Analysis auf Mannigfaltigkeiten

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

1.1 Topologische Räume

Definition

Eine Menge X heißt ein ***topologischer Raum***, wenn es zu jedem Element $x \in X$ ein nicht-leeres System $\mathscr{U}_x$ von Teilmengen $U \subset X$ mit $x \in U$ (sogenannten „Elementarumgebungen“) gibt, so dass gilt:

1. Sind $U_1, U_2 \in \mathscr{U}_x$, so gibt es ein $V \in \mathscr{U}_x$ mit $V \subset U_1 \cap U_2$.
2. Ist $U \in \mathscr{U}_x$ und $y \in U$, so gibt es ein $V \in \mathscr{U}_y$ mit $V \subset U$.

Eine Menge $W \subset X$ heißt ***Umgebung*** von $x \in X$, falls es eine Elementarumgebung $U \in \mathscr{U}_x$ mit $U \subset W$ gibt. Die Elemente von X nennt man ***Punkte***.

1.1.1. Satz

Die Umgebungen in einem topologischen Raum besitzen folgende Eigenschaften:

1. *Jeder endliche Durchschnitt von Umgebungen eines Punktes $x_0 \in X$ ist wieder eine Umgebung von x_0.*
2. *Ist V eine Umgebung von x_0 und W eine Elementarumgebung von x_0 mit $W \subset V$, so ist V auch Umgebung eines jeden Punktes $y \in W$.*

Der Beweis ist trivial.

1.1.2. Beispiel

Ein ***metrischer Raum*** ist eine Menge X, zusammen mit einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (der sogenannten „Metrik“), so dass gilt:

1. $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$, und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Ein Beispiel ist der Raum $X = \mathbb{R}^n$ mit der Metrik $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

Ist X ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$, so nennt man

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \,:\, d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

eine ***ε-Umgebung*** von x_0.

Setzt man $\mathscr{U}_{x_0} := \{U_\varepsilon(x_0) \,:\, \varepsilon > 0\}$, so wird X damit zu einem topologischen Raum.

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $M \subset X$ heißt ***offen***, falls es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U von x mit $U \subset M$ gibt. Eine Menge $A \subset X$ heißt ***abgeschlossen***, falls $X \setminus A$ offen ist.

Das System aller offenen Mengen von X werde mit $\mathscr{O}_X$ bezeichnet.

1.1.3. Satz

Die offenen Mengen in einem topologischen Raum X haben folgende Eigenschaften:

1. *X und $\varnothing$ sind offen.*
2. *Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen ist wieder offen.*
3. *Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist wieder offen.*

BEWEIS: 1) Bei der leeren Menge ist nichts zu zeigen. Und da jeder Punkt von X eine Umgebung besitzt, ist X offen.

2) M_1, M_2 seien offen. Ist $x_0 \in M_1 \cap M_2$, so gibt es Umgebungen $U_1 = U_1(x_0) \subset M_1$ und $U_2 = U_2(x_0) \subset M_2$. Dann ist $U_1 \cap U_2$ eine Umgebung von x_0, die in $M_1 \cap M_2$ enthalten ist. Also ist $M_1 \cap M_2$ offen.

3) Sei $(M_\iota)_{\iota \in I}$ ein System offener Mengen. Ist $x_0 \in M := \bigcup_{\iota \in I} M_\iota$, so liegt x_0 in einer Menge M_{ι_0}. Dann gibt es eine Umgebung $U = U(x_0) \subset M_{\iota_0}$. Weil U erst recht in M liegt, ist damit nachgewiesen, dass M offen ist. ∎

Bemerkung: Man kann einen topologischen Raum auch als eine Menge X mit einem System $\mathscr{O}_X$ von offenen Mengen definieren. Eine Teilmenge $M \subset X$ wird Umgebung von x_0 genannt, falls es eine offene Menge U mit $x_0 \in U \subset M$ gibt. Der Umgebungsbegriff ist auf diese Weise festgelegt, nicht aber der Begriff der Elementarumgebung. Zum Beispiel können im $\mathbb{R}^n$ sowohl Kugeln als auch Quader benutzt werden.

Definition

Ein topologischer Raum X heißt ein ***Hausdorffraum***, falls es zu je zwei verschiedenen Punkten von X disjunkte Umgebungen gibt.

Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum.

Die Hausdorff-Eigenschaft ist wichtig, wenn man mit Folgen arbeiten möchte. Wie üblich heißt ein Element $x_0 \in X$ ***Grenzwert*** einer Folge von Punkten x_n, wenn es zu jeder Umgebung $U = U(x_0)$ ein n_0 gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$ gilt. In einem Hausdorffraum ist der Grenzwert (wenn er existiert) eindeutig bestimmt.

Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***stetig*** in $x_0 \in X$, falls es zu jeder Umgebung $V = V(f(x_0)) \subset Y$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ mit $f(U) \subset V$ gibt.

f heißt stetig auf X, falls f in jedem Punkt von X stetig ist. Ist f außerdem bijektiv und f^{-1} stetig, so spricht man von einem ***Homöomorphismus*** (oder einer ***topologischen Abbildung***.

Auf metrischen Räumen entspricht die Definition der Stetigkeit in einem Punkt dem üblichen ε-δ-Kriterium. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen beliebigen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ auch $f^{-1}(V)$ offen in X ist.

Definition

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Ein System $\mathscr{U}$ von Umgebungen von x_0 heißt ***Umgebungsbasis*** von x_0, falls es zu jeder Umgebung $U = U(x_0)$ eine Umgebung $V \in \mathscr{U}$ mit $x_0 \in V \subset U$ gibt. Der Raum X erfüllt das ***1. Abzählbarkeitsaxiom***, falls jeder Punkt von X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Bemerkungen:

1. Jeder metrische Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Man wähle einfach die Umgebungen $U_{1/n}(x_0)$ mit $n \in \mathbb{N}$.

2. Erfüllt X das 1. Abzählbarkeitsaxiom und ist Y ein beliebiger topologischer Raum, so ist $f : X \to Y$ genau dann in $x_0 \in X$ stetig, wenn für jede Folge (x_n) in X, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

   Beweis: 1) Sei f stetig in x_0 und (x_n) eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Sei V eine Umgebung von $f(x_0)$. Dann gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subset V$. Ist n_0 groß genug, so liegt x_n für $n \geq n_0$ in U, also $f(x_n)$ in V. Das zeigt, dass $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

   2) Nun sei das Kriterium erfüllt, V eine Umgebung von $f(x_0)$ und (U_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x_0. Wenn f in x_0 nicht stetig ist, dann gibt es in jedem Durchschnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ ein x_n mit $f(x_n) \notin U$. Die Folge (x_n) konvergiert gegen x_0, aber $(f(x_n))$ nicht gegen $f(x_0)$. Das ist ein Widerspruch.

   ■

Ein topologischer Raum heißt ***kompakt***, falls er ein Hausdorffraum ist und jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält.

1.1.4. Satz

Sei X ein kompakter Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann besitzt jede unendliche Folge in X eine konvergente Teilfolge.

BEWEIS: Sei (x_n) eine Folge in X. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in X$, so dass jede Umgebung von x_0 unendlich viele Folgenglieder enthält. Sei (U_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x_0. Dann kann man in jedem Durchschnitt $U_1 \cap \ldots \cap U_k$ ein Element x_{n_k} der Folge finden. Das liefert eine Teilfolge, die gegen x_0 konvergiert. ■

1.1.5. Satz

Sei X ein beliebiger topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist (x_n) eine Folge in A, die gegen einen Punkt $x_0 \in X$ konvergiert, so gehört x_0 zu A.

BEWEIS: 1) Sei A abgeschlossen und (x_n) eine Folge in A, die gegen ein $x_0 \in X$ konvergiert. Wenn x_0 in der offenen Menge $X \setminus A$ liegt, so gibt es eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X \setminus A$. Andererseits müssen die Punkte x_n für große n in U liegen. Das ist ein Widerspruch.

2) A erfülle das Kriterium. Wir müssen zeigen, dass $X \setminus A$ offen ist. Sei $x_0 \in X \setminus A$ und (U_n) eine abzählbare Umgebungsbasis von x_0. Wenn jede der Umgebungen U_n einen Punkt $x_n \in A$ enthält, dann gewinnt man eine Folge, die gegen x_0 konvergiert. Das bedeutet, dass x_0 in A liegen muss. Widerspruch! Also liegt eine komplette Umgebung von x_0 in $X \setminus A$. ■

Definition

Sei X ein topologischer Raum. Ein System $\mathscr{B}$ von offenen Teilmengen von X heißt ***Basis der Topologie*** von X, falls jede offene Menge in X Vereinigung von Elementen aus $\mathscr{B}$ ist. Der Raum X erfüllt das ***2. Abzählbarkeitsaxiom***, falls er eine abzählbare Basis besitzt.

Erfüllt ein Raum das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so erfüllt er auch das erste. Die Umkehrung gilt nicht.Selbst metrische Räume brauchen das 2. Axiom nicht zu erfüllen. Sie tun dies aber, wenn sie eine abzählbare dichte Teilmenge enthalten (M ist dicht in X, wenn $\overline{M} = X$ ist). Insbesondere erfüllt der $\mathbb{R}^n$ das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

Definition

Ein Hausdorffraum X heißt ***lokal-kompakt***, falls jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

1.1.6. Satz

Der Hausdorffraum X sei lokal-kompakt und erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dann gilt:

1. *X besitzt eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = (B_j)_{j \in J}$, so daß alle Mengen $\overline{B}_j$ kompakt sind.*

2. *Es gibt eine Folge (A_k) von kompakten Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:*

   (a) $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

   (b) $A_k \subset \mathring{A}_{k+1}$.

Beweis: 1) Sei $(B_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Basis von X, und

$$J := \{ i \in I \,:\, \overline{B}_i \text{ kompakt } \}.$$

Wir müssen zeigen, daß $(B_j)_{j \in J}$ immer noch eine Basis von X ist.

Sei $S \subset X$ offen und $x \in S$. Dann gibt es eine offene Umgebung $W = W(x)$ und eine kompakte Menge K mit $W \subset K$. Also ist $\overline{W}$ kompakt. Weiter ist W Vereinigung von gewissen Basis-Elementen B_i, $i \in I_0$. Weil dann $\overline{B}_i \subset \overline{W}$ kompakt ist, gehören alle $i \in I_0$ zu J. Da S Vereinigung solcher W's ist, folgt die Behauptung.

2) Nach (1) gibt es eine abzählbare Basis $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von X, so daß $\overline{U}_n$ kompakt für jedes n ist. Wir setzen

$$A_1 := \overline{U}_1.$$

Ist A_k konstruiert und m_k die kleinste Zahl $\geq k+1$, so daß $A_k \subset \bigcup_{n=1}^{m_k} U_n$ ist, so setzen wir

$$A_{k+1} := \bigcup_{n=1}^{m_k} \overline{U}_n.$$

Die Mengen A_k sind dann kompakt und haben die gewünschten Eigenschaften. ∎

1.2 Topologische Mannigfaltigkeiten

Seien $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ und $\mathscr{V} = (V_j)_{j\in J}$ zwei offene Überdeckungen von X. $\mathscr{V}$ heißt eine ***Verfeinerung*** von $\mathscr{U}$, falls es eine Abbildung $\tau : J \to I$ gibt, so dass $V_j \subset U_{\tau(j)}$ für alle $j \in J$ gilt.

Die Überdeckung $\mathscr{V} = (V_j)_{j\in J}$ heißt ***lokal-endlich***, falls es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ gibt, so dass $V_j \cap U$ nur für endlich viele Indizes $j \in J$ nicht leer ist.

Definition

Ein topologischer Raum heißt ***parakompakt***, falls er ein Hausdorffraum ist und jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

1.2.1. Satz

Sei X ein parakompakter topologischer Raum. Ist $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $x_0 \in X \setminus A$, so gibt es eine offene Umgebung $U = U(x_0)$ und eine offene Menge V mit $A \subset V$ und $U \cap V = \varnothing$.

Beweis: Zu jedem Punkt $x \in A$ gibt es eine offene Umgebung $U_x = U_x(x)$ und eine offene Umgebung $V_x = V_x(x_0)$ mit $U_x \cap V_x = \varnothing$. Dann gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung $(W_i)_{i\in I}$ der Überdeckung von X durch $X \setminus A$ und die Mengen U_x.

Sei V_0 eine Umgebung von x_0, die nur endlich viele W_i trifft, etwa $W_1, \ldots, W_N$. Zu jedem $i \in \{1, \ldots, N\}$ gibt es ein x_i mit $W_i \subset V_{x_i}$. Dann setze man

$$U := \bigcup_{W_i \cap A \neq \varnothing} W_i \quad \text{und} \quad V := V_0 \cap V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_N}.$$

Offensichtlich ist $U \cap V = \varnothing$. ∎

Definition

Eine offene Menge V liegt ***relativ-kompakt*** in der offenen Menge U (in einem topologischen Raum X), falls $\overline{V}$ kompakt und in U enthalten ist. Man schreibt dann: $V \subset\subset U$.

1.2.2. Satz

Sei X ein lokal-kompakter topologischer Raum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist X parakompakt.

*Zu jeder offenen Überdeckung von X gibt es eine **abzählbare** lokal-endliche Verfeinerung, die aus **relativ-kompakten** offenen Teilmengen von X besteht.*

Beweis: Sei (A_k) eine Folge von kompakten Teilmengen von X, so dass gilt:

1. $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.
2. $A_k \subset \mathring{A}_{k+1}$.

