Kapitel 4 Differential- und Integralrechnung

§ 1 Die Ableitung

Inhalt:

Differenzierbarkeit von skalaren und vektorwertigen Funktionen, Differenzenquotient und Differenzierbarkeitskriterium, Tangenten, elementare Ableitungsregeln.

Produktregel, Kettenregel, höhere Ableitungen, stetige Differenzierbarkeit, Ableitung der Umkehrfunktion, lokale Extremwerte, notwendiges Kriterium.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir betrachten „skalare Funktionen“ $f : I \to \mathbb{R}$, aber auch „vektorwertige Funktionen“ $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$.

Skalare Funktionen können wir uns am besten mit Hilfe ihres Graphen G_f veranschaulichen. Bei vektorwertigen Funktionen geht das nicht, wir fassen sie üblicherweise als parametrisierte Kurven auf. Solche Kurven kann man sich an Hand ihrer „Spur“ $\mathbf{f}(I) \subset \mathbb{R}^n$ gut vorstellen. Typische Beispiele sind etwa parametrisierte Geraden $t \mapsto \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}$ (mit $\mathbf{x}_0, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$) oder Kreise $t \mapsto \mathbf{x}_0 + r\cos(t) \cdot \mathbf{e}_1 + r\sin(t) \cdot \mathbf{e}_2$ (im $\mathbb{R}^2$).

Den Begriff des Grenzwertes von Funktionen können wir mühelos auf vektorwertige Funktionen ausdehnen. Wir schreiben $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ in der Form $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Dann ist

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{f}(t) = \big(\lim_{t \to t_0} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to t_0} f_n(t)\big).$$

Nun sind wir gerüstet, um den Begriff der Differenzierbarkeit einzuführen.

Definition:

Eine (vektorwertige) Funktion $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ heißt in $t_0 \in I$ *differenzierbar*, falls

$$\mathbf{f}'(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$$

existiert. Der Grenzwert $\mathbf{f}'(t_0)$ heißt die *Ableitung* von $\mathbf{f}$ in t_0. Im Falle $n \geq 2$ nennt man $\mathbf{f}'(t_0)$ auch den *Tangentialvektor* an $\mathbf{f}$ in t_0.

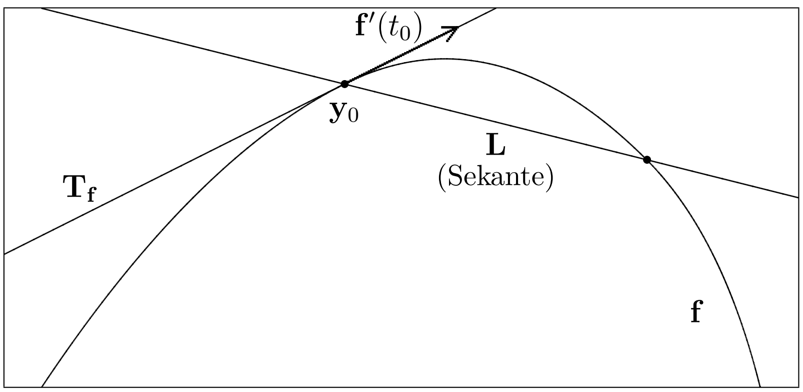
Eine anschauliche Deutung der Ableitung läßt sich am besten im Fall $n \geq 2$ geben. Durch

$$\mathbf{L}(t) := \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0) \cdot \mathbf{v}$$

wird eine beliebige Gerade durch $\mathbf{y}_0 := \mathbf{f}(t_0)$ mit $\mathbf{L}(t_0) = \mathbf{f}(t_0)$ parametrisiert. Ist $\mathbf{L}(t) = \mathbf{f}(t)$, so nennt man $\mathbf{L}$ die *Sekante* durch $\mathbf{y}_0$ und $\mathbf{f}(t)$. Läßt man jetzt t gegen t_0 gehen, so wird aus der Sekante die *Tangente* an $\mathbf{f}$ im Punkte $\mathbf{y}_0$,

$$\mathbf{T_f}(t) := \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0) \cdot \mathbf{f}'(t_0),$$

vorausgesetzt, daß die Kurve $\mathbf{f}$ in $\mathbf{y}_0$ glatt genug ist, um eine Tangente zu besitzen. Die Bedingung dafür ist gerade die Differenzierbarkeit in t_0.



Im Falle $n = 1$ betrachten wir statt der Funktion f die Kurve $\mathbf{F}(t) := (t, f(t))$, die den Graphen von f parametrisiert. Ist f in t_0 differenzierbar, so ist auch $\mathbf{F}$ in t_0 differenzierbar, und $\mathbf{F}'(t_0) = (1, f'(t_0))$. Die Tangente an $\mathbf{F}$ in t_0 ist dann gegeben durch

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}(t_0) + (t - t_0) \cdot \mathbf{F}'(t_0) = \big(t,\ f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0)\big).$$

Den Ausdruck

$$\Delta f(t_0, t) := \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

nennt man einen *Differenzenquotienten*. Daher stammt der eher historisch zu verstehende Begriff *Differentialquotient* für die Ableitung. Man schreibt auch

$$\frac{df}{dt}(t_0) := f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \Delta f(t_0, t)$$

Als der „Calculus“ (das Rechnen mit Ableitungen) von Newton und Leibniz entdeckt wurde, hatte man die Vorstellung, man könnte den Quotienten zweier „infinitesimaler Größen“ df und dt bilden. Das ist natürlich Unsinn. In den kommenden Semestern werden wir lernen, daß die „Differentiale“ df und dt vektorielle Größen sind. Dann können wir die Gleichung

$$\frac{df}{dt} = f'(t) \quad \text{als vektorielle Gleichung} \quad df = f'(t) \cdot dt$$

auffassen. Vorläufig ist diese Schreibweise für uns aber noch tabu!

