \underline{c})$, $G = (N, A)$ *zusammenhängender Digraph,*

zulässiger Basisfluss $\underline{x}$ *und duale Basislösung* $\underline{\pi}$ *bezüglich* A_B, A_L *und* A_U.

(1) **Optimalitätstest:**
Bestimme $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j \quad \forall\ (i,j) \notin A_B$.
Falls $\bar{c}_{ij} \geq 0\ \ \forall\ (i,j) \in A_L$ *und* $\bar{c}_{ij} \leq 0\ \ \forall\ (i,j) \in A_U$
(STOP), $\underline{x}$ *ist ein optimaler Fluss für MCFP.*

(2) *Wähle* $a_s = (p,q) \in A_L$ *mit* $\bar{c}_{pq} < 0$ *und finde eine Orientierung von* C_{a_s}, *so dass* $a_s \in C^+_{a_s}$
oder
wähle $a_s = (p,q) \in A_U$ *mit* $\bar{c}_{pq} > 0$ *und finde eine Orientierung von* C_{a_s} *so dass* $a_s \in C^-_{a_s}$.

(3) **Flussveränderung:**

$$\begin{aligned} \delta_1 &= u_{pq}, \\ \delta_2 &= \min\{x_{ij} : (i,j) \in C^-_{a_s}\}, \\ \delta_3 &= \min\{u_{ij} - x_{ij} : (i,j) \in C^+_{a_s}\}, \\ \delta &= \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}, \\ x_{ij} &:= \begin{cases} x_{ij} + \delta & \text{falls } (i,j) \in C^+_{a_s}, \\ x_{ij} - \delta & \text{falls } (i,j) \in C^-_{a_s}, \\ x_{ij} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

(4) **Veränderung von** $\mathbf{A_B}, \mathbf{A_L}, \mathbf{A_U}$:
Sei a_r *eine Kante, in der das Minimum bei der Bestimmung von* δ *angenommen wird. Aktualisiere* A_B, A_L *und* A_U *anahnd der folgenden Tabelle (ein* $*$ *bedeutet, dass keine Veränderung notwendig ist):*

	Veränderung von		
	A_B	A_L	A_U
falls			
$a_s = (p,q) \in A_L$			
$\delta = \delta_1$	$*$	$A_L \setminus a_s$	$A_U + a_s$
$\delta = \delta_2$	$A_B \setminus a_r + a_s$	$A_L \setminus a_s + a_r$	$*$
$\delta = \delta_3 < \delta_1$	$A_B \setminus a_r + a_s$	$A_L \setminus a_s$	$A_U + a_r$
$a_s = (p,q) \in A_U$			
$\delta = \delta_1$	$*$	$A_L + a_s$	$A_U \setminus a_s$
$\delta = \delta_2 < \delta_1$	$A_B \setminus a_r + a_s$	$A_L + a_r$	$A_U \setminus a_s$
$\delta = \delta_3$	$A_B \setminus a_r + a_s$	$*$	$A_U \setminus a_s + a_r$

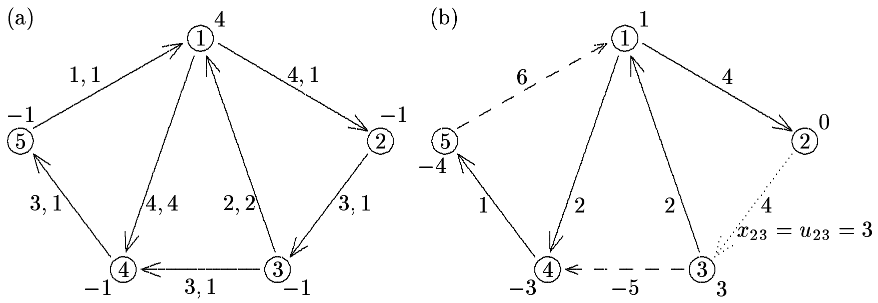
(5) **Veränderung von** $\underline{\pi}$:
Falls $a_s \neq a_r$, *sei* $Q_{a_r} = (X, \bar{X})$ *der durch* a_s *und* a_r *definierte Schnitt von* T_B *und setze*

$$\pi_i := \begin{cases} \pi_i & & i \in X \\ \pi_i + \bar{c}_{pq} & \text{falls} & i \in \bar{X} \text{ und } p \in \bar{X}, q \in X \\ \pi_i - \bar{c}_{pq} & & i \in \bar{X} \text{ und } p \in X, q \in \bar{X}. \end{cases}$$

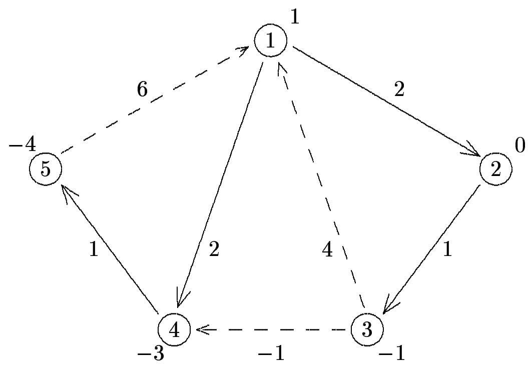
Goto Step (1).

Beispiel 5.18:

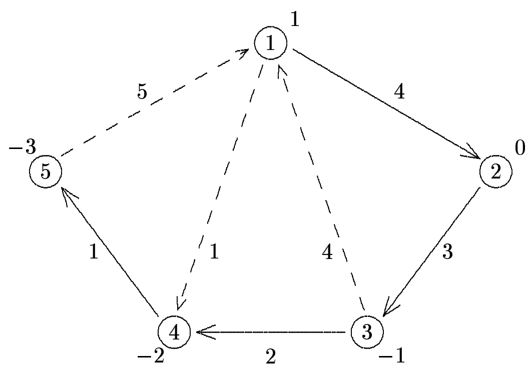
Gegeben sei das Netzwerk aus Teil (a) der folgenden Abbildung mit Kantenkoeffizienten u_{ij}, c_{ij} und Bedarf / Überschuss $b(i)$. Teil (b) der Abbildung zeigt einen zulässigen Basisfluss $\underline{x}$, der als Startlösung verwendet werden kann: A_B (durchgezogene Linien) mit x_{ij}; A_U (gepunktete Linien) und A_L (gestrichelte Linien) mit $\bar{c}_{ij}$, sowie Knotenpotentiale π_i. OBdA sei Knoten 2 die Wurzel von T_B.



Iteration 1: $a_s = (2,3) \in A_U$,
$C_{a_s} = (1,3,2,1)$ mit $C^+_{a_s} = \emptyset$, $C^-_{a_s} = \{(3,1),(2,3),(1,2)\}$,
$\delta = \delta_2 = x_{31} = 2$.
Das neue T_B - Netzwerk ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Iteration 2: $a_s = (3,4) \in A_L$,
$C_{a_s} = (1,2,3,4,1)$ mit $C^+_{a_s} = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$, $C^-_{a_s} = \{(1,4)\}$,
$\delta = \delta_2 = \delta_3 = 2$.
Wähle $a_r = (1,4)$.
(Wir hätten auch $a_r = (1,2)$ oder $a_r = (2,3)$ wählen können.)
Das neue T_B - Netzwerk ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Iteration 3: Da alle $\bar{c}_{ij}$ die Optimalitätsbedingung erfüllen, ist $\underline{x}$ ein optimaler Fluss.