Sei (U_i) eine offene Überdeckung von X. Die offenen Mengen

$$W_{i,k} := U_i \cap (\mathring{A}_{k+1} \setminus A_{k-2})$$

überdecken die kompakte Menge $A_k \setminus \mathring{A}_{k-1}$. Das erreicht man aber schon mit mit endlich vielen dieser Mengen, von denen jede in einem geeigneten U_i liegt. Außerdem überdecken die Mengen $W_i := U_i \cap \mathring{A}_3$ die kompakte Menge A_2, und auch von denen kann man endlich viele auswählen.

Nimmt man die ausgewählten Mengen zusammen, so erhält man eine abzählbare Überdeckung von X, die eine Verfeinerung von (U_i) darstellt. Diese Überdeckung ist lokal-endlich, denn nur endlich viele Überdeckungselemente treffen $\mathring{A}_{k+1} \setminus A_{k-2}$.

Weil $W_{i,k}$ in der kompakten Menge A_{k+1} und W_i in A_3 liegt, liegen alle Überdeckungselemente relativ-kompakt in X. ∎

1.2.3. Lemma

Sei X ein parakompakter topologischer Raum. Ist $K \subset X$ kompakt und U eine offene Umgebung von K, so gibt es eine offene Umgebung W von K, die relativ-kompakt in U liegt.

Beweis: Zu jedem $x \in K$ gibt es eine offene Umgebung $U_x = U_x(x)$ und eine offene Umgebung $V_x = V_x(X \setminus U)$ mit $U_x \cap V_x = \varnothing$. Außerdem gibt es (weil X lokal-kompakt ist) eine offene Umgebung U'_x von x, so dass $\overline{U'_x}$ kompakt ist.

Sei $W_x := U_x \cap U'_x$. Dann ist W_x eine offene Umgebung von x, $\overline{W_x}$ kompakt und $W_x \cap V_x = \varnothing$. Die kompakte Menge K wird von endlich vielen Mengen $W_{x_1}, \ldots, W_{x_N}$ überdeckt. Sei $W := W_{x_1} \cup \ldots \cup W_{x_N}$. Dann ist W eine offene Umgebung von K, $\overline{W}$ kompakt und $W \cap (V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_N}) = \varnothing$, also $\overline{W} \subset U$. ∎

1.2.4. Satz

Sei X ein parakompakter topologischer Raum. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathscr{V} = (V_k)_{k \in K}$ mit einer Verfeinerungsabbildung $\tau : K \to I$, so dass V_k (für jedes $k \in K$) relativ-kompakt in $U_{\tau(k)}$ liegt.

Beweis: Mit Hilfe des Lemmas kann man eine (beliebige) Verfeinerung $\mathscr{W} = (W_j)_{j \in J}$ mit einer Verfeinerungsabbildung $\sigma : J \to I$ finden, so dass W_j relativ-kompakt in $U_{\sigma(j)}$ liegt. Dann sei $\mathscr{V}$ eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathscr{W}$. ∎

Definition

Ein topologischer Raum heißt ***(n-dimensional) lokal-euklidisch***, falls es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und einen Homöomorphismus $\varphi : U \to B$ auf eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Die Abbildung φ bezeichnet man als ***lokale Karte*** oder ***lokales Koordinatensystem***. Ist $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die i-te Komponente, so nennt man die Funktionen $x_i := \mathrm{pr}_i \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ ***lokale Koordinaten*** auf U.

Bemerkung: O.B.d.A. kann man annehmen, dass B eine Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathbf{x}_0 = \varphi(x_0)$ ist. Offensichtlich ist ein lokal-euklidischer Raum lokal-kompakt, vorausgesetzt, er ist ein Hausdorffraum.

1.2.5. Beispiele

A. Sei $X := \mathbb{R} \cup \{\,\mathsf{i}\,\}$, wobei $\mathsf{i} = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet. Man könnte auch irgend ein anderes Objekt benutzen, das nicht in $\mathbb{R}$ liegt. Eine Elementarumgebung um ein $x_0 \in \mathbb{R}$ soll einfach ein offenes Intervall der Gestalt $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sein. Eine Elementarumgebung von i sei eine Menge der Gestalt $(-\varepsilon, 0) \cup \{\,\mathsf{i}\,\} \cup (0, \varepsilon)$. Das ergibt eine Topologie auf X. Dieser Raum ist kein Hausdorffraum, denn die Punkte 0 und i besitzen keine disjunkten Umgebungen. Der Raum ist aber 1-dimensional lokal-euklidisch.

B. Sei $X := \mathbb{R} \times (0, 1)$. Eine Elementarumgebung eines Punktes $(x_0, t_0) \in X$ sei eine Menge der Gestalt $\{(x_0, t) \in X \,:\, |t - t_0| < \varepsilon\}$. Damit wird X zu einem topologischen Raum, der 1-dimensional lokal-euklidisch und ein Hausdorffraum ist. Er ist dann auch lokal-kompakt und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, aber nicht das zweite.

Räume wie die eben betrachteten sind aber nicht die, um die es hier gehen soll.

Definition

Eine ***(n-dimensionale) topologische Mannigfaltigkeit*** ist ein (n-dimensional) lokal-euklidischer Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

1.2.6. Beispiele

A. Jede offene Menge im $\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

B. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $X := \{(\mathbf{x}, y) \in M \times \mathbb{R} \,:\, y = f(\mathbf{x})\}$ der Graph von f. Wir versehen X mit der vom $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten ***Relativtopologie***. Die wird folgendermaßen definiert: Ist $(\mathbf{x}_0, y_0) \in X$ und $\widehat{U}$ eine Umgebung von $(\mathbf{x}_0, y_0)$, so ist $U :=$

$\widehat{U} \cap X$ eine Umgebung von $(\mathbf{x}_0, y_0)$ in X. Da der $\mathbb{R}^{n+1}$ ein Hausdorffraum ist, überträgt sich das auf den Unterraum. Auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom ist offensichtlich erfüllt. Und X ist lokal-euklidisch: Ist $U \subset M$ offen, so ist $\widetilde{U} := (U \times \mathbb{R}) \cap X$ eine offene Teilmenge von X, und $\varphi : \widetilde{U} \to U$ mit $\varphi(\mathbf{x}, y) := \mathbf{x}$ ein Homöomorphismus mit $\varphi^{-1}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$.

C. Durch

$$S^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \; : \; \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

wird die n-Sphäre definiert. Als Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist sie ein Hausdorffraum und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Sie ist sogar kompakt. Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei

$$\begin{aligned} U_i^+ &:= \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \; : \; x_i > 0\} \\ \text{und} \quad U_i^- &:= \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \; : \; x_i < 0\}. \end{aligned}$$

Jeder Punkt auf der Sphäre liegt in einer der Mengen U_i^+ oder U_i^-. Sei $B := B_1(\mathbf{0})$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ und $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to B$ definiert durch

$$\varphi_i^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) := (x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}).$$

Die Umkehrabbildung wird durch

$$\left(\varphi_i^\pm\right)^{-1}(u_1, \ldots, u_n) := (u_1, \ldots, u_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|\mathbf{u}\|^2}, u_i, \ldots, u_n)$$

gegeben.Damit ist klar, dass die n-Sphäre lokal-euklidisch ist, als eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

D. Wir kommen nun zu einem etwas komplizierteren Beispiel. Es sei $\mathbb{RP}^n$ die Menge aller 1-dimensionalen linearen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$. Ist $\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ ein Punkt aus $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$, so werde der von $\mathbf{x}$ erzeugte Raum mit $[\mathbf{x}]$ bezeichnet. So gewinnt man eine Abbildung $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{RP}^n$, deren Fasern die Geraden durch den Nullpunkt sind, aus denen der Nullpunkt herausgenommen wurde. Man nennt $\mathbb{RP}^n$ den n-dimensionalen ***(reell-)projektiven Raum***. Der Punkt $[\mathbf{x}]$ wird auch mit dem Symbol $(x_0 : \ldots : x_n)$ bezeichnet. Diese Bezeichnung ist nicht eindeutig, denn für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$(\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n) = (x_0 : \ldots : x_n)).$$

Die Zahlen $x_0, \ldots, x_n$ nennt man die ***homogenen Koordinaten*** von $(x_0 : \ldots : x_n)$.

Für $i = 0, \ldots, n$ sei $U_i := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{RP}^n \; : \; x_i \neq 0\}$. Jeder Punkt des $\mathbb{RP}^n$ liegt in einer der Mengen U_i. Nun definiert man die Abbildung $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\varphi_i(x_0 : \ldots : x_n) := \Big(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\Big).$$

Sie ist offensichtlich wohldefiniert, und sie ist bijektiv, mit

$$\varphi_i^{-1}(u_1, \ldots, u_n) = (u_1 : \ldots : u_i : 1 : u_{i+1} : \ldots : u_n).$$

Die Bilder von ε-Umgebungen unter φ_i^{-1} kann man als Elementarumgebungen einer Topologie auf dem $\mathbb{RP}^n$ benutzen. Dadurch werden die Abbildungen φ_i zu Homöomorphismen, $\mathbb{RP}^n$ ist lokal-euklidisch. Außerdem ist der projektive Raum ein Hausdorffraum: Gegeben seien zwei Punkte $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ und $y = (y_0 : \ldots : y_n)$ mit $x \neq y$. Liegen beide Punkte in der gleichen Menge U_i, so ist klar, dass sie disjunkte Umgebungen besitzen (weil das ja im $\mathbb{R}^n$ gilt). Liegen die Punkte nicht in der gleichen Umgebung, so muss $x_i y_i = 0$ für $i = 0, \ldots, n$ gelten. O.B.d.A. sei $x = (1 : x_1 : \ldots : x_s : 0 : \ldots : 0)$ und $y = (0 : \ldots : 0 : y_{s+1} : \ldots : y_{n-1} : 1)$. Dann sind

$$\begin{array}{rrcl} & V_1 & := & \{(1 : w_1 : \ldots : w_n) \,:\, |w_n| < 1\} \\ \text{und} & V_2 & := & \{(w_0 : \ldots : w_{n-1} : 1) \,:\, |w_0| < 1\} \end{array}$$

disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y.

Ist $[\mathbf{w}] \in V_1$ und $w_n = 0$, so liegt $[\mathbf{w}]$ nicht in V_2.

Ist dagegen $w_n \neq 0$, so ist $[\mathbf{w}] = (1/w_n : w_1/w_n : \ldots : w_{n-1}/w_n : 1)$ und $|1/w_n| = 1/|w_n| > 1$, also $[\mathbf{w}] \notin V_2$.

Wir wollen nun sehen, dass π stetig ist. Offensichtlich ist für jedes i die Abbildung $\alpha_i := \varphi_i \circ \pi : \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{C}^n$ stetig. Ist $W \subset \mathbb{RP}^n$ offen, so sind auch alle Mengen $W_i := \varphi_i(W \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$ offen, und dann ist auch

$$\pi^{-1}(W) = \bigcup_i \pi^{-1}(W \cap U_i) = \bigcup_i \pi^{-1}\varphi_i^{-1}(W_i) = \bigcup_i \alpha_i^{-1}(W_i)$$

offen im $\mathbb{R}^{n+1}$. Also ist π stetig.

Da π die kompakte Sphäre stetig und surjektiv auf den projektiven Raum abbildet, erweist sich auch dieser als kompakt. Dann ist insbesondere klar, dass das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und $\mathbb{RP}^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

1.3 Differenzierbare Strukturen

Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit, also ein lokal-euklidischer Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Insbesondere ist X dann lokal-kompakt und parakompakt.

Definition

Zwei Karten $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ und $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ heißen ***$\mathscr{C}^k$-verträglich***, wenn $U \cap V = \varnothing$ ist oder die Abbildung

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

ein $\mathscr{C}^k$-Diffeomorphismus (also eine umkehrbare differenzierbare Abbildung mit ebenfalls differenzierbarer Umkehrabbildung) ist.

Die Abbildungen $\varphi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \varphi^{-1}$ nennt man ***Koordinatentransformationen***.

Definition

Ein System von Karten $\varphi_\iota : U_\iota \to \mathbb{R}^n$ (mit $\iota \in I$) heißt ein ***$\mathscr{C}^k$-Atlas*** für X, falls gilt:

1. $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota = X$.
2. Alle Karten φ_ι sind untereinander $\mathscr{C}^k$-verträglich.

Eine ***$\mathscr{C}^k$-Mannigfaltigkeit*** ist eine topologische Mannigfaltigkeit, versehen mit einem $\mathscr{C}^k$-Atlas.

Ist $k = \infty$, so sprechen wir kurz von „differenzierbarer Verträglichkeit„, „differenzierbaren Atlanten“ und „differenzierbaren Mannigfaltigkeiten“.

Bemerkung: Künftig sprechen wir nur über differenzierbare Mannigfaltigkeiten (also eigentlich $\mathscr{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten).

Zwei differenzierbare Atlanten für X heißen differenzierbar verträglich, falls jede Karte aus dem einen Atlas mit jder Karte aus dem anderen Atlas differenzierbar verträglich ist. In diesem Falle ist die Vereinigung der beiden Atlanten wieder ein differenzierbarer Atlas. Vereinigt man alle verträglichen Atlanten, so erhält man einen „maximalen Atlas“. Unter einer ***differenzierbaren Struktur*** auf X versteht man die Festlegung eines (maximalen) differenzierbaren Atlasses.