Im Falle $n = 1$ gibt es noch ein praktisches Differenzierbarkeitskriterium:

Differenzierbarkeits-Kriterium

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $t_0 \in I$ differenzierbar, wenn es eine Funktion $\Delta_f : I \to \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

1. *Für alle $t \in I$ ist $f(t) = f(t_0) + \Delta_f(t) \cdot (t - t_0)$.*
2. *Δ_f ist in t_0 stetig.*

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß f in t_0 differenzierbar ist. Dann ist die Funktion

$$\Delta_f(t) := \begin{cases} \Delta f(t_0, t) & \text{für } t \neq t_0 \\ f'(t_0) & \text{für } t = t_0 \end{cases}$$

stetig in t_0, und nach Definition des Differenzenquotienten ist

$$f(t) = f(t_0) + \Delta f(t_0, t) \cdot (t - t_0) = f(t_0) + \Delta_f(t) \cdot (t - t_0)$$

für $t \neq t_0$. Läßt man jetzt t gegen t_0 gehen, so bleibt die Gleichung erhalten.

Ist umgekehrt das Kriterium erfüllt, so existiert

$$\lim_{t \to t_0} \Delta_f(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Damit ist f in t_0 differenzierbar. ∎

Der Vorteil des Differenzierbarkeitskriteriums gegenüber der Original-Definition liegt darin, daß man nicht mit Quotienten arbeiten muß. Das vereinfacht manche Beweise. Man beachte aber, daß die Funktion Δ_f vom Differenzierbarkeitspunkt t_0 abhängt, schließlich ist $\Delta_f(t) = \Delta f(t_0, t)$ für $t \neq t_0$. Will man also die Differenzierbarkeit von f in einem anderen Punkt t_1 untersuchen, so führt das zu einer anderen Funktion Δ_f mit $\Delta_f(t) = \Delta f(t_1, t)$ für $t \neq t_1$.

Eine vektorwertige Funktion $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann in t_0 differenzierbar, wenn jede der Komponenten-Funktionen f_i in t_0 differenzierbar ist, und es gilt:

$$\mathbf{f}'(t_0) = (f_1'(t_0), \ldots, f_n'(t_0)).$$

Wir sagen, $\mathbf{f}$ ist auf dem ganzen Intervall I differenzierbar, wenn $\mathbf{f}$ in jedem $t \in I$ differenzierbar ist. Dann wird durch $t \mapsto \mathbf{f}'(t)$ eine neue Funktion $\mathbf{f}' : I \to \mathbb{R}^n$ definiert, die *Ableitung* von $\mathbf{f}$.

Beispiele.

1. Ist $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{c}$ eine konstante Abbildung, so ist $f'(t) \equiv \mathbf{0}$.

2. Ist $\mathbf{f}(t) := \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}$ eine Gerade, so ist

$$\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = \mathbf{v} \text{ für beliebige Parameter } t,\ t_0,$$

   also $\mathbf{f}'(t) \equiv \mathbf{v}$.

3. $f(t) := |t|$ ist in $t = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

   hat für $t \to 0$ keinen eindeutigen Grenzwert.

   Tatsächlich hat $|x|$ bei $x = 0$ einen „Knick", ist dort also nicht genügend glatt.

Wir setzen die folgenden elementaren Regeln als bekannt voraus. Die erste wird meist an der Schule bewiesen, die anderen können wir bald mit einfacheren Mitteln zeigen.

$$\boxed{\begin{aligned} (x^n)' &= n \cdot x^{n-1} && \text{für } n \in \mathbb{N},\ x \text{ beliebig}, \\ \sin'(x) &= \cos(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \cos'(x) &= -\sin(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ \exp'(x) &= \exp(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

Beispiel.

Ist

$$\mathbf{f}(t) := \mathbf{a} + r\cos(t)\mathbf{e}_1 + r\sin(t)\mathbf{e}_2 = (a_1 + r\cos(t), a_2 + r\sin(t))$$

die Parametrisierung eines Kreises im $\mathbb{R}^2$, so ist

$$\mathbf{f}'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t)) = -r\sin(t)\mathbf{e}_1 + r\cos(t)\mathbf{e}_2.$$

Also ist

$$(\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{f}'(t) = (r\cos(t)\mathbf{e}_1 + r\sin(t)\mathbf{e}_2) \bullet (-r\sin(t)\mathbf{e}_1 + r\cos(t)\mathbf{e}_2) = 0,$$

d.h., der „Radiusvektor" $\mathbf{f}(t) - \mathbf{a}$ und der Tangentialvektor $\mathbf{f}'(t)$ stehen aufeinander senkrecht.

Bemerkung. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ in t_0 differenzierbar, so ist f in t_0 erst recht stetig. Das folgt sofort aus der Darstellung $f(t) = f(t_0) + \Delta_f(t) \cdot (t - t_0)$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für vektorwertige Funktionen.

Satz: $(u \circ \mathbf{f})'$ für lineares u

Sei $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in t_0 und $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ linear. Dann ist auch $u \circ \mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^k$ in t_0 differenzierbar, und es ist

$$(u \circ \mathbf{f})'(t_0) = u(\mathbf{f}'(t_0)).$$

BEWEIS: Es ist

$$\frac{u \circ \mathbf{f}(t) - u \circ \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = u\left(\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}\right),$$

und da u stetig ist, konvergiert der rechte Ausdruck für $t \to t_0$ gegen $u(\mathbf{f}'(t_0))$. ∎

Beispiele.

1. Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch $f \pm g$, und es ist $(f \pm g)' = f' \pm g'$.

   BEWEIS: $(f, g) : I \to \mathbb{R}^2$ ist differenzierbar, und $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x_1, x_2) := x_1 \pm x_2$ ist linear. ∎

2. Genauso folgt: Mit $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ ist auch $c \cdot \mathbf{f}$ differenzierbar, und es ist $(c \cdot \mathbf{f})' = c \cdot \mathbf{f}'$.