1.3.1. Beispiele

A. Sei $X = S^n$ die n-Sphäre, versehen mit den Karten $\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to B_1(\mathbf{0})$. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi_i^\pm \circ \varphi_j^\pm(u_1,\ldots,u_n) &= \\ &= \begin{cases} (u_1,\ldots,u_n) & \text{falls } i=j, \\ (u_1,\ldots,\widehat{u_i},\ldots,u_{j-1},\sqrt{1-\|\mathbf{u}\|^2},u_j,\ldots,u_n) & \text{falls } i \neq j. \end{cases}\end{aligned}$$

Da die Kartenwechsel differenzierbar sind, ist S^n eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

B. Sei $X = \mathbb{RP}^n$, versehen mit den Karten $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(u_1,\ldots,u_n) = \Big(\frac{u_1}{u_{i+1}},\ldots,\frac{\widehat{u_{i+1}}}{u_{i+1}},\ldots,\frac{u_j}{u_{i+1}},\frac{1}{u_{i+1}},\frac{u_{j+1}}{u_{i+1}},\ldots,\frac{u_n}{u_{i+1}}\Big)$$

(für $i < j$), und das ist eine differenzierbare Abbildung auf

$$\varphi_j(U_i \cap U_j) = \{(u_1,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, u_{i+1} \neq 0\} \qquad (\text{für } i < j).$$

Also ist auch $\mathbb{RP}^n$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

1.3.2. Satz

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Ist $0 < r < R$, so gibt es eine lokal-endliche Verfeinerung $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ von $\mathcal{U}$, so dass gilt:

1. *Zu jedem $j \in J$ gibt es ein Koordinatensystem (W_j, φ_j) für X mit $V_j \subset W_j$ und $\varphi_j(V_j) = B_R(\mathbf{0})$.*
2. *Die Mengen $\varphi_j^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ überdecken X.*

Beweis: Es gibt eine Folge von kompakten Mengen K_ν, die X ausschöpft.

Wir setzen $M_1 := K_1$ und $M_\nu := K_\nu \setminus \mathring{K}_{\nu-1}$ für $\nu \geq 2$. Dann ist (M_ν) eine abzählbare Überdeckung von X durch kompakte Mengen.

Sei $M = M_\nu$ für ein festes ν. Zu jedem $x \in M$ gibt es einen Index $i = i(x) \in I$ und eine offene Umgebung $W = W(x) \subset U_i \cap (\mathring{K}_{\nu+1} \setminus K_{\nu-2})$. Dabei kann W so klein gewählt werden, dass es ein Koordinatensystem $\varphi : W \to B_R(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ gibt. Sei $V' := \varphi^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$. Endlich viele solcher Umgebungen überdecken M. Führen wir das Verfahren für alle M_ν durch, so erhalten wir eine abzählbare Verfeinerung $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{V}$ lokal-endlich. ∎

Definition

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und $M \subset X$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt ***differenzierbar***, falls $f \circ \varphi_\iota^{-1} : \varphi_\iota(M \cap U_\iota) \to \mathbb{R}$ für jede Karte (U_ι, φ_ι) eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion ist.

Die Menge aller differenzierbaren Funktionen auf M sei mit $\mathscr{C}^\infty(M)$ bezeichnet. Ist $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, so nennt man die Menge

$$\mathrm{Tr}(f) := \overline{\{x \in M \,:\, f(x) \neq 0\}}$$

den ***Träger*** von f. Mit $\mathscr{C}_c^\infty(M)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ mit kompaktem Träger.

1.3.3. Satz vom Hut

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$f(\mathbf{x}) \equiv 1 \;\text{ auf } B_r(\mathbf{a}) \quad \text{ und } \quad f(\mathbf{x}) \equiv 0 \;\text{ auf } \mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{a}),$$

sowie $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$ überall sonst.

Beweis: Durch

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

wird eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$ definiert, die genau für $x > 0$ Werte > 0 annimmt. Dann ist $h(t) := g(1+t)g(1-t)$ genau auf dem Intervall $(-1, 1)$ positiv und überall sonst $= 0$.

Die Funktion

$$\varphi(t) := \Big(\int_{-1}^{t} h(\tau)\,d\tau\Big) \Big/ \Big(\int_{-1}^{1} h(\tau)\,d\tau\Big)$$

ist wieder eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion, die nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Für $t \leq -1$ ist $\varphi(t) \equiv 0$ und für $t \geq 1$ ist $\varphi(t) \equiv 1$. Schließlich setzen wir

$$f(\mathbf{x}) := \varphi\Big(\frac{R + r - 2\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}{R - r}\Big).$$

Diese Funktion nimmt auch nur Werte zwischen 0 und 1 an. Für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \geq R$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 0$, und für $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r$ ist $f(\mathbf{x}) \equiv 1$. ∎

Definition

Eine ***Teilung der Eins*** auf X ist eine Familie $(f_\iota)_{\iota \in I}$ von differenzierbare Funktionen auf X, so dass gilt:

1. $f_\iota \geq 0$ überall.
2. Das System der Träger $\mathrm{Tr}(f_\iota)$ ist lokal-endlich.
3. $\sum_{\iota \in I} f_\iota = 1$.

1.3.4. Satz

Zu jeder offenen Überdeckung $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ von X gibt es eine Teilung der Eins $(f_\iota)_{\iota \in I}$ mit $\mathrm{Tr}(f_\iota) \subset U_\iota$.

Beweis: Sei $\mathscr{V} = (V_\lambda)_{\lambda \in L}$ eine lokal-endliche Verfeinerung von $\mathscr{U}$, so dass es lokale Koordinaten $\varphi_\lambda : V_\lambda \to B_R(\mathbf{0})$ gibt und für ein r mit $0 < r < R$ auch noch die Mengen $V'_\lambda := \varphi_\lambda^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ überdecken.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion, so dass überall $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$ ist, sowie $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ auf $B_r(\mathbf{0})$ und $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(\mathbf{0})$. Dann setzen wir

$$g_\lambda(x) := \begin{cases} f \circ \varphi_\lambda(x) & \text{für } x \in V_\lambda, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\tau : L \to I$ eine Verfeinerungsabbildung, also $V_\lambda \subset U_{\tau(\lambda)}$. Dann ist $\mathscr{W} = (W_\iota)_{\iota \in I}$ mit $W_\iota := \bigcup_{\lambda \in \tau^{-1}(\iota)} V_\lambda$ eine offene Verfeinerung von $\mathscr{U}$ mit $W_\iota \subset U_\iota$. Außerdem ist $\mathscr{W}$ lokal-endlich, denn zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung $P = P(x)$ und eine endliche Teilmenge $L_0 \subset L$, so dass $P \cap V_\lambda \neq \varnothing$ nur für $\lambda \in L_0$ gilt. Aber dann ist $P \cap W_\iota \neq \varnothing$ höchstens für $\iota = \tau(\lambda)$, $\lambda \in L_0$, und das sind auch nur endlich viele.

Sei $\widetilde{g}_\iota := \sum_{\lambda \in \tau^{-1}(\iota)} g_\lambda$. Diese Summe ist überall endlich. Deshalb ist $\widetilde{g}_\iota$ differenzierbar, und außerdem ist $\mathrm{Tr}(\widetilde{g}_\iota) \subset W_\iota$. Da jeder Punkt $x \in X$ in einer Menge V'_λ enthalten ist, gibt es zu x mindestens ein ι mit $\widetilde{g}_\iota(x) > 0$. Also ist $g := \sum_\iota \widetilde{g}_\iota$ eine überall positive differenzierbare Funktion. Schließlich setzen wir

$$f_\iota := \frac{\widetilde{g}_\iota}{g}\,.$$

Offensichtlich besitzen die f_ι alle gewünschten Eigenschaften. ∎

1.3.5. Folgerung

Sei $U \subset X$ offen und $V \subset\subset U$ ebenfalls offen. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion f auf X mit $f|_V = 0$ und $f|_{(X \setminus U)} = 1$.

Beweis: Sei (f_1, f_2) eine Teilung der Eins zur Überdeckung $(U, X \setminus \overline{V})$. Dann ist $\mathrm{Tr}(f_1) \subset U$, $\mathrm{Tr}(f_2) \subset X \setminus \overline{V}$ und $f_1 + f_2 = 1$. Wir nehmen f_2 als Funktion f. ∎

Definition

Es seien X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine stetige Abbildung $\Phi : X \to Y$ heißt eine ***differenzierbare Abbildung***, falls gilt: Für jede offene Menge $V \subset Y$ und jede differenzierbare Funktion $g : V \to \mathbb{R}$ ist auch $g \circ \Phi : \Phi^{-1}(V) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

1.3.6. Satz

Eine stetige Abbildung $\Phi : X \to Y$ ist genau dann differenzierbar, wenn für jede Karte (U, φ) von X und jede Karte (V, ψ) von Y mit $\Phi(U) \cap V \neq \varnothing$ gilt:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \Phi^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

ist eine differenzierbare Abbildung.

Beweis: 1) Sei Φ eine differenzierbare Abbildung, $\psi = (y^1, \dots, y^m)$. Da die y^μ differenzierbare Funktionen auf V sind, ist $y^\mu \circ \Phi$ differenzierbar auf $\Phi^{-1}(V)$, also $y^\mu \circ \Phi \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar auf $\varphi(U \cap \Phi^{-1}(V)$.

2) Nun sei das Kriterium erfüllt. Ist g eine differenzierbare Funktion auf Y, so ist $g \circ \psi^{-1}$ differenzierbar, also auch

$$(g \circ \Phi) \circ \varphi^{-1} = (g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}).$$

Das bedeutet, dass auch $g \circ \Phi$ eine differenzierbare Funktion ist. ■

Ist $\Phi : X \to Y$ ein Homöomorphismus und sind Φ und Φ^{-1} differenzierbare Abbildungen, so nennt man Φ einen *Diffeomorphismus*.

1.3.7. Beispiele

A. Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, $\widetilde{X}$ ein Hausdorff-Raum und $\pi : \widetilde{X} \to X$ eine stetige Abbildung. Man nennt π *lokal-topologisch*, falls es zu jedem Punkt $p_0 \in \widetilde{X}$ eine offene Umgebung U von p_0 in $\widetilde{X}$ und eine offene Umgebung V von $x_0 = \pi(p_0)$ in X gibt, so daß $\pi|_U : U \to V$ ein Homöomorphismus (also eine „topologische" Abbildung) ist.

Man kann nun $\widetilde{X}$ so mit einer differenzierbaren Struktur versehen, daß π zu einer differenzierbaren Abbildung wird. Ist nämlich $\pi : U \to V$ topologisch und $\varphi : V \to B \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte, so kann man $\psi := \varphi \circ \pi$ als Karte für $\widetilde{X}$ nehmen. Sind $\psi_1 = \varphi_1 \circ \pi : U_1 \to \mathbb{R}^n$ und $\psi_2 = \varphi_2 \circ \pi : U_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, so gilt für $\mathbf{x} \in \varphi_2 \circ \pi(U_1 \cap U_2)$

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} = (\varphi_1 \circ \pi|_{U_1}) \circ (\varphi_2 \circ \pi|_{U_2})^{-1} = \varphi_1 \circ \pi|_{U_1} \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ \varphi_2^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}.$$

Das zeigt, daß die Karten differenzierbar miteinander verträglich sind. Man beachte allerdings, daß $\widetilde{X}$ nicht automatisch parakompakt ist.

Ist f eine differenzierbare Funktion auf X und $\psi = \varphi \circ \pi$ eine Karte für $\widetilde{X}$, so ist auch $(f \circ \pi) \circ \psi^{-1} = f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar. Also ist π eine differenzierbare Abbildung.

B. Sind X und Y zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten (mit den Dimensionen n und m), so ist $X \times Y$ ein topologischer Raum. Ist $(x_0, y_0) \in X \times Y$ und sind $U = U(x_0) \subset X$ und $V = V(y_0) \subset Y$ offene Umgebungen, so kann man $U \times V$ als Elementarumgebung von (x_0, y_0) benutzen. Mit der so eingeführten Topologie ist $X \times Y$ ein Hausdorffraum, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Offensichtlich ist $X \times Y$ eine $(n+m)$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Und $X \times Y$ kann leicht zu einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit gemacht werden. Ist (U, φ) eine Karte für X und (V, ψ) eine Karte für Y, so ist $(U \times V, \varphi \times \psi)$ eine Karte für $X \times Y$ (mit $(\varphi \times \psi)(x, y) := (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^{n+m}$). Die differenzierbare Verträglichkeit solcher Karten rechnet man leicht nach.

Die kanonischen Projektionen $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ und $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$ sind differenzierbare Abbildungen.

Bemerkung: Eine $\mathbb{R}$-***Algebra*** ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum A mit einer zusätzlichen assoziativen Multiplikation, so dass die Distributivgesetze gelten und $r(f \cdot g) = (rf) \cdot g = f \cdot (rg)$ für $r \in \mathbb{R}$ und $f, g \in A$ ist.

Ist $U \subset X$ offen, so ist $\mathscr{C}^\infty(U)$ eine kommutative $\mathbb{R}$-Algebra.

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $(x_1, \ldots, x_n) = \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte für X in $x_0 \in X$. Ist f eine differenzierbare Funktion in der Nähe von x_0, so definiert man die ***partiellen Ableitungen*** von f in x_0 bezüglich φ durch

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0)), \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Dabei sei $D_i g(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(g(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - g(\mathbf{x}_0)\big)$ die gewöhnliche i-te partielle Ableitung einer Funktion g im $\mathbb{R}^n$.

Ist $(y_1, \ldots, y_n) = \psi$ eine weitere Karte, so ist laut Kettenregel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_j}(x_0) &= D_j(f \circ \psi^{-1})(\psi(x_0)) \\
&= \sum_{i=1}^n D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x_0)) \cdot D_j(\mathrm{pr}_i \circ \varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x_0)) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \big(J_{\varphi \circ \psi^{-1}}\big)_{ij}(\psi(x_0)),
\end{aligned}$$

wobei mit $J_{\varphi \circ \psi^{-1}}$ die Jacobi-Matrix bezeichnet wird.

1.4 Tangentialvektoren

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition

Eine ***Derivation*** auf X in p ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $D : \mathscr{C}^\infty(X) \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$D(f \cdot g) = D(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot D(g).$$

Bemerkung: Da $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = 2D(1)$ ist, folgt $D(1) = 0$. Wegen der Linearität ist dann $D(c) = D(c \cdot 1) = c \cdot D(1) = c \cdot 0 = 0$ für jede konstante Funktion c.

1.4.1. Lemma

Sei $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$, $U = U(p) \subset X$ eine offene Umgebung und $f|_U = 0$. Dann ist $D(f) = 0$ für jede Derivation D in p.

Beweis: Sei $V = V(p) \subset\subset U$ eine offene Umgebung. Zu der offenen Überdeckung $\{X \setminus \overline{V}, U\}$ von X gibt es eine passende Teilung der Eins $\{\varphi, \psi\}$. Es ist $\varphi|_{\overline{V}} = 0$ und $\varphi|_{X \setminus U} = 1 - \psi|_{X \setminus U} = 1$, also

$$\varphi \cdot f = \begin{cases} 1 \cdot f = f & \text{in } X \setminus U, \\ \varphi \cdot 0 = 0 = f & \text{in } U. \end{cases}$$

Damit ist

$$D(f) = D(\varphi \cdot f) = \varphi(p) \cdot D(f) + D(\varphi) \cdot f(p) = 0$$

und alles gezeigt. ∎

Die Werte $D(f)$ einer Derivation in a auf den Funktionen $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$ hängen also nur vom Verhalten von f in der Nähe des Punktes a ab, und zwar vom Keim von f in a.

1.4.2. Beispiel

Ist (U, φ) eine Karte für X und $a \in U$, so kann man die Tangentialvektoren D_ν (oder $\partial/\partial x_\nu$) in a definieren durch

$$D_\nu(f) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(f) := D_\nu(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(a)), \text{ für } \nu = 1, \dots, n.$$

Diese partiellen Ableitungen hängen natürlich von der Karte φ ab. Für die lokalen Koordinaten $x_\mu = \mathrm{pr}_\mu \circ \varphi$ gilt dann:

$$D_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu\mu}, \text{ für } \nu, \mu = 1, \dots, n.$$

Die Derivationen in a bilden einen Vektorraum $T_a(X)$, den wir den ***Tangentialraum*** von X in a nennen.

1.4.3. Lemma

Sei f eine $\mathscr{C}^\infty$-Funktion auf einer Umgebung U des Nullpunktes im $\mathbb{R}^n$ mit $f(\mathbf{0}) = 0$. Dann gibt es $\mathscr{C}^\infty$-Funktionen g_ν auf U, so dass gilt:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\mathbf{x}) \cdot x_\nu, \ \text{mit } g_\nu(\mathbf{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{0}) \text{ für } \nu = 1, \ldots, n.$$

Beweis: Sei $g_\nu(\mathbf{x}) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x})\,dt$, für $\nu = 1, \ldots, n$ und $\mathbf{x}$ nahe $\mathbf{0}$.

Nun sei ein $\mathbf{x}$ festgehalten und $g(t) := f(t\mathbf{x})$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \;=\; g(1) - g(0) \;&=\; \int_0^1 g'(t)\,dt \\ &=\; \int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(t\mathbf{x}) x_\nu\,dt \;=\; \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\mathbf{x}) \cdot x_\nu. \end{aligned}$$

■

1.4.4. Satz

Die partiellen Ableitungen $D_1, \ldots, D_n$ bilden eine Basis des Tangentialraumes $T_a(X)$. Insbesondere ist $\dim(T_a(X)) = n$.

Beweis: Sei φ eine Karte mit $\varphi(a) = \mathbf{0}$. Ist $D \in T_a(X)$ und $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$, so ist

$$f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{x}) = f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{0}) + \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu(\mathbf{x}) \cdot x_\nu,$$

mit $g_\nu(\mathbf{0}) = \partial f/\partial x_\nu(\mathbf{0})$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Sei $h_\nu := g_\nu \circ \varphi$. Dann ist

$$f(x) = f(a) + \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(x) \cdot x_\nu,$$

wobei jetzt die lokalen Koordinaten mit x_ν bezeichnet werden und $h_\nu(a) = D_\nu(f)$ ist. Dann folgt:

$$D(f) = \sum_{\nu=1}^{n} D_\nu(f) \cdot D(x_\nu).$$

Weil das für jedes f gilt, ist $D = \sum_\nu c_\nu D_\nu$, mit $c_\nu := D(x_\nu)$. Das zeigt, dass die partiellen Ableitungen D_ν ein Erzeugendensystem des Tangentialraums bilden.

Ist umgekehrt $D = \sum_\nu c_\nu D_\nu = 0$, so ist $0 = D(x_\mu) = \sum_\nu c_\nu D_\nu(x_\mu) = c_\mu$ für $\mu = 1, \ldots, n$. ∎

1.4.5. Beispiel

Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{a} \in B$. Dann sei $\theta_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to T_{\mathbf{a}}(B)$ definiert durch

$$\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v}(f) := D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(\mathbf{a}).$$

Dies ist eine lineare Abbildung. Ist $\theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v} = 0$, so ist

$$0 = \theta_{\mathbf{a}}\mathbf{v}(x_\mu) = v_\mu \text{ für alle } \mu.$$

Das bedeutet, daß $\theta_{\mathbf{a}}$ injektiv, aus Dimensionsgründen also sogar bijektiv ist. So kann man den Tangentialraum von B in $\mathbf{a}$ mit dem $\mathbb{R}^n$ identifizieren.

Es gibt noch zwei andere, äquivalente Beschreibungen von Tangentialvektoren:

1) Äquivalenzklassen von Kurven als Tangentialvektoren:

Betrachtet werden differenzierbare Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ mit $\alpha(0) = a$. Zwei solche Kurven α und β heißen äquivalent (in a), falls gilt:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0) \text{ für alle differenzierbaren Funktionen } f.$$

Eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von Kurven definiert eine Derivation D durch

$$D(f) := (f \circ \alpha)'(0).$$

Ist umgekehrt D eine Derivation in a und φ eine Karte in a mit zugehörigen lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, so kann man $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ wie folgt definieren:

$$\alpha(t) := \varphi^{-1}\big(\varphi(a) + t(D(x_1), \ldots, D(x_n))\big).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)'(0) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)) \cdot D(x_\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} D(x_\nu)D_\nu(f) \;=\; D(f).\end{aligned}$$

2) Äquivalenzklassen von Vektoren mit Transformationsverhalten:

Betrachtet werden Paare $(\mathbf{v}, \varphi)$, wobei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und φ eine Karte in a ist. Zwei Paare $(\mathbf{v}, \varphi)$ und $(\mathbf{w}, \psi)$ heißen äquivalent, falls gilt:

$$\mathbf{v}^\top = J_{\varphi \circ \psi^{-1}}(\psi(a)) \cdot \mathbf{w}^\top.$$

Es ist klar, dass das eine Äquivalenzrelation ist. Die Vektorraum-Struktur des $\mathbb{R}^n$ überträgt sich auf die Menge der Äquivalenzklassen $[\mathbf{v}, \varphi]$.

Ist ein Paar $(\mathbf{v}, \varphi)$ mit $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ gegeben, so kann man eine Derivation D in a definieren durch $D := \sum_\nu v_\nu D_\nu$. Ist $(\mathbf{w}, \psi)$ äquivalent zu $(\mathbf{v}, \varphi)$, so ist

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^n v_\nu \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)) &= \sum_{\nu=1}^n \Big(\sum_{\mu=1}^n \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_\nu}{\partial y_\mu}(\psi(a)) w_\mu\Big) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_\nu}(\varphi(a)) \\ &= \sum_{\mu=1}^n w_\mu \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial y_\mu}(\psi(a)).\end{aligned}$$

Also ist die Definition von D unabhängig vom Repräsentanten.

Ist eine Derivation D gegeben, so setzt man $\mathbf{v} := (D(x_1), \ldots, D(x_n))$. Dieser Vektor hängt von den gewählten Koordinaten ab. Wechselt man die Koordinaten, so transformiert sich der Vektor wie oben.

Definition

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $a \in X$, so wird die *Tangentialabbildung* $\Phi_{*,a} : T_a(X) \to T_{\Phi(a)}(Y)$ definiert durch

$$\Phi_{*,a} D(g) := D(g \circ \Phi).$$

Offensichtlich ist $\Phi_{*,a}$ linear, und es gilt:

1. $(\mathrm{id}_X)_{*,a} = \mathrm{id}_{T_a(X)}$.
2. Ist $\Psi : Y \to Z$ differenzierbar, so ist $(\Psi \circ \Phi)_{*,a} = \Psi_{*,\Phi(a)} \circ \Phi_{*,a}$.

1.4.6. Satz

Ist (U, φ) eine Karte für X und (V, ψ) eine Karte für Y, so wird $\Phi_{*,a}$ bezüglich der von den Karten induzierten Basen durch die Matrix $J_{\psi\circ\Phi\circ\varphi^{-1}}(\varphi(a))$ beschrieben.

Beweis: Sei $D_\nu(f) = \partial(f \circ \varphi^{-1})/\partial x_\nu(\varphi(a))$ und $\widetilde{D}_\mu(g) = \partial(g \circ \psi^{-1})/\partial y_\mu(\psi(a))$. Dann ist $\Phi_{*,a} D_\nu = \sum_{\mu=1}^m a_{\nu\mu} \widetilde{D}_\mu$, mit

$$a_{\nu\mu} = (\Phi_{*,a} D_\nu)(y_\mu) = D_\nu(y_\mu \circ \Phi) = D_\nu(y_\mu \circ \psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1})(\mathbf{0}).$$

∎

Man kann nun viele Sätze aus dem $\mathbb{R}^n$ auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Dazu definieren wir noch:

$$\mathrm{rg}_a(\Phi) := \mathrm{rg}(\Phi_{*,a}).$$

Der Rang ist unabhängig von den Koordinaten.

Wenn klar ist, um welchen Punkt es geht, lassen wir den auch weg: $\Phi_* = \Phi_{*,a}$.

Ist ein Tangentialvektor als Äquivalenzklasse $[\alpha]$ (von Kurven) gegeben, so ist

$$\Phi_*([\alpha]) = [\Phi \circ \alpha].$$

Der Tangentialvektor $[\alpha]$ kann auch in der Form

$$\overset{\bullet}{\alpha}(0) := [\alpha] = \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha'_\nu(0)\frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

geschrieben werden, mit $\alpha_\nu := x_\nu \circ \alpha$.

1.4.7. Satz (über inverse Abbildungen)

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und $\det(\Phi_{*,a}) \neq 0$, also $\Phi_{*,a} : T_a(X) \to T_{\Phi(a)}(Y)$ ein Isomorphismus, so gibt es offene Umgebungen $U = U(a) \subset X$ und $V = V(\Phi(a)) \subset Y$, so dass $\Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Der Beweis kann aus dem $\mathbb{R}^n$ übernommen werden.

1.4.8. Satz (vom Rang)

Sei $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = m$, $a \in X$ und $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung. Ist $r = \mathrm{rg}_x(\Phi)$ auf einer Umgebung $W = W(a) \subset X$ unabhängig von $x \in W$, so gibt es Koordinatensysteme (U, φ) um a und (V, ψ) um $\Phi(a)$, so dass auf U gilt:

$$\psi \circ \Phi \circ \varphi^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0).$$

Beweis: Wir können annehmen, dass $W = W(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umebung des Nullpunktes und $\Phi : W \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung mit konstantem Rang r ist. Außerdem können wir annehmen, dass $J_\Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A(\mathbf{x}) & * \\ * & * \end{pmatrix}$ ist, mit $A(\mathbf{x}) \in M_{r,r}(\mathbb{R})$ und $\det A(\mathbf{x}) \neq 0$ für jedes $\mathbf{x} \in W$ ist. Dann sei

$$F(\mathbf{x}) := (\Phi_1(\mathbf{x}), \ldots, \Phi_r(\mathbf{x}), x_{r+1}, \ldots, x_n).$$

Weil $J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A(\mathbf{x}) & * \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}$ regulär ist, ist F ein lokaler Diffeomorphismus. Es gibt differenzierbare Funktionen $\psi_{r+1}, \ldots, \psi_m$, so dass gilt:

$$\Phi \circ F^{-1}(\mathbf{z}) = (z_1, \ldots, z_r, \psi_{r+1}(\mathbf{z}), \ldots, \psi_m(\mathbf{z})),$$

also

$$J_\Phi(\mathbf{x}) \cdot J_F(\mathbf{z})^{-1} = J_{\Phi\circ F^{-1}}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ * & J''_\psi(\mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Weil $\operatorname{rg} J_\Phi = r$ konstant ist, hat auch die rechte Matrix den Rang r, und $J''_\psi(\mathbf{z})$ muss verschwinden. Das bedeutet, dass die ψ_ϱ nur von $z_1, \ldots, z_r$ abhängen.