Verallgemeinerte Produktregel

Sind $\mathbf{f}, \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}^n$ beide in t_0 differenzierbar, so ist auch $\mathbf{f} \bullet \mathbf{g} : I \to \mathbb{R}$ in t_0 differenzierbar, und es gilt:

$$(\mathbf{f} \bullet \mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0) \bullet \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \bullet \mathbf{g}'(t_0).$$

BEWEIS: Man benutzt einen kleinen Trick:

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathbf{f} \bullet \mathbf{g})(t) - (\mathbf{f} \bullet \mathbf{g})(t_0)}{t - t_0} &= \frac{(\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)) \bullet \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t_0) \bullet (\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0))}{t - t_0} \\
&= \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0}{t - t_0} \bullet \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t_0) \bullet \frac{\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t_0)}{t - t_0}.
\end{aligned}$$

strebt für $t \to t_0$ gegen $\mathbf{f}'(t_0) \bullet \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \bullet \mathbf{g}'(t_0)$. ∎

Hierin ist die gewöhnliche Produktregel für skalare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ enthalten:

$$\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' .}$$

Beispiel.

Sei $f(t) := \sin^2(t)$. Dann ist

$$f'(t) = \sin'(t)\sin(t) + \sin(t)\sin'(t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

Aus der Produktregel folgt sogleich auch die bekannte „Quotientenregel“. Sind f und g in t_0 differenzierbar und ist $g(t) \neq 0$ in der Nähe von t_0, so ist auch f/g in t_0 differenzierbar, und es gilt:

$$\boxed{(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \,,}$$

Wir verzichten auf den Beweis der Differenzierbarkeit. Die Formel erhält man, indem man $f' = (g \cdot \dfrac{f}{g})'$ nach der Produktregel ausrechnet.

Als Anwendung berechnen wir die Ableitung des Tangens:

$$\tan'(t) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(t) = \frac{\cos^2(t) - (-\sin^2(t))}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}.$$

Kettenregel

Sei $\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in t_0, J ein weiteres Intervall und $g : J \to I$ differenzierbar in $s_0 \in J$, $g(s_0) = t_0$. Dann ist auch $\mathbf{f} \circ g : J \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar in s_0, und es gilt:

$$(\mathbf{f} \circ g)'(s_0) = \mathbf{f}'(g(s_0)) \cdot g'(s_0).$$

BEWEIS: Ist $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, so ist $\mathbf{f} \circ g = (f_1 \circ g, \ldots, f_n \circ g)$. Es reicht deshalb, den Fall $n = 1$ zu beweisen. Dabei benutzen wir das Differenzierbarkeits-Kriterium. Wir schreiben

$$\begin{array}{rrcl} & f(t) & = & f(t_0) + \Delta_f(t) \cdot (t - t_0) \\ \text{und} & g(s) & = & g(s_0) + \Delta_g(t) \cdot (s - s_0), \end{array}$$

wobei Δ_f in t_0 und Δ_g in s_0 stetig ist. Einfaches Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} f \circ g(s) &= f(g(s_0)) + \Delta_f(g(s)) \cdot (g(s) - g(s_0)) \\ &= f \circ g(s_0) + \Delta_f(g(s)) \cdot \Delta_g(s) \cdot (s - s_0). \end{aligned}$$

Dabei ist $s \mapsto \Delta_f(g(s)) \cdot \Delta_g(s)$ in $s = s_0$ stetig. ∎

Beispiele.

1. Ist f differenzierbar, so ist auch $t \mapsto e^{f(t)}$ differenzierbar, und es gilt:

   $$(e^f)'(t) = f'(t) \cdot e^{f(t)}.$$

   Insbesondere ist $a^t = e^{\ln(a) \cdot t}$, also

   $$\boxed{(a^t)' = \ln(a) \cdot a^t, \text{ für } a > 0,\ t \in \mathbb{R}.}$$

2. Sei $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{f}(t) := (r\cos(t), r\sin(t))$ die Parametrisierung eines Kreises um den Nullpunkt. Setzt man $\varphi(s) := 2s$, so parametrisiert $\mathbf{f} \circ \varphi : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ den gleichen Kreis. Es ist nun $(\mathbf{f} \circ \varphi)'(s_0) = 2 \cdot \mathbf{f}'(2s_0)$. Das bedeutet, daß der Kreis diesmal mit der doppelten Geschwindigkeit durchlaufen wird.

Definition:

$\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^n$ sei in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar. Ist die Ableitung $\mathbf{f}' : I \to \mathbb{R}^n$ in $t_0 \in I$ noch ein weiteres Mal differenzierbar, so sagt man, $\mathbf{f}$ ist in t_0 zweimal differenzierbar, und man schreibt:

$$\mathbf{f}''(t_0) := (\mathbf{f}')'(t_0).$$

Induktiv definiert man die n-te Ableitung $\mathbf{f}^{(n)}$:

Ist $\mathbf{f}$ auf I $(n-1)$-mal differenzierbar und die $(n-1)$-te Ableitung $\mathbf{f}^{(n-1)}$ in t_0 noch ein weiteres mal differenzierbar, so sagt man, f ist in t_0 n-mal differenzierbar, und die n-te Ableitung in t_0 wird definiert durch

$$\mathbf{f}^{(n)}(t_0) := (\mathbf{f}^{(n-1)})'(t_0).$$

Bemerkung. Manchmal benutzt man auch die Leibnizsche Schreibweise: Wie man $\dfrac{df}{dt}$ statt f' schreibt, so schreibt man auch $\dfrac{d^n f}{dt^n}$ statt $f^{(n)}$.

Beispiel.