Sei $G(y_1, \ldots, y_m) :=$

$$= (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1} - \psi_{r+1}(y_1, \ldots, y_r), \ldots, y_m - \psi_m(y_1, \ldots, y_r)).$$

Dann ist $J_G(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ * & E_{m-r} \end{pmatrix}$, also G ein lokaler Diffeomorphismus. Und nun ist

$$G \circ \Phi \circ F^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0).$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes. ■

Definition

$T_a^*(X) := \operatorname{Hom}(T_a(X), \mathbb{R})$ heißt ***Cotangentialraum*** von X in a. Die Elemente von $T_a^*(X)$ nennt man *Cotangentialvektoren.*

1.4.9. Beispiel

Ist f eine differenzierbare Funktion (auf einer Umgebung von a), so bezeichnet man den durch

$$(df)_a(D) := D(f)$$

gegebenen Cotangentialvektor als das ***(totale) Differential*** von f in a.

Weil $(dx_\nu)\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}(x_\nu) = \delta_{\nu\mu}$ ist, bilden die Differentiale $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ eine Basis von $T_a^*(X)$, die duale Basis zur Basis $\{D_1, \ldots, D_n\}$.

Man rechnet leicht nach:

1. $d(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \cdot df_1 + c_2 \cdot df_2$.
2. $d(fg) = f(a) \cdot dg + g(a) \cdot df$.
3. $d(c) = 0$ für jede nahe a konstante Funktion c.
4. $d\big(\dfrac{f}{g}\big) = \dfrac{1}{g(a)^2}\big(g(a) \cdot df - f(a) \cdot dg\big)$.

Definition

Ist $\Phi : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten und $a \in X$, so wird die *Cotangentialabbildung* $\Phi^* : T^*_{\Phi(a)}(Y) \to T_a^*(X)$ definiert durch

$$\Phi^*\omega(D) := \omega(\Phi_* D).$$

Φ^* ist die zu Φ_* duale lineare Abbildung, und es gilt:

1. $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{T_a^*(X)}$.
2. Ist $\Psi : Y \to Z$ differenzierbar, so ist $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$.
3. Es ist $\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi)$.

Zum Beweis der letzten Aussage:

$$\Phi^*(df)(D) = df(\Phi_* D) = \Phi_* D(f) = D(f \circ \Phi) = d(f \circ \Phi)(D).$$

1.5 Untermannigfaltigkeiten

Definition

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt ***(p-dimensionale) Untermannigfaltigkeit*** von X, wenn es zu jedem $a \in Y$ eine Karte (U, φ) für X in a gibt, so dass gilt:

$$U \cap Y = \varphi^{-1}\big(\{\mathbf{x} \in \varphi(U) \,:\, x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}\big).$$

$U \cap Y$ ist offen in Y, und $\widetilde{\varphi} : U \cap Y \to \mathbb{R}^p$ mit

$$\widetilde{\varphi}(x) := \big(\mathrm{pr}_1 \circ \varphi(x), \ldots, \mathrm{pr}_p \circ \varphi(x)\big)$$

ist eine Karte für Y. Man sieht leicht, dass Y eine p-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Ist $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $i : Y \to X$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $\varphi \circ i(x) = (\widetilde{\varphi}(x), \mathbf{0})$ für $x \in Y \cap U$. Ist $\mathbf{y} := \widetilde{\varphi}(x)$, so ist

$$\varphi \circ i \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = \varphi \circ i(x) = (\mathbf{y}, \mathbf{0}),$$

also

$$f|_{Y \cap U} \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = f \circ i \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = f \circ \varphi^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{0}).$$

Das zeigt, dass $f|_{Y \cap U}$ differenzierbar ist.

Die von i induzierte Abbildung $i_* : T_x(Y) \to T_x(X)$ ist gegeben durch $(i_* D)(f) := D(f|_Y)$.

Sei nun f eine differenzierbare Funktion auf der Untermannigfaltigkeit Y, $x \in Y$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte für X in x, die im obigen Sinne eine Karte $\widetilde{\varphi}$ für Y induziert, sowie $g := f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$. Dann wird durch $\widehat{g}(x_1, \ldots, x_n) := g(x_1, \ldots, x_p)$ eine differenzierbare Fortsetzung von g auf einer Umgebung von $\varphi(x)$ im $\mathbb{R}^n$ definiert. Sei $\widehat{f} := \widehat{g} \circ \varphi$. Dann ist

$$\widehat{f} \circ i \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}) = \widehat{f} \circ \varphi^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \widehat{g}(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{y}) = f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}(\mathbf{y}),$$

also $\widehat{f}|_Y = f$, d.h. $\widehat{f}$ eine lokale differenzierbare Fortsetzung von f. Ist $D \in T_x(Y)$ und $i_* D = 0$, so ist $D(f|_Y) = 0$ für jede differenzierbare Funktion auf X, also $D(f) = 0$ für jede differenzierbare Funktion auf Y, d.h. es ist $D = 0$ und damit i_* injektiv.

Definition

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. f heißt eine ***Immersion*** (bzw. ***Submersion***) in $x \in X$, falls $f_* : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ injektiv (bzw. surjektiv) ist.

Die Abbildung f heißt eine ***Einbettung***, falls $f(X) \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : X \to f(X)$ ein Diffeomorphismus ist.

1.5.1. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine Immersion (auf ganz X). Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$ und eine offene Umgebung $W = W(f(x))$, so dass $f(U) \subset W$ und $f|_U : U \to W$ eine Einbettung ist.

Beweis: Man wähle Karten φ für X in x mit $\varphi(x) = \mathbf{0}$ und ψ für Y in $f(x)$ mit $\psi(f(x)) = \mathbf{0}$. Die Abbildung $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ hat konstanten Rang, stimmt also (nach weiteren Koordinatentransformationen) in der Nähe von $\mathbf{0}$ mit der Abbildung $j : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto (u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots, 0)$ überein (Satz vom Rang).

Wir können annehmen, dass schon $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = j$ ist, also $f|_U = \psi^{-1} \circ j \circ \varphi$. Das ist offensichtlich eine Einbettung. ∎

Selbst eine injektive Immersion braucht (global) keine Einbettung zu sein (Beispiel Lemniskate).

Definition

Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt ***eigentlich***, falls mit jeder kompakten Teilmenge $K \subset Y$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt ist.

f heißt ***lokal eigentlich***, wenn es zu jedem $y \in Y$ eine kompakte Umgebung A gibt, so dass $f^{-1}(A)$ kompakt ist.

1.5.2. Satz

Sei $f : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Ist f lokal eigentlich, so ist $f(X)$ in Y abgeschlossen. Ist f außerdem noch injektiv und wird $f(X)$ mit der Relativtopologie von Y versehen, so ist $f : X \to f(X)$ ein Homöomorphismus.

Beweis: Sei (y_ν) eine Folge in $f(X)$, die gegen ein $y_0 \in Y$ konvergiert. Dann gibt es Punkte $x_\nu \in X$, so dass $f(x_\nu) = y_\nu$ ist. Sei K eine kompakte Umgebung von y_0 in Y. OBdA liegen alle y_ν in K. Weil f lokal eigentlich ist, ist $f^{-1}(K)$ kompakt. Die Menge $K_0 := \{y_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \cup \{y_0\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von K. Also ist $f^{-1}(K_0)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $f^{-1}(K)$ und damit auch selbst kompakt. Die Folge (x_ν) liegt in $f^{-1}(K_0)$, enthält also eine konvergente Teilfolge (x_{ν_i}), die gegen ein $x_0 \in X$ konvergiert. Weil f stetig ist, konvergiert die Folge $y_{\nu_i} = f(x_{\nu_i})$ gegen $f(x_0)$. Weil (y_{ν_i}) zugleich auch gegen y_0 konvergiert, liegt $y_0 = f(x_0)$ in $f(X)$, d.h. $f(X)$ ist abgeschlossen.

Ist f zusätzlich injektiv, so ist $f : X \to f(X)$ bijektiv. Es bleibt nur zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist. Wieder sei K eine kompakte Umgebung von y_0 in Y. Da $f(X)$ mit der Relativtopologie versehen wird, ist $K \cap f(X)$ eine Umgebung von y_0 in $f(X)$.

$f^{-1}(K)$ ist kompakt, und $f : f^{-1}(K) \to f(X) \cap K$ ist stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus. Ist (y_ν) eine Folge von Punkten in $f(X)$, die gegen y_0 konvergiert, so liegen die y_ν oBdA in $K \cap f(X)$. Aber dann konvergiert $f^{-1}(y_\nu)$ gegen $f^{-1}(y_0)$. ■

1.5.3. Folgerung

Sei $f : X \to Y$ eine injektive, lokal eigentliche Immersion. Dann ist f eine Einbettung.

Beweis: Trivialerweise gilt auch die Umkehrung.

Ist f injektiv, lokal eigentlich und eine Immersion, so gibt es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und eine offene Umgebung $W = W(f(x_0)) \subset Y$, so dass $f|_U : U \to W$ eine Einbettung ist. Da f einen Homöomorphismus von X auf $f(X)$ induziert, kann man annehmen, dass $f(U) = f(X) \cap W$ ist. Aber dann ist $f(X)$ eine Untermannigfaltigkeit von Y.

Nach dem Satz vom Rang ist $f : X \to f(X)$ ein Diffeomorphismus und damit eine Einbettung. ■

1.5.4. Folgerung

Ist X kompakt und $f : X \to Y$ eine injektive Immersion, so ist f eine Einbettung.

Beweis: Da X kompakt ist, ist f lokal eigentlich. ■

1.5.5. Satz

Sei $F : X \to Y$ eine differenzierbare Abbildung (zwischen Mannigfaltigkeiten). Sei $x_0 \in X$ und $y_0 := F(x_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *F ist eine Submersion in x_0, d.h., es ist $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = \dim(Y)$.*
2. *Es gibt Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$ und $V = V(y_0) \subset Y$ mit $F(U) \subset V$, eine Mannigfaltigkeit Z und eine differenzierbare Abbildung $G : U \to Z$, so dass $x \mapsto (F(x), G(x))$ einen Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge von $V \times Z$ definiert.*
3. *Es gibt eine offene Umgebung $V = V(y_0) \subset Y$ und eine differenzierbare Abbildung $s : V \to X$ mit $s(y_0) = x_0$ und $F \circ s = \mathrm{id}_V$. (Man nennt s dann einen **lokalen Schnitt** für F.)*

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2) : Wir können uns auf die lokale Situation beschränken und annehmen, dass $U = U(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ und $V = V(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^m$ offene Umgebungen sind und $F : U \to V$ eine differenzierbare Abbildung mit $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\mathrm{rg}(J_F(\mathbf{0})) = m$ ist.

Wir schreiben $J_F(\mathbf{0}) = \big(J'_F(\mathbf{0}), J''_F(\mathbf{0})\big)$, mit $J'_F(\mathbf{0}) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ und $J''_F(\mathbf{0}) \in M_{m,n-m}(\mathbb{R})$. Nach Wahl geeigneter Koordinaten können wir annehmen, dass $\det J'_F(\mathbf{0}) \neq 0$ ist. Wir definieren eine neue differenzierbare Abbildung $\widetilde{F} : U \to V \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ durch

$$\widetilde{F}(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') := (F(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \mathbf{x}''), \qquad \text{für } \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m,\ \mathbf{x}'' \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Dann ist

$$J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} J'_F(\mathbf{0}) & J''_F(\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n-m} \end{pmatrix}, \qquad \text{und daher } \det J_{\widetilde{F}}(\mathbf{0}) \neq 0.$$

Nach dem Satz über inverse Abbildungen gibt es Umgebungen $\widetilde{U}(\mathbf{0}) \subset U$ und $W(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\widetilde{F} : \widetilde{U} \to W$ ein Diffeomorphismus ist.

$Z := \mathbb{R}^{n-m}$ ist eine Mannigfaltigkeit und $G := \mathrm{pr}_2 : \widetilde{U} \to Z$ mit $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \mapsto \mathbf{x}''$ ist eine differenzierbare Abbildung, so dass $(F, G) = \widetilde{F}$ nahe $\mathbf{0}$ ein Diffeomorphismus ist.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : Sind U, V, Z und G gegeben, so dass $F(U) \subset V$ und $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ ein Diffeomorphismus ist, so kann $s : V \to X$ definiert werden durch

$$s(y) := (F, G)^{-1}(y, G(x_0)).$$

Dann ist $(F, G)(s(y_0)) = (y_0, G(x_0)) = (F, G)(x_0)$ und daher $s(y_0) = x_0$. Außerdem ist $(F, G) \circ s(y) = (F, g) \circ (F, G)^{-1}(y, G(x_0)) = (y, G(x_0))$, also $F \circ s(y) = y$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) : Ist s ein lokaler Schnitt für F mit $s(y_0) = x_0$, dann ist $J_F \cdot J_s$ nahe y_0 die Einheitsmatrix. So folgt unmittelbar, dass J_F eine surjektive Abbildung repräsentiert, dass also $\mathrm{rg}_{x_0}(F) = m$ ist. ∎

1.5.6. Folgerung

Ist $F : X \to Y$ eine Submersion, so ist für jedes $y \in Y$ die Faser $F^{-1}(y)$ leer oder eine $(n-m)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von X. Für jedes $x \in F^{-1}(y)$ ist $T_x(F^{-1}(y)) = \mathrm{Ker}\, F_{*,x}$.