Sei $f(t) := e^{t^2}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t \cdot e^{t^2}, \\ f''(t) &= 2 \cdot e^{t^2} + 2t \cdot (2t \cdot e^{t^2}) \;=\; (2+4t^2) \cdot e^{t^2}, \\ f^{(3)}(t) &= 8t \cdot e^{t^2} + (2+4t^2) \cdot (2t \cdot e^{t^2}) \;=\; (12t + 8t^3) \cdot e^{t^2}. \end{aligned}$$

Die Versuche lassen folgendes vermuten:

$$f^{(n)}(t) = p(t) \cdot e^{t^2},$$

mit einem Polynom $p(t)$ vom Grad n, das nur gerade bzw. nur ungerade Potenzen von t enthält, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Für kleine n haben wir das verifiziert. Also können wir einen Induktionsbeweis führen. Ist die Formel für $n \geq 1$ richtig, so gilt:

$$f^{(n+1)}(t) = (p'(t) + 2t \cdot p(t)) \cdot e^{t^2}.$$

Ist etwa $n = 2k$, so enthält $p(t)$ nur gerade Potenzen von t. Aber dann ist $p'(t)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ und $2t \cdot p(t)$ ein Polynom vom Grad $n+1$, und beide enthalten nur ungerade Potenzen von t. Ähnlich funktioniert es im Falle $n = 2k+1$.

Also gilt die Formel auch für $n+1$ und damit für alle n.

Im Rest des Paragraphen betrachten wir nur noch skalare Funktionen.

Definition:

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ überall k-mal differenzierbar und $f^{(k)}$ auf I noch stetig, so nennt man f auf I *k-mal stetig differenzierbar.*

Die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I bezeichnet man mit $\mathcal{C}^k(I)$.

Bemerkung. $\mathcal{C}^k(I)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und $D : \mathcal{C}^k(I) \to \mathcal{C}^{k-1}(I)$ mit $D(f) := f'$ ist eine lineare Abbildung. $\mathrm{Ker}(D)$ besteht aus den konstanten Funktionen.

Ableitung der Umkehrfunktion

Ist $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ eine bijektive differenzierbare Abbildung und $f'(x_0) \neq 0$, so ist $f^{-1} : J \to I$ in $f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Den Beweis lassen wir hier weg. Man führt ihn am besten mit Hilfe des Differenzierbarkeitskriteriums. Die Formel erhält man durch Differentiation der Formel $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Beispiele.

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist bijektiv und differenzierbar, und $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$. Also ist auch die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar, mit $(\ln)'(e^x) = \dfrac{1}{e^x}$, also

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}\ .}$$

2. Die Funktion x^a ist für festes $a \neq 0$ und $x > 0$ definiert durch $x^a := e^{a\ln(x)}$. Dann ist $(x^a)' = a \cdot x^{-1} \cdot e^{a\ln(x)}$, also

$$\boxed{(x^a)' = a \cdot x^{a-1},\ \text{für } x > 0 \text{ und } a \neq 0.}$$

Die Funktion x^x ist etwas kniffliger zu differenzieren. Auf jeden Fall ist **nicht** $(x^x)' = x \cdot x^{x-1} = x^x$. Vielmehr benutzt man die Darstellung $x^x = e^{x\ln(x)}$, die Kettenregel und die Produktregel. So erhält man:

$$(x^x)' = e^{x\ln(x)} \cdot (x\ln(x))' = (\ln x + 1) \cdot x^x.$$

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}_+$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist auch $g := \ln \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt:

$$g'(x) = (\ln \circ f)'(x) = \ln'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Man nennt diesen Ausdruck auch die „logarithmische Ableitung“ von f.

4. Die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und bijektiv, und $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ hat dort keine Nullstelle. Also ist auch die Umkehrfunktion arctan auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt:

$$\boxed{\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}.}$$

Dieses Ergebnis sollte man sich für später merken: Die Ableitung der Umkehrfunktion des Tangens, also einer Winkelfunktion, ergibt eine rationale Funktion.

5. Es ist $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$ für $-\pi/2 < x < \pi/2$. Also ist die Umkehrfunktion $\arcsin : (-1, 1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ differenzierbar, und es ist

$$\boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ .}$$

Definition:

$f: I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*), falls gilt:

$$\exists\, \varepsilon > 0, \text{ so daß } f(x) \leq f(x_0) \text{ für } x \in I \text{ und } |x - x_0| < \varepsilon \text{ ist,}$$

$$(\text{bzw. } f(x) \geq f(x_0), \text{ im Falle des Minimums}).$$

In beiden Fällen sagt man, f hat in x_0 einen (lokalen) Extremwert.

Man beachte: Ist f in der Nähe von x_0 konstant, so hat f dort nach unserer Definition auch einen Extremwert! Wir führen deshalb noch einen zusätzlichen Begriff ein:

Definition:

$f: I \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in I$ ein *isoliertes Maximum* (bzw. ein *isoliertes Minimum*), falls gilt:

$$\exists\, \varepsilon > 0, \text{ so daß } f(x) < f(x_0) \text{ für } |x - x_0| < \varepsilon \text{ und } x \neq x_0 \text{ ist}$$

$$(\text{bzw. } f(x) > f(x_0) \text{ im Falle des Minimums}).$$

Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt *innerer Punkt* des Intervalls I, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $U_\varepsilon(x_0)$ noch ganz in I liegt. Der Punkt x_0 kann dann zwar beliebig nahe an den Rand des Intervalls heranrücken, aber nicht selbst ein Randpunkt sein.

„Notwendiges Kriterium“ für Extremwerte

Sei I ein Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und x_0 ein innerer Punkt von I. Wenn f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Wir betrachten den Differenzenquotienten $\Delta f(x_0, x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und behandeln nur den Fall des lokalen Maximums, beim Minimum geht es analog.

Hat f in x_0 ein lokales Maximum, so ist $f(x) \leq f(x_0)$ für x nahe bei x_0. Ist $x < x_0$, so ist $x - x_0 < 0$ und daher $\Delta f(x_0, x) \geq 0$. Ist jedoch $x > x_0$, so ist $\Delta f(x_0, x) \leq 0$. Aber dann muß $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \Delta f(x_0, x) = 0$ sein. ∎

Hinreichende Kriterien behandeln wir später.

Beispiele.

1. Sei $I = [-1, 1]$, $f : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2$. Dann gilt für alle $x \in I : f(x) \geq 0 = f(0)$. Also hat f in $x_0 := 0$ ein (sogar isoliertes) lokales Minimum. Und tatsächlich besitzt $f'(x) = 2x$ in x_0 eine Nullstelle.

2. $g : I \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := |x|$ hat ebenfalls in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum. Aber weil $|x|$ dort nicht differenzierbar ist, kann man das Kriterium nicht anwenden.

   Für $x \in I$ ist $|x| \leq 1 = g(-1) = g(1)$. Also hat g in den Punkten $x = -1$ und $x = +1$ jeweils ein lokales Maximum. Aber auch hier kann man das notwendige Kriterium nicht anwenden, denn die Punkte liegen nicht im Innern von I.

§ 2 Mittelwertsatz und Taylorsche Formel

Inhalt:

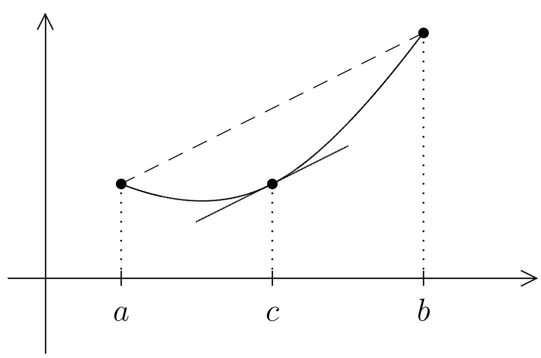
Der erste und zweite Mittelwertsatz, Monotonie, Regeln von de l'Hospital, Taylorformel, hinreichendes Kriterium für Extremwerte, Wendepunkte, Kurvendiskussion.

Wir führen folgende Sprechweise ein: Ein Punkt x liegt „im Innern" des Intervalls $[a, b]$, falls $a < x < b$ ist.

Der 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Innern von I differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt c im Innern von I mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



BEWEIS: Sei $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, also

$$L(x) := f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \ ,$$

und $g : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x) - L(x)$. Dann ist $g(a) = g(b) = 0$ und

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

Ist g konstant, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist g nicht konstant, so nimmt g in einem Punkt c im Innern von I ein Maximum oder Minimum an. Dann muß aber $g'(c) = 0$ sein. ■

So einfach der Beweis, so mächtig die Konsequenzen:

Funktionen mit verschwindender Ableitung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von I differenzierbar.

Ist $f'(x) \equiv 0$ im Innern von I, so ist f auf I konstant.

Beweis: Sei $I = [a, b]$, $a \le x_1 < x_2 \le b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein c mit $x_1 < c < x_2$ und

$$0 = f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Das ist nur möglich, wenn $f(x_1) = f(x_2)$ ist. Und da die Punkte x_1 und x_2 beliebig gewählt werden können, ist f konstant. ■

Ableitung und Monotonie

Sei $f : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und im Inneren von I differenzierbar. f ist genau dann auf I monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \ge 0$ (bzw. $f'(x) \le 0$) für alle $x \in (a, b)$ ist.

Ist sogar $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) im Innern von I), so ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend).

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall der wachsenden Monotonie.

1) Ist f monoton wachsend, so sind alle Differenzenquotienten ≥ 0, und daher ist auch überall $f'(x) \ge 0$.

2) Ist umgekehrt $f'(x) \ge 0$ (oder sogar $f'(x) > 0$) für alle $x \in (a, b)$ und $x_1 < x_2$, so gibt es nach dem Mittelwertsatz ein c mit $x_1 < c < x_2$, so daß gilt:

$$0 \le f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,, \text{ also } f(x_1) \le f(x_2),$$

oder sogar

$$0 < f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\,, \text{ also } f(x_1) < f(x_2).$$

Das heißt, daß f monoton (bzw. streng monoton) wachsend ist. ■

Beispiele.

1. Sei $f(x) := x^3$. Dann ist $f'(x) = 3x^2$. Da überall $f'(x) \geq 0$ ist, wächst f auf ganz $\mathbb{R}$ monoton. Außerhalb des Nullpunktes ist $f'(x)$ sogar positiv, also wächst f dort streng monoton. Und für $x_1 < 0 < x_2$, $x_1 = 0 < x_2$ oder $x_1 < 0 = x_2$ ist jeweils $f(x_1) < f(x_2)$. Daraus folgt, daß f sogar überall streng monoton steigt. Trotzdem ist $f'(0) = 0$.

2. Für $0 < x < \pi$ ist $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Dort ist

$$\cot'(x) = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0,$$

also ist $\cot(x)$ streng monoton fallend.

3. Die Funktionen $\sinh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ sind offensichtlich überall differenzierbar, und es gilt:

$$\boxed{\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{und} \quad \cosh'(x) = \sinh(x).}$$

Da $\sinh'(x) > 0$ für alle x ist, ist sinh streng monoton wachsend und somit umkehrbar. Die Umkehrfunktion wird mit arsinh (*Area-Sinus hyperbolicus*) bezeichnet.

Die Beziehung $y = \sinh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ liefert eine quadratische Gleichung für e^x,

$$(e^x)^2 - 2y \cdot e^x - 1 = 0,$$

und damit $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. Da $e^x > 0$ ist, muß das positive Vorzeichen gewählt werden. Damit ist

$$\operatorname{arsinh}(y) = x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

Es folgt:

$$\operatorname{arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Der Cosinus hyperbolicus läßt sich nur für $x \geq 0$ oder für $x \leq 0$ umkehren. Die Umkehrfunktion arcosh (*Area-Cosinus hyperbolicus*) ist jeweils für $y \geq 1$ erklärt. Sie ist gegeben durch

$$\operatorname{arcosh}(y) = \begin{cases} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) & \text{für } x \geq 0, \\ \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Schließlich kann man den Mittelwertsatz noch weiter verallgemeinern:

Der 2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es seien f und g auf $I := [a, b]$ stetig und im Innern von I differenzierbar. Außerdem sei $g'(x) \neq 0$ im Innern von I.

Dann gibt es einen Punkt c im Innern von I mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Für $g(x) = x$ erhält man den 1. Mittelwertsatz zurück.