Ist F zusätzlich surjektiv und $K \subset Y$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \subset X$ eine $(n-m+k)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis: Wir betrachten einen Punkt $x_0 \in X$. Es sei $M := F^{-1}(y_0)$ die Faser über $y_0 := F(x_0)$. Dann können wir Umgebungen $U = U(x_0) \subset X$, $V = V(y_0) \subset Y$, eine $(n-m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit Z, und eine differenzierbare Abbildung

$G : U \to Z$ finden, so dass $(F, G) : U \to W \subset V \times Z$ ein Diffeomorphismus ist. Folglich ist $M \cap U = (F|_U, G)^{-1}(\{y_0\} \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m$.

Da $f|_M$ konstant ist, ist $F_{*,x_0} \equiv 0$. Also liegt $T_{x_0}(M)$ in $\mathrm{Ker}(F_{*,x_0})$. Aus Dimensionsgründen muss dann sogar Gleichheit gelten.

Ist $K \subset V$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so ist $F^{-1}(K) \cap U = (F|_U, G)^{-1}(K \times Z)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - m + k$. ∎

Bemerkung: Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen und umfasst damit auch die Theorie der Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$.

1.5.7. Beispiel

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine offene Teilmenge von $M_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Sei

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,:\, \det(A) = 1\}.$$

Die Determinante $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ ist eine differenzierbare Abbildung, mit $\det^{-1}(1) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Wir wollen zeigen, dass $\det_{*,A} : T_A \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to T_{\det A}(\mathbb{R}^*) \cong \mathbb{R}$ für jedes $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ den Rang 1 hat. Dazu sei $\alpha_A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\alpha_A(t) := \begin{pmatrix} (1+t)a_{11} & \cdots & (1+t)a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\alpha_A(0) = A$ und $\alpha_A(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ für genügend kleines t. Und es ist $(\det \circ \alpha_A)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (1+t)\det(A) = \det(A) \neq 0$, also $\mathrm{rg}\,\det_{*,A} = 1$. Also ist $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ eine $(n^2 - 1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Nun ist $T_E(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{Ker}(\det_{*,E})$. Wir wollen noch $\det_{*,E}$ berechnen.

Die Matrizen E_{ij} mit einer 1 an der Stelle (i, j) und Nullen sonst bilden eine Basis von $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Sei $\alpha_{ij}(t) := E + tE_{ij}$. Dann ist $\alpha_{ij}(0) = E$ und

$$\det \circ \alpha_{ij}(t) = \begin{cases} 1+t & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \neq j. \end{cases},$$

also

$$(\det \circ \alpha_{ij})'(0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases},$$

Eine andere Linearform auf $M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist die Spur. Für sie gilt:

$$\mathrm{Spur}(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases},$$

Das zeigt, dass $\det_{*,E} = \mathrm{Spur}$ ist, und damit

$$T_E(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Spur}(A) = 0\}.$$

Definition

Eine ***Liegruppe*** ist eine Gruppe G mit einer differenzierbaren struktur, so dass gilt:

1. Die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ (von G nach G) ist differenzierbar.
2. Die Abbildung $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ (von $G \times G$ nach G) ist differenzierbar.

Beispiele sind $\mathbb{R}^n$ (mit Addition), $\mathbb{R}^*$ (mit Multiplikation), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Der Tangentialraum in der 1 wird auch als ***Liealgebra*** der Liegruppe bezeichnet. Über die Algebrastrukturkönnen wir erst im nächsten Abschnitt sprechen.

1.6 Vektorfelder

Sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition

Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein ***Vektorfeld*** auf U ist eine Abbildung $\xi : \mathscr{C}^\infty(U) \to \mathscr{C}^\infty(U)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. ξ ist $\mathbb{R}$-linear.
2. $\xi(f \cdot g) = f \cdot \xi(g) + g \cdot \xi(f)$, für $f, g \in \mathscr{C}^\infty(U)$.

Die Menge aller Vektorfelder auf U werde mit $\mathscr{X}(U)$ bezeichnet.

1.6.1. Satz

1. *Ist c eine konstante Funktion auf U und $\xi \in \mathscr{X}(U)$, so ist $\xi(c) \equiv 0$.*
2. *$\mathscr{X}(U)$ ist ein $\mathscr{C}^\infty(U)$-Modul, d.h.: Ist $\xi \in \mathscr{X}(U)$ und $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$, so ist $f\xi$ mit $(f\xi)(g) := f \cdot \xi(g)$ ein Element von $\mathscr{X}(U)$, und es gelten die üblichen Vektorraum-Axiome.*
3. *Ist $\xi \in \mathscr{X}(U)$, $V \subset U$ offen, $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$ und $f|_V = 0$, so ist $\xi(f)|_V = 0$.*

Beweis: 1) Wie bei den Derivationen folgt, dass $\xi(1) \equiv 0$ ist, und aus der $\mathbb{R}$-Linearität folgt die Behauptung.

2) Es ist zu zeigen, dass $f\xi$ die Derivationseigenschaft besitzt. Das ist aber trivial nachzurechnen.

3) Sei $x \in V$. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion φ auf U mit $\varphi(x) = 0$ und $\varphi|_{U \setminus V} = 1$. Dann ist $\varphi \cdot f = f$, also $\xi(f)(x) = \xi(f \cdot \varphi)(x) = \big(f \cdot \xi(\varphi) + \varphi \cdot \xi(f)\big)(x) = 0$. Da x beliebig war, folgt die Behauptung. ∎

Ist $U \subset X$ offen, $p \in U$ und $\xi \in \mathscr{X}(U)$, so kann man $\xi_p : \mathscr{C}^\infty(U) \to \mathbb{R}$ definieren durch $\xi_p(f) := \xi(f)(p)$. Damit ist ξ_p eine Derivation (also ein Tangentialvektor) in p.

Sei (U, φ) ein Koordinatensystem mit $p \in U$. Für $x \in U$ gibt es dann eine Darstellung

$$\xi_x = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(x) \frac{\partial}{\partial x_\nu}\,.$$

Dabei ist $a_\nu(x) = \xi_x(x_\nu) = \xi(x_\nu)(x)$. Also sind die Koeffizienten a_ν differenzierbare Funktionen. Und jedes Vektorfeld hat eine solche Darstellung.

Die Abbildung von $\mathscr{X}(X)$ nach $T_p(X)$ mit $\xi \mapsto \xi_p$ kann natürlich nicht injektiv sein, sie ist aber surjektiv: Ist $U = U(p) \subset X$ eine offene Koordinaten-Umgebung und $V = V(p) \subset\subset U$, so kann man eine differenzierbare Funktion ψ auf X finden, so dass $\psi = 1$ auf V und $\psi = 0$ auf $X \setminus U$ ist. Ist $v = \sum_\nu a_\nu \partial/\partial x_\nu \in T_p(X)$, so wird dadurch ein Vektorfeld η (mit konstanten Koeffizienten a_ν) auf U gegeben. Nun sei $\xi \in \mathscr{X}(X)$ definiert durch

$$(\xi f)(x) := \begin{cases} \psi(x) \cdot \eta(f)(x) & \text{für } x \in U, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\xi_p = \eta_p = v$.

Definition

Sei ξ ein Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit X. Eine ***Integralkurve*** von ξ durch $x_0 \in X$ ist ein stetig differenzierbarer Weg $\alpha : I \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. I ist ein offenes Intervall, und es gibt ein $t_0 \in I$ mit $\alpha(t_0) = x_0$.
2. Es ist $\overset{\bullet}{\alpha}(t) = \alpha_{*,t}(\partial/\partial t) = \xi_{\alpha(t)}$ für alle $t \in I$.

1.6.2. Satz (Translationsinvarianz)

Sei $\alpha : I \to X$ eine Integralkurve des Vektorfeldes ξ. Dann ist für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ auch $\beta(t) := \alpha(t - t_0)$ eine Integralkurve.

Beweis: Wir setzen $s := t - t_0$. Dann ist $\overset{\bullet}{\beta}(t) = \overset{\bullet}{\alpha}(s) = \xi_{\alpha(s)} = \xi_{\beta(t)}$. ∎

Sei $x_0 \in X$ und (U, φ) eine Karte in x_0 mit $\varphi(x_0) = \mathbf{0}$. In den lokalen Koordinaten habe ξ die Gestalt

$$\xi|_U = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Setzt man dann $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \big(\xi_1(\varphi^{-1}(\mathbf{x})), \ldots, \xi_n(\varphi^{-1}(\mathbf{x}))\big)$, so ist $\mathbf{F} : G := \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Ist $\mathbf{y}(t)$ Lösung der „autonomen“ (d.h. zeitunabhängigen) DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ mit $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$, so gilt für $\alpha(t) := \varphi^{-1}(\mathbf{y}(t))$:

$$\begin{aligned} \overset{\bullet}{\alpha}(t) &= (\varphi^{-1})_*\mathbf{y}'(t) \;=\; (\varphi^{-1})_*\mathbf{F}(\mathbf{y}(t)) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu\big(\varphi^{-1}(\mathbf{y}(t))\big)\frac{\partial}{\partial x_\nu} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu\big(\alpha(t)\big)\frac{\partial}{\partial x_\nu} \;=\; \xi_{\alpha(t)}, \end{aligned}$$

sowie $\alpha(0) = \varphi^{-1}(\mathbf{0}) = x_0$.

Aus der Theorie der Differentialgleichungen folgt:

1.6.3. Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei ξ ein differenzierbares Vektorfeld auf X und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Kurve $\alpha : I \to X$, so dass gilt:

1. $0 \in I$ *und* $\alpha(0) = x_0$.
2. $\overset{\bullet}{\alpha}(t) = \xi_{\alpha(t)}$ *für alle* $t \in I$ *(d.h.,* α *ist Integralkurve von* ξ*).*
3. *Ist* $\beta : J \to X$ *eine weitere Integralkurve von* ξ *mit* $\beta(0) = x_0$*, so stimmen* α *und* β *auf* $I \cap J$ *überein.*

1.6.4. Satz

Sei I_x die Vereinigung aller offenen Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, zu denen eine Integralkurve $\alpha : I \to X$ von ξ mit $\alpha(0) = x$ existiert. Dann gibt es auch eine „maximale" Integralkurve $\alpha_x : I_x \to X$ von ξ mit $\alpha_x(0) = x$.

Beweis: Sei $t \in I_x$. Dann gibt es ein Intervall I mit $0 \in I$ und eine Integralkurve $\alpha : I \to X$ von ξ mit $\alpha(0) = x$, so dass $t \in I$ liegt. Dann setze man $\alpha_x(t) := \alpha(t)$. Wegen des lokalen Eindeutigkeitssatzes ist α_x wohldefiniert. ∎

Ebenfalls aus der Theorie der Differentialgleichungen übernehmen wir:

1.6.5. Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

Sei ξ ein differenzierbares Vektorfeld auf X und $x_0 \in X$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und eine differenzierbare Abbildung $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to X$, so dass gilt: Für jedes $x \in U$ ist $\alpha_x(t) := \Phi(t, x)$ eine auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definierte Integralkurve von ξ mit $\alpha_x(0) = x$.

1.6.6. Satz

Unter den obigen Bedingungen ist

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x)$$

für alle s, t, für die beide Seiten der Gleichung definiert sind.

Beweis: Sei $x \in U$ festgehalten und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ebenfalls fest gewählt, $y := \Phi(t, x)$. Liegt t nahe genug bei 0, so liegt auch y in U, und wir können definieren:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &:= \Phi(s, \Phi(t, x)) == \Phi(s, y) = \alpha_y(s) \\ \text{und} \quad \beta(s) &:= \Phi(s + t, x) = \alpha_x(s + t). \end{aligned}$$

Dann ist $\beta(0) = \Phi(t,x) = y = \Phi(0,y) = \alpha(0)$, sowie

$$\dot{\alpha}(s) = \dot{\alpha}_y(s) = \xi_{\alpha_y(s)} = \xi_\alpha(s)$$

und

$$\dot{\beta}(s) = \dot{\alpha}_x(s+t) = \xi_{\alpha_x(s+t)} = \xi_{\beta(s)}.$$

Also müssen α und β auf dem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen. ∎

Definition

Ein ***dynamisches System*** oder ein ***globaler Fluss*** auf X ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi(0,x) = x$ für alle $x \in X$.
2. $\Phi(t, \Phi(s,x)) = \Phi(t+s, x)$ für $x \in X$ und $s,t \in \mathbb{R}$.

Für $t \in \mathbb{R}$ sei dann $\Phi_t : X \to X$ definiert durch $\Phi_t(x) := \Phi(t,x)$. Dann ist Φ_t differenzierbar, und es gilt:

1. $\Phi_0 = \mathrm{id}_X$,
2. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$.

Insbesondere ist jede Abbildung Φ_t ein Diffeomorphismus, mit $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$. Man nennt das System $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ auch eine ***1-Parameter-Gruppe von Diffeomorphismen*** auf X.

Für $x \in X$ sei $\alpha_x : \mathbb{R} \to X$ definiert durch

$$\alpha_x(t) := \Phi(t,x).$$

Man nennt α_x eine ***Integralkurve*** oder ***Flusslinie*** von Φ. Die Bildmenge $\alpha_x(\mathbb{R})$ heißt ***Bahn*** oder ***Orbit*** von x. X ist disjunkte Vereinigung der Bahnen von Φ.