Beweis: Wäre $g(b) - g(a) = 0$, so wäre $g'(c) = 0$ für ein c im Innern von I. Das hatten wir aber gerade ausgeschlossen.

Wir benutzen die Hilfsfunktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

Es ist $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem 1. Mittelwertsatz gibt es ein c im Innern des Intervalls, so daß $F'(c) = 0$ ist. Aber offensichtlich ist

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Daraus folgt die gewünschte Gleichung. ∎

Ist x_0 ein Punkt im Innern des Intervalls I und $f(x_0) = g(x_0) = 0$, so gibt es nach dem zweiten Mittelwertsatz zu jedem $x \in I$ mit $x \neq x_0$ ein $c = c(x)$ zwischen x_0 und x mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Das kann man noch verallgemeinern:

Folgerung (Mehrfache Anwendung des 2. MWS)

Die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, und es sei $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$. Ist $g^{(k)}(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$ und $k = 1, \ldots, n+1$, so gibt es zu jedem $x \in I$ mit $x \neq x_0$ ein $c = c(x)$ zwischen x_0 und x, so daß gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)} .$$

BEWEIS: Mehrfache Anwendung des 2. Mittelwertsatzes liefert:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \ldots = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})},$$

mit $|x - x_0| > |c_1 - x_0| > \ldots > |c_{n+1} - x_0|$. Dann setze man $c := c_{n+1}$. ∎

Als weitere Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes ergibt sich die

1. Regel von de l'Hospital (der Grenzwert $\frac{0}{0}$)

Die Funktionen f und g seien auf dem offenen Intervall $I := (a, b)$ differenzierbar, und es sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in I$.

Außerdem sei $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$.

Wenn $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$,
und die beiden Grenzwerte sind gleich. Eine entsprechende Aussage gilt auch für den linksseitigen Grenzwert bei b.

BEWEIS: Nach Voraussetzung kann man f und g stetig nach $[a, b)$ fortsetzen. Es sei (x_ν) eine Folge von Zahlen mit $a < x_\nu < b$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = a$ (nicht notwendig monoton). Nach dem 2. Mittelwertsatz gibt es Zahlen c_ν mit $a < c_\nu < x_\nu$ und

$$\frac{f(x_\nu)}{g(x_\nu)} = \frac{f(x_\nu) - f(a)}{g(x_\nu) - g(a)} = \frac{f'(c_\nu)}{g'(c_\nu)}.$$

Da auch $\lim\limits_{\nu\to\infty} c_\nu = a$ ist, strebt der letzte Quotient nach Voraussetzung gegen $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Aber das bedeutet, daß

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ist, und analog schließt man für den linksseitigen Grenzwert. ∎

Für die Annäherung an $\pm\infty$ gelten analoge Aussagen.

Beispiele.

1. Sei $f(x) := \sin x$ und $g(x) := x$.

   Da $f(0) = g(0) = 0$ ist und $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{1}$ für $x \to 0$ gegen 1 strebt, ist auch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

2. Sei $f(x) := \ln(1-x)$ und $g(x) := x + \cos x$. Dann gilt:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{(x-1)(1-\sin x)} \to -1, \text{ für } x \to 0.$$

Aber man darf l'Hospital gar nicht anwenden!! Es ist zwar $f(0) = 0$, aber $g(0) = 1$.

Tatsächlich ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x+\cos x} = 0$.

2. Regel von de l'Hospital (der Grenzwert $\dfrac{\infty}{\infty}$)

Die Funktionen f und g seien auf dem offenen Intervall $I := (a,b)$ differenzierbar, und es sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in I$.

Es sei $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = +\infty$.

Wenn $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, und die beiden Grenzwerte sind gleich.

Die gleiche Aussage gilt für die Annäherung an b von links.

Der BEWEIS benutzt ebenfalls den 2. Mittelwertsatz, ist aber etwas komplizierter. Ich lasse ihn hier weg.

Beispiele.

1. Es ist $\lim\limits_{x\to 0+} x \cdot \ln(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(x)}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -\lim\limits_{x\to 0+} x = 0.$

2. Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein normiertes Polynom. Mehrfache Anwendung von l'Hospital ergibt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{p'(x)} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty.$$

   Die Exponentialfunktion wächst stärker als jedes Polynom.

3. Dagegen gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{p(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot p'(x)} = 0.$$

   Die Logarithmusfunktion wächst also schwächer als jedes Polynom.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a \in I$ ein fest gewählter Punkt. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \Delta_f(x) \cdot (x-a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + (\Delta_f(x) - f'(a)) \cdot (x-a) \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + r(x), \end{aligned}$$

mit $\lim\limits_{x \to a} r(x)/(x-a) = \lim\limits_{x \to a} \big(\Delta_f(x) - f'(a)\big) = 0$. Dabei ist

$$p(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$$

die einzige affin-lineare Funktion mit $p(a) = f(a)$ und $p'(a) = f'(a)$.

Die Funktion $r(x) = f(x) - p(x)$ ist differenzierbar, mit $r(a) = r'(a) = 0$. Ist f sogar zweimal differenzierbar und $d(x) := (x-a)^2$, so können wir die Folgerung aus dem 2. Mittelwertsatz auf den Quotienten $r(x)/d(x)$ anwenden (denn es ist auch $d(a) = d'(a) = 0$ und $d(x) \neq 0$ für $x \neq a$). Danach gibt es ein $c = c(x)$ zwischen a und x mit

$$\frac{r(x)}{d(x)} = \frac{r''(c)}{d''(c)} = \frac{f''(c)}{2}\,, \text{ also } f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2.$$

Wir wollen jetzt versuchen, eine n-mal differenzierbare Funktion f so durch ein Polynom $p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$ zu approximieren, daß $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ist.

Fortgesetztes Differenzieren ergibt:

$$\begin{aligned} p(a) &= a_0, \\ p'(a) &= a_1, \\ p''(a) &= 2a_2, \\ &\vdots \\ p^{(k)}(a) &= k!a_k. \end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom muß also folgende Gestalt haben:

$$p(x) = T_n f(x; a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Wir nennen $T_n f(x) = T_n f(x; a)$ das n-te *Taylorpolynom* von f in a.