1.6.7. Satz

Sei $\alpha_x : \mathbb{R} \to X$ Flusslinie eines dynamischen Systems Φ auf X. Entweder ist α_x konstant, oder es ist $\dot{\alpha}_x(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (also α_x eine Immersion), und dann ist genau eine der beiden folgenden Aussagen erfüllt:

1. *α_x ist injektiv,*
2. *α_x ist periodisch.*

Beweis: Sei α_x nicht konstant, $t_0 \in \mathbb{R}$ fest. Für jedes andere $t \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\alpha_x(t+t_0) = \Phi(t+t_0, x) = \Phi(t_0, \Phi(t,x)) = \Phi_{t_0}(\alpha_x(t)).$$

Daraus folgt:

$$(\Phi_{t_0})_* \dot{\alpha}_x(0) = \dot{\alpha}_x(t_0).$$

Das bedeutet: Entweder ist $\dot{\alpha}_x(t) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, oder es ist $\dot{\alpha}_x(t) \equiv \mathbf{0}$ (und damit α_x konstant, was wir ausgeschlossen hatten). Also ist α_x eine Immersion.

Ist α_x nicht injektiv, so gibt es Zahlen $t_1 < t_2$ mit $\alpha_x(t_1) = \alpha_x(t_2)$. Dann ist $\Phi_{t_1}(x) = \Phi_{t_2}(x)$, also $\Phi_{t_1 - t_2}(x) = x$. Es ergibt sich:

$$\alpha_x(t) = \Phi_t(x) = \Phi_{t+(t_1-t_2)}(x) = \alpha_x(t + (t_1 - t_2)),$$

d.h. $\alpha_{\mathbf{y}}$ ist periodisch. ∎

Definition

Sei $M \subset \mathbb{R} \times X$ offen. Eine differenzierbare Abbildung $\Phi : M \to X$ heißt ***lokaler Fluss***, falls gilt:

1. $\{0\} \times X \subset M$ und $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in X$.
2. Zu jedem $x \in X$ gibt es ein offenes Intervall I_x mit $M \cap (\mathbb{R} \times \{x\}) = I_x \times \{x\}$.
3. Es ist $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$, wenn beide Seiten erklärt sind.

Für $\in X$ ist $I_x = (a_x, b_x)$ der Definitionsbereich der Kurve $\alpha_x(t) := \Phi(t, x)$. Durch $\xi_x := \dot{\alpha}_x(0)$ wird ein Vektorfeld auf X definiert, das ***Geschwindigkeitsfeld*** von Φ.

Behauptung: α_x ist die Integralkurve von ξ mit $\alpha_x(0) = x$.

Beweis: Sei $t \in I_x$ und $y := \alpha_x(t)$. Dann ist

$$\alpha_y(s) = \Phi(s, y) = \Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x) = \alpha_x(s + t),$$

also $\xi_{\alpha_x(t)} = \xi_y = \dot{\alpha}_y(0) = \dot{\alpha}_x(t)$. ∎

1.6.8. Satz

Sei ξ ein Vektorfeld auf X. Dann gibt es genau einen maximalen lokalen Fluss Φ auf X, dessen Geschwindigkeitsfeld ξ ist. Ist X kompakt, so ist Φ ein globaler Fluss.

Beweis: Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine **maximale** Integralkurve $\alpha_x : (a_x, b_x) \to X$ von ξ mit $\alpha_x(0) = x$. (Der Beweis folgt – ähnlich wie im $\mathbb{R}^n$ – aus dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz). Sei

$$\mathscr{D}(\xi) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X \, : \, t \in (a_x, b_x)\}$$

und $\Phi : \mathscr{D}(\xi) \to X$ definiert durch $\Phi(t,x) := \alpha_x(t)$. Dann ist $\Phi(0,x) = x$ und $\Phi(t,\Phi(s,x)) = \Phi(s+t,x)$, wenn beide Seiten definiert sind.

Wir müssen zeigen, dass $\mathscr{D}(\xi)$ offen und Φ differenzierbar ist.

Sei $x_0 \in X$, $I = I_{x_0}$ der Definitionsbereich von $\alpha = \alpha_{x_0}$ und

$$J \;:=\; \{t \in I \,:\, \exists\, \varepsilon > 0,\ U = U(x_0),\ \text{so dass } (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times U \subset \mathscr{D}(\xi) \text{ und } \Phi \text{ dort differenzierbar ist}\}.$$

Definitionsgemäß ist J offen und $0 \in J$. Um zu zeigen, dass J auch in I abgeschlossen ist, betrachten wir einen Häufungspunkt s_0 von J in I. Es sei $y_0 := \Phi(s_0, x_0)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, eine offene Umgebung $V = V(y_0)$ und eine differenzierbare Abbildung $\psi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times V \to X$, so dass $t \mapsto \psi(t,x)$ die Integralkurve von ξ mit $\psi(0,x) = x$ ist, für $x \in V$.

Weil s_0 ein Häufungspunkt von J ist, gibt es ein $s_1 \in J$, so dass $|s_1 - s_0| < \varepsilon$ und $\Phi(s_1, x_0) \in V$ ist. Weil $s_1 \in J$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ und eine offene Umgebung $U = U(x_0) \subset X$, so dass $\widetilde{U} := (s_1 - \delta, s_1 + \delta) \times U$ in $\mathscr{D}(\xi)$ liegt und Φ auf $\widetilde{U}$ differenzierbar ist. Weil $\Phi(s_1, x_0) \in V$ ist, können wir U so klein wählen, dass $\Phi(\{s_1\} \times U) \subset V$ ist.

Für $x \in U$ sei $\beta(s) := \psi(s - s_1, \Phi(s_1, x))$. Da $\Phi(s_1, x)$ in V liegt, ist $\beta(s)$ für $|s - s_1| < \varepsilon$ definiert. Offensichtlich ist β eine Integralkurve von ξ mit $\beta(s_1) = \psi(0, \Phi(s_1,x)) = \Phi(s_1,x) = \alpha_x(s_1)$. Also ist $\beta = \alpha_x$ auf $J_1 := (s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon)$. Für $x \in U$ und $s \in J_1$ ist daher

$$(*) \quad \Phi(s,x) = \psi\big(s - s_1, \Phi(s_1,x)\big).$$

Nun sei $0 < \varrho < \varepsilon - |s_0 - s_1|$ und $J_0 := (s_0 - \varrho, s_0 + \varrho)$. Ist $s \in J_0$, so ist $|s - s_1| \le |s - s_0| + |s_0 - s_1| < \varrho + |s_0 - s_1| < \varepsilon$, also $\Phi(s,x)$ auf $J_0 \times U$ definiert und differenzierbar, d.h. $J_0 \times U \subset \mathscr{D}(\xi)$.

Die Menge $\{0\} \times X$ liegt immer in $\mathscr{D}(\xi)$, und zu jedem $x \in X$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U = U(x) \subset X$, so dass $(-\varepsilon,\varepsilon) \times U$ in $\mathscr{D}(\xi)$ liegt. Ist X kompakt, so enthält $\mathscr{D}(\xi)$ also auf jeden Fall eine Menge der Gestalt $(-\varepsilon,\varepsilon) \times X$. Durch $\Phi(t,x) := \Phi(t/2, \Phi(t/2,x))$ kann man den Fluss auf $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times X$ ausdehnen. So fährt man fort und erhält schließlich einen globalen Fluss auf $\mathbb{R} \times X$. ∎

Definition

Sind $\xi, \eta \in \mathscr{X}(U)$, so wird die ***Lieklammer*** $[\xi,\eta] \in \mathscr{X}(U)$ definiert durch

$$[\xi,\eta](f) := \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)).$$

Die Lieklammer ist wieder ein Vektorfeld: Die Linearität auf $\mathscr{C}^\infty(X)$ ist trivial. Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\xi\eta(fg) - \eta\xi(fg) &= \xi\big(g\cdot(\eta f) + f\cdot(\eta g)\big) - \eta\big(g\cdot(\xi f) + f(\xi g)\big) \\
&= (\xi g)(\eta f) + g\cdot(\xi\eta f) + (\xi f)(\eta g) + f\cdot(\xi\eta g) \\
&\quad -(\eta g)(\xi f) - g\cdot(\eta\xi f) - (\eta f)(\xi g) - f\cdot(\eta\xi g) \\
&= g\cdot\big([\xi,\eta]f\big) + f\cdot\big([\xi,\eta]g\big).
\end{aligned}$$

1.6.9. Satz

Die Lieklammer besitzt folgende Eigenschaften:

1. *Die Abbildung* $(\xi,\eta)\mapsto[\xi,\eta]$ *ist* $\mathbb{R}$*-bilinear.*
2. *Es ist* $[\xi,\eta] = -[\eta,\xi]$ *(Anti-Kommutativität).*
3. $[\xi,[\eta,\lambda]] + [\eta,[\lambda,\xi]] + [\lambda,[\xi,\eta]] = 0$ *(Jacobi-Identität).*

Beweis: (1) und (2) sind trivial.

3) Es ist

$$\begin{aligned}
[\xi,[\eta,\lambda]] &= [\xi,\eta\lambda-\lambda\eta] = \xi\eta\lambda - \xi\lambda\eta - \eta\lambda\xi + \lambda\eta\xi, \\
[\eta,[\lambda,\xi]] &= [\eta,\lambda\xi-\xi\lambda] = \eta\lambda\xi - \eta\xi\lambda - \lambda\xi\eta + \xi\lambda\eta \\
\text{und}\quad [\lambda,[\xi,\eta]] &= [\lambda,\xi\eta-\eta\xi] = \lambda\xi\eta - \lambda\eta\xi - \xi\eta\lambda + \eta\xi\lambda.
\end{aligned}$$

Addiert man die rechten Seiten, so kommt offensichtlich Null heraus. ∎

Allgemein bezeichnet man einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit einem zusätzlichen Produkt $[\ldots,\ldots]$ versehen ist, das die obigen Eigenschaften besitzt, als ***Liealgebra***.

Was die Liealgebra der Vektorfelder mit der Liealgebra einer Liegruppe zu tun hat, werden wir später sehen.

Definition

Sei $\Phi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, $\xi \in \mathscr{X}(M)$ und $\eta \in \mathscr{X}(N)$. Die Felder ξ und η heißen Φ***-verwandt***, falls gilt:

$$\xi(f\circ\Phi) = (\eta f)\circ\Phi, \qquad \text{für alle differenzierbaren Funktionen } f\in\mathscr{C}^\infty(N).$$

Bemerkung: ξ und η sind genau dann Φ-invariant, wenn für jeden Punkt $a\in M$ gilt:

$$\Phi_{*,a}(\xi_a) = \eta_{\Phi(a)}\,.$$

1.6.10. Satz

Sind die Felder ξ_1 und ξ_2 (auf M) Φ-verwandt zu den Feldern η_1 bzw. η_2 (auf N), so ist auch $[\xi_1, \xi_2]$ Φ-verwandt zu $[\eta_1, \eta_2]$.

BEWEIS: Es ist

$$\begin{aligned}
[\xi_1, \xi_2](f \circ \Phi) &= \xi_1(\xi_2(f \circ \Phi)) - \xi_2(\xi_1(f \circ \Phi)) \\
&= \xi_1\big((\eta_2 f) \circ \Phi\big) - \xi_2\big((\eta_1 f) \circ \Phi\big) \\
&= \big(\eta_1(\eta_2 f)\big) \circ \Phi - \big(\eta_2(\eta_1 f)\big) \circ \Phi \\
&= \big([\eta_1, \eta_2] f\big) \circ \Phi
\end{aligned}$$

■

Sei G eine Liegruppe, $g \in G$ ein festes Element. Die Abbildung $i_g : G \to G$ mit $i_g(x) := gxg^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus und zugleich ein Gruppen-Automorphismus. Man spricht bei den Abbildungen i_g von *inneren Automorphismen*. Ähnliche Automorphismen sind die *Linkstranslationen* $L_g : h \mapsto gh$ und die *Rechtstranslationen* $R_g : h \mapsto hg$. Offensichtlich ist $i_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$.

Definition

Sei G eine Liegruppe. Ein Vektorfeld $\xi \in \mathscr{X}(G)$ heißt ***links-invariant***, falls gilt:

$$(L_a)_{*,x}(\xi_x) = \xi_{ax}, \text{ für alle } a, x \in G.$$

Mit $L(G)$ sei der Vektorraum der links-invarianten Vektorfelder auf G bezeichnet.

Ist ξ links-invariant und $f \in \mathscr{X}(G)$, so ist

$$\xi(f \circ L_a)(x) = \xi_x(f \circ L_a) = (L_a)_*\xi_x(f) = \xi_{ax}(f) = (\xi f)(ax) = (\xi f) \circ L_a(x),$$

also $\xi(f \circ L_a) = (\xi f) \circ L_a$.

1.6.11. Satz

$L(G)$ ist eine Liealgebra (mit der Lieklammer für Vektorfelder).

BEWEIS: Sind ξ und η zwei links-invariante Vektorfelder auf G, so sind sie jeweils zu sich selbst L_a-verwandt, für jedes $a \in G$. Dann ist

$$[\xi, \eta](f \circ L_a) = ([\xi, \eta] f) \circ L_a, \text{ für jedes } a \in G.$$

Also ist auch $[\xi, \eta]$ links-invariant. ■

1.6.12. Satz

Die (lineare) Abbildung $\varepsilon : L(G) \to T_e(G)$ mit $\xi \mapsto \xi_e$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: 1) Injektivität: Ist $\xi \in L(G)$, so ist $\xi_a = (L_a)_*\xi_e$. Ist also $\xi_e = 0$, so ist auch $\xi_a = 0$, für alle $a \in G$, also $\xi = 0$.

2) Surjektivität: Sei $v \in T_e(G)$ vorgegeben, $\xi_a := (L_a)_*v$. Zu zeigen ist, dass dadurch ein links-invariantes Vektorfeld ξ auf G definiert wird. Zunächst ist

$$(\xi f)(x) = \xi_x(f) = \big((L_x)_*v\big)(f) = v(f \circ L_x).$$

Die Funktion $g : G \times G \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x, y) := f \circ L_x(y) = f(xy)$, ist differenzierbar. Sei nun $(U; x_1, \ldots, x_n)$ ein Koordinatensystem in einem Punkt $x \in G$ und $(V; y_1, \ldots, y_n)$ ein Koordinatensystem in e mit $e \mapsto \mathbf{0}$. Außerdem sei

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu}.$$

Dann ist

$$\xi_x(f) = \xi_e(f \circ L_x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \frac{\partial g}{\partial y_\nu}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$

differenzierbar in x, also ξ ein Vektorfeld.

Nun zur Links-Invarianz:

$$(L_g)_*\xi_a = (L_g)_*(L_a)_*\xi_e = (L_g \circ L_a)_*\xi_e = (L_{ga})_*\xi_e = \xi_{ga}.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

1.6.13. Satz

Sei ξ ein links-invariantes Vektorfeld auf der Liegruppe G. Ist $\alpha : I \to G$ eine Integralkurve von ξ, so ist auch $\beta := L_g \circ \alpha : I \to G$ eine Integralkurve von ξ.

Beweis: Es ist

$$(L_g \circ \alpha)^\bullet(t) = (L_g)_*\overset{\bullet}{\alpha}(t) = (L_g)_*\xi_{\alpha(t)} = \xi_{L_g \circ \alpha(t)}.$$

Also ist $L_g \circ \alpha$ eine Integralkurve. ■

Definition

Eine ***Ein-Parameter-Gruppe*** in G ist ein Liegruppen-Homomorphismus $\alpha : \mathbb{R} \to G$. Speziell ist dann $\alpha(0) = e$.

Bemerkung: Ein Liegruppen-Homomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen Liegruppen, der zugleich differenzierbar ist.

1.6.14. Satz

Sei $\mathscr{P}_G$ die Menge aller Ein-Parameter-Gruppen in G. Dann ist die durch $\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0)$ gegebene Abbildung $\mathscr{P}_G \to L(G)$ bijektiv.

Beweis: 1) Surjektivität: Sei $v \in L(G)$ und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ die Integralkurve des links-invarianten Vektorfeldes ξ (mit $\xi_e = v$), mit $\alpha(0) = e$. Dann ist $\dot{\alpha}(0) = v$. Sei nun $\alpha_1(t) := \alpha(s)\alpha(t)$ und $\alpha_2(t) := \alpha(s+t)$, für $|s| < \varepsilon/2$ und $|t| < \varepsilon/2$. Dann ist $\alpha_1(0) = \alpha(s) = \alpha_2(0)$, und es gilt:

$$\dot{\alpha}_1(t) = (L_{\alpha(s)} \circ \alpha)^\bullet(t) = (L_{\alpha(s)})_*\dot{\alpha}(t) = (L_{\alpha(s)})_*(L_{\alpha(t)})_*v = \xi_{\alpha_1(t)}$$

und

$$\dot{\alpha}_2(t) = \dot{\alpha}(s+t) = \xi_{\alpha(s+t)} = \xi_{\alpha_2(t)}.$$

Das bedeutet, dass α_1 und α_2 Integralkurven von ξ durch $\alpha(s)$ sind. Daraus folgt, dass $\alpha(s+t) = \alpha(s)\alpha(t)$ für kleine s, t gilt.

Ist t „groß“, so setzen wir $\widehat{\alpha}(t) := \alpha(t/n)^n$, mit genügend großem n. Dabei hängt die Definition von $\widehat{\alpha}$ nicht von dem gewählten n ab, denn es ist

$$\alpha(\frac{t}{n})^n = \alpha(m \cdot \frac{t}{mn})^n = \alpha(\frac{t}{mn})^{mn} = \alpha(n \cdot \frac{t}{mn})^m = \alpha(\frac{t}{m})^m.$$

Offensichtlich ist $\widehat{\alpha}$ eine Ein-Parameter-Gruppe in G, die nahe 0 mit α übereinstimmt, und es ist $\widehat{\alpha}^\bullet(0) = \dot{\alpha}(0) = v$.

2) Injektivität.

Sei α eine Ein-Parameter-Gruppe mit $\dot{\alpha}(0) = v$, und ξ das durch v bestimmte links-invariante Vektorfeld. Dann ist

$$\alpha(t+s) = \alpha(t)\alpha(s) = (L_{\alpha(t)} \circ \alpha)(s), \text{ also } \alpha(t) = L_{\alpha(t)} \circ \alpha(0),$$

und

$$\dot{\alpha}(t) = (L_{\alpha(t)})_*\dot{\alpha}(0) = \xi_{\alpha(t)}.$$

Damit ist α Integralkurve von ξ mit $\alpha(0) = e$. Diese Integralkurve ist durch v eindeutig bestimmt. ∎

Definition

Die ***Exponentialabbildung*** $\exp : L(G) \to G$ wird definiert durch $\exp(v) := \alpha_v(1)$, wobei α_v die Ein-Parameter-Gruppe mit $\alpha_v'(0) = v$ ist.

1.6.15. Satz

Ist $v \in L(G)$ und ξ das zugehörige linksinvariante Vektorfeld, so ist $\alpha_v(t) = \exp(tv)$, und α_v ist die Integralkurve von ξ durch e.

BEWEIS: Es ist $\exp(tv) = \alpha_{tv}(1)$. Wir müssen also zeigen, dass $\alpha_{tv}(1) = \alpha_v(t)$ ist. Dazu sei $\beta_t(s) := \alpha_v(st)$. Dann ist

$$\beta_t(s + s') = \alpha_v(st + s't) = \alpha_v(st)\alpha_v(s't) = \beta_t(s)\beta_t(s'),$$

also β_t eine Ein-Parameter-Gruppe. Außerdem ist $\dot{\beta}_t(s) = t \cdot \dot{\alpha}_v(st)$, also $\dot{\beta}_t(0) = t \cdot \dot{\alpha}_v(0) = tv$. Damit ist $\beta_t = \alpha_{tv}$ und daher $\alpha_{tv}(1) = \beta_t(1) = \alpha_v(t)$.

Dass α_v Integralkurve von ξ_v ist, wurde oben schon gezeigt. ∎

1.6.16. Satz

Sei $v \in L(G)$. Dann wird durch $\Phi(t, g) := L_g \circ \exp(tv)$ ein globaler Fluss für das durch v bestimmte linksinvariante Vektorfeld ξ gegeben.

BEWEIS: Wir müssen zeigen, dass $t \mapsto \alpha_g(t) := \Phi(t, g)$ für jedes feste g eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Integralkurve von ξ mit $\alpha_g(0) = g$ ist. Für $g = e$ haben wir das oben schon gezeigt. Ist aber g beliebig, so ist auch $\alpha_g = L_g \circ \alpha_e$ wieder eine Integralkurve von ξ, mit $\alpha_g(0) = g$. ∎

Man kann leicht zeigen, dass die Exponentialabbildung $\exp : L(G) \to G$ differenzierbar ist.

Für $v \in L(G)$ sei $h_v(t) := tv$. Durch $v \mapsto h_v'(0)$ wird ein Isomorphismus $L(G) \cong T_e L(G)$ definiert. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\exp_* v = \exp_* h_v'(0) = (\exp \circ h_v)'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \exp(tv) = v,$$

also exp in der Nähe von 0 ein Diffeomorphismus.

1.6.17. Satz

Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, also $L(G) = T_E(G) = M_n(\mathbb{R})$. Für $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ist dann $[A, B] = AB - BA$.

BEWEIS: Ist $B \in G$ gegeben, $L_B : G \to G$ die Links-Translation, $X \in M$ und $\alpha_X(t) := \exp(tX)$, also $\alpha_X'(0) = X$, so ist

$$(L_B)_* X = \frac{d}{dt}\Big|_0 B \cdot \alpha_X(t) = BX.$$

Für $A \in M$ sei ξ_A das zugehörige links-invariante Vektorfeld. Dann ist

$$\xi_A f(X) = (f \circ L_X \circ \alpha_A)'(0), \text{ für } X \in G \text{ und } f \in \mathscr{C}^\infty(G).$$

Ist f Einschränkung einer linearen Funktion $F : M \to \mathbb{R}$ auf G, so ist

$$\xi_A f(X) = \frac{d}{dt}\Big|_0 F(X \cdot \alpha_A(t)) = F(XA).$$

Insbesondere ist $\xi_A f(E_n) = F(A)$. Weil $\xi_B f = F \circ R_B$ und dies wieder Einschränkung einer Linearform ist, folgt:

$$\xi_A \circ \xi_B f(E_n) = \xi_A(\xi_B f)(E_n) = F \circ R_B(A) = F(AB).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} F([A,B]) &= \xi_{[A,B]} f(E_n) \\ &= (\xi_A \circ \xi_B f - \xi_B \circ \xi_A f)(E_n) \\ &= F(AB) - F(BA) \;=\; F(AB - BA). \end{aligned}$$

Da dies für alle Linearformen F gilt, ist $[A,B] = AB - BA$. ∎

Ist $A \in L(G) = M_n(\mathbb{R})$, so ist

$$\alpha_A(t) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} A^n t^n$$

eine differenzierbare Kurve in G, mit $\alpha_A(0) = E$ und $\alpha'_A(t) = A \cdot \alpha_A(t)$. Außerdem ist $\alpha_A(s) \cdot \alpha_A(t) = \alpha_A(s+t)$, also $t \mapsto \alpha_A(t)$ die (eindeutig bestimmte) Ein-Parameter-Gruppe zu A in G. Damit ist $A \mapsto \alpha_A(1) = \exp(A)$ die Exponentialabbildung der Liegruppe G, also

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} A^n \,.$$

Anhang: Ein paar Sätze über Differentialgleichungen.

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Unter einer ***Lösung der Differentialgleichung***

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$$

versteht man eine Abbildung $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^k$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall, und der Graph $\{(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \,:\, t \in I\}$ liegt in G.
2. $\boldsymbol{\varphi}$ ist differenzierbar, und es ist $\boldsymbol{\varphi}'(t) = F(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$ auf I.

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ eine Lösung von $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$, so sagt man, $\boldsymbol{\varphi}$ erfüllt die ***Anfangsbedingung*** $(t_0, \mathbf{y}_0)$. Die Lösung heißt ***maximal***, wenn sie sich nicht zu einer Lösung mit größerem Definitionsbereich fortsetzen lässt.

1.6.18. Satz

Ist $\boldsymbol{\varphi}$ Lösung der DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ und $\mathbf{F}$ r-mal (stetig) differenzierbar, so ist $\boldsymbol{\varphi}$ $(r+1)$-mal (stetig) differenzierbar.

BEWEIS: Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{\varphi}$ einmal differenzierbar. Ist $\mathbf{F}$ stetig, so folgt aus der Gleichung $\boldsymbol{\varphi}'(t) = \mathbf{F}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))$, dass $\boldsymbol{\varphi}$ sogar stetig differenzierbar ist.

Ist $\mathbf{F}$ differenzierbar, so folgt aus der selben Gleichung, dass $\boldsymbol{\varphi}'$ differenzierbar, also $\boldsymbol{\varphi}$ zweimal differenzierbar ist, u.s.w. ∎

Definition

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Eine stetige Abbildung $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ genügt auf G einer ***Lipschitz-Bedingung*** mit Lipschitz-Konstante k, falls gilt:

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x}_2)\| \le k \cdot \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \text{ für alle Punkte } (t, \mathbf{x}_1), (t, \mathbf{x}_2) \in G.$$

$\mathbf{F}$ genügt *lokal* der *Lipschitz-Bedingung*, falls es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ eine Umgebung $U = U(t_0, \mathbf{x}_0) \subset G$ gibt, so dass $\mathbf{F}$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Bemerkung: Ist $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, x_1, \ldots, x_n)$ auf G stetig und nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ stetig partiell differenzierbar, so genügt $\mathbf{F}$ lokal der Lipschitz-Bedingung.

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt $\mathbf{F}$ auf G lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $r > 0$, so dass $\mathbf{F}$ auf $T := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt.

1.6.19. Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\mathbf{F} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Genügt $\mathbf{F}$ lokal der Lipschitz-Bedingung, so gibt es zu jedem $(t_0, \mathbf{y}_0) \in G$ ein $\varepsilon > 0$, so dass auf $I := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ genau eine Lösung $\boldsymbol{\varphi}$ der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ mit $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0$ existiert.

BEWEIS: Siehe Analysis 3. Es sei $T = I \times B = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{B}_r(\mathbf{x}_0)$ so gewählt, dass $\mathbf{F}$ auf T einer Lipschitz-Bedingung mit einer Konstanten $k < 1/(2\varepsilon)$ genügt. Sei E der Banachraum aller stetigen Abbildungen $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ und

$$A := \{\boldsymbol{\varphi} \in E \, : \, \boldsymbol{\varphi}(I) \subset B \text{ und } \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{y}_0\}.$$

Offensichtlich ist A eine abgeschlossene Teilmenge von E. Die Abbildung $S : A \to E$ sei definiert durch

$$(S\boldsymbol{\varphi})(t) := \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(u, \boldsymbol{\varphi}(u))\, du\,.$$

Dann bildet S die Menge A auf sich ab. Weil S kontrahierend ist, folgt, dass S genau einen Fixpunkt $\boldsymbol{\varphi}^*$ besitzt, und $\boldsymbol{\varphi}^*$ ist eine Lösung der DGL mit $\boldsymbol{\varphi}^*(t_0) = \mathbf{y}_0$. Das Lösungsverfahren nennt man das ***Verfahren von Picard-Lindelöf***. ∎