Nun geht es um das Verhalten des *Restgliedes* $R_n(x) := f(x) - T_n f(x)$ in der Nähe von a. Besonders gute Ergebnisse erzielt man wieder, wenn f sogar $(n+1)$-mal (stetig) differenzierbar ist.

Taylorsche Formel

Es sei I ein Intervall, a ein innerer Punkt von I und f auf I $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \neq a$ ein $c = c(x)$ zwischen a und x, so daß gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Man spricht dann auch von der „Lagrangeschen Form“ des Restgliedes.

Die Darstellung $f(x) = T_n f(x; a) + R_n(x)$ nennt man die „Taylorentwicklung“ der Ordnung n von f im Punkte a.

BEWEIS: Wir betrachten den Quotienten

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f(x) - T_n f(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

für $x \neq a$. Die $(n+1)$-fache Anwendung des 2. MWS liefert ein c mit

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

also

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

∎

Beispiele.

1. Sei $a = 0$ und $f(x) = \sin(x)$. Es ist

   $$\sin'(x) = \cos(x),\ \sin''(x) = -\sin(x),\ \sin^{(3)}(x) = -\cos(x),\ \sin^{(4)}(x) = \sin(x),$$

   und dann wiederholt sich das wieder. Daraus folgt:

   $$\begin{aligned} \sin^{(2m)}(0) &= 0 \\ \text{und } \sin^{(2m+1)}(0) &= (-1)^m. \end{aligned}$$

   Hier ergibt sich eine seltsame Situation. Es ist $T_{2m} f(x; 0) = T_{2m-1} f(x; 0)$. Deshalb braucht man für die Taylorentwicklung der Ordnung $2m$ nur das Taylorpolynom der Ordnung $2m-1$ zu berechnen, kann aber das Restglied R_{2m} benutzen. Das ergibt:

   $$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} + R_{2m}(x) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1} + \frac{(-1)^m \cos(c)}{(2m+1)!}x^{2m+1}. \end{aligned}$$

2. Analog geht es beim Cosinus. Es ist $\cos^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sin(x)$ und $\cos^{(2k)}(x) = (-1)^k\cos(x)$, also

$$\begin{array}{rcl} \cos^{(2k+1)}(0) & = & 0 \\ \text{und} \quad \cos^{(2k)}(0) & = & (-1)^k. \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} + R_{2m+1}(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \pm \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \frac{(-1)^{m+1}\cos(c)}{(2m+2)!}x^{2m+2}. \end{aligned}$$

3. Sei wieder $a = 0$ und $f(x) = e^x$. Da $(e^x)' = e^x$ und $e^0 = 1$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + R_n(x) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}. \end{aligned}$$

4. Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert. Hier nehmen wir $a = 1$ als Entwicklungspunkt. Es ist

$$\ln(1) = 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x},\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2},\ \ln^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3},\ \ln^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},$$

und allgemein

$$\ln^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}, \text{ für } k \geq 1.$$

Das bedeutet, daß

$$\frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ für } k \geq 1$$

ist, also

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k + R_n(x) \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 \pm \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

mit $R_n(x) = (x-1)^{n+1}/((n+1)c^{n+1})$. Diese Entwicklung kann natürlich nur für $x > 0$ gelten.

Als Anwendung der Taylorformel können wir jetzt das Problem der lokalen Extrema erledigen:

Hinreichendes Kriterium für Extremwerte

Die Funktion f sei in der Nähe von x_0 n-mal stetig differenzierbar. Es sei

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x_0) &= 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n-1 \\ \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) &\neq 0. \end{aligned}$$

Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 kein lokales Extremum.
Ist n gerade, so liegt ein lokales Extremum in x_0 vor, und zwar

$$\begin{aligned} \text{ein Maximum, falls } f^{(n)}(x_0) &< 0 \quad \text{ist,} \\ \text{und ein Minimum, falls } f^{(n)}(x_0) &> 0 \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

BEWEIS: Wir verwenden die Lagrangesche Form des Restgliedes bei der Taylorentwicklung. Da $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ ist, folgt mit $h := x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n,$$

mit einem geeigneten c zwischen x_0 und x.

Ist $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt, so ist $f^{(n)}(x) \neq 0$ für $|x - x_0| < \varepsilon$, und dann hat $f^{(n)}(c)$ das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$.

Wir betrachten nur den Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$, der andere geht analog. Da c von x (und damit von h) abhängt, können wir schreiben:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(h) \cdot h^n,$$

mit einer positiven Funktion φ.

Ist n ungerade, so wechselt h^n bei $h = 0$ sein Vorzeichen, und es kann kein Extremwert vorliegen. Ist n gerade, so bleibt h^n immer ≥ 0 und verschwindet bei $h = 0$. Dann besitzt f in x_0 ein Minimum. ∎

Definition:

Sei $f \in \mathcal{C}^2(I)$, $x_0 \in I$ und $f''(x_0) = 0$.
f hat in x_0 einen *Wendepunkt*, falls $f''(x)$ dort sein Vorzeichen (also f' sein Monotonieverhalten) ändert. Ist zusätzlich $f'(x_0) = 0$, so spricht man von einem *Sattelpunkt*.

Die Definition ist so zu verstehen, daß f'' in der Nähe von x_0 keine andere Nullstelle hat. Offensichtlich hat f' dann in x_0 ein lokales Extremum. Die Umkehrung gilt allerdings nicht.

Ist $f'' > 0$, also f' streng monoton wachsend, so beschreibt der Graph von f eine Linkskurve. Man nennt f dann in diesem Bereich *(strikt) konvex*. Ist $f'' < 0$, also f' streng monoton fallend, so beschreibt der Graph eine Rechtskurve. In diesem Fall heißt f *strikt konkav*. Die zweite Ableitung einer Funktion gibt also Auskunft über deren Krümmungsverhalten. Bei einem Wendepunkt wechselt der Graph von einer Linkskrümmung zu einer Rechtskrümmung, oder umgekehrt.

Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte

Sei I ein offenes Intervall, $f \in \mathcal{C}^3(I)$ und $x_0 \in I$.

Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so besitzt f in x_0 einen Wendepunkt.

Beweis: Es liegt offensichtlich kein Extremwert vor.

Behauptung: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $f''(x) \neq 0$ für $|x - x_0| < \varepsilon$ und $x \neq x_0$ ist.

Beweis dafür: Wäre die Behauptung falsch, so müßte es eine Folge von Punkten x_ν mit $f''(x_\nu) = 0$ geben, die gegen x_0 konvergiert. Wegen des Mittelwertsatzes gibt es dann Punkte c_ν zwischen x_0 und x_ν mit $f'''(c_\nu) = 0$. Daraus folgt, daß $f'''(x_0) = 0$ ist, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also muß $f''(x)$ bei x_0 sein Vorzeichen wechseln. ∎

Beispiele.

1. Sei $f(x) := x^3$.

   Es ist $f''(x) = 6x$, also $f''(0) = 0$. Für $x < 0$ ist $f''(x) < 0$, und für $x > 0$ ist $f''(x) > 0$. Also wechselt f von einer Rechtskrümmung zu einer Linkskrümmung und hat damit in 0 einen Wendepunkt.

   Tatsächlich ist $f'''(0) = 6 \neq 0$.

2. Sei $f(x) := x^4$, also $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$ und $f^{(4)}(x) = 24$.

   Es ist $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, aber $f^{(4)}(0) > 0$. Damit muß f im Nullpunkt ein Minimum besitzen, es kann dort kein Wendepunkt vorliegen!

3. Jetzt betrachten wir noch $f(x) := x^5$.

   Es ist $f'(x) = 5x^4$, $f''(x) = 20x^3$ und $f'''(x) = 60x^2$, also
   $f''(0) = 0$ **und** $f'''(0) = 0$.

Aber offensichtlich ist $f''(x) < 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $x > 0$. Damit besitzt f im Nullpunkt einen Wendepunkt.

Zum Schluß noch eine etwas kompliziertere „Kurvendiskussion“:

Wir betrachten eine „gedämpfte harmonische Schwingung“,

$$f(x) := A \cdot e^{-kx} \sin(\omega x + \varphi),$$

mit $A, k, \omega, \varphi > 0$ und $x \geq 0$.

Zunächst berechnen wir die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= A \cdot e^{-kx}[\omega \cos(\omega x + \varphi) - k \sin(\omega x + \varphi)], \\ f''(x) &= A \cdot e^{-kx}[-\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) - k\omega \cos(\omega x + \varphi) \\ &\qquad\qquad - k\omega \cos(\omega x + \varphi) + k^2 \sin(\omega x + \varphi)] \\ &= A \cdot e^{-kx}[(k^2 - \omega^2) \sin(\omega x + \varphi) - 2k\omega \cos(\omega x + \varphi)]. \end{aligned}$$

Es ist $f(0) = A \cdot \sin(\varphi)$ und $|f(x)| \leq A \cdot e^{-kx}$, insbesondere $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Nullstellen: Es ist

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\iff \quad \sin(\omega x + \varphi) = 0 \\ &\iff \quad \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } \omega x + \varphi = n\pi \\ &\iff \quad \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \geq \frac{\varphi}{\pi}, \text{ s.d. } x = \frac{1}{\omega}[n\pi - \varphi] \text{ ist.} \end{aligned}$$

Extremwerte: Zunächst ist

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad \omega \cos(\omega x + \varphi) - k \sin(\omega x + \varphi) = 0 \\ &\iff \quad \tan(\omega x + \varphi) = \frac{\omega}{k} \\ &\iff \quad \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } \omega x + \varphi = \arctan\Big(\frac{\omega}{k}\Big) + n\pi \\ &\iff \quad \exists\, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \frac{1}{\omega}[a + n\pi - \varphi], \\ &\qquad \text{(wobei } 0 < a := \arctan\Big(\frac{\omega}{k}\Big) < \frac{\pi}{2} \text{ ist} \\ &\qquad \text{ und } a + n\pi - \varphi \geq 0, \text{ also } n \geq \frac{\varphi - a}{\pi} \text{ sein muß.)} \end{aligned}$$

Setzt man $n_0 := \left[\dfrac{a - \varphi}{\pi}\right]$ (Gauß-Klammer), so ist

$$x_0 := \frac{1}{\omega}(a - n_0\pi - \varphi)$$

der kleinste mögliche Extremwert, der auftreten kann. Ist $x_n = \frac{1}{\omega}[a + n\pi - \varphi]$ eine weitere Nullstelle von f', so ist $x_n = x_0 + \frac{\pi}{\omega}(n_0 + n)$.

Zur näheren Untersuchung der Extremwerte setzen wir nicht die berechneten Werte ein, sondern wir benutzen die Gleichung

$$\omega\cos(\omega x_n+\varphi)=k\sin(\omega x_n+\varphi).$$

In diesen Punkten ist

$$f''(x_n)=-A\cdot e^{-kx_n}(k^2+\omega^2)\sin(\omega x_n+\varphi).$$

Der Ausdruck $\omega x_n+\varphi=a+n\pi$ liegt immer zwischen $n\pi$ und $n\pi+\frac{\pi}{2}$. Bei geradem n ist der Sinus dort positiv, und es liegt ein Maximum vor. Bei ungeradem n liegt ein Minimum vor.

Man kann die Funktionswerte in den Maxima folgendermaßen bestimmen:
Weil $\omega\cos(\omega x_n+\varphi)=k\sin(\omega x_n+\varphi)$ ist, folgt:

$$\omega^2=(\omega\sin(\omega x_n+\varphi))^2+(\omega\cos(\omega x_n+\varphi))^2=(\omega^2+k^2)\sin(\omega x_n+\varphi)^2,$$

also

$$\sin(\omega x_n+\varphi)=\pm\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}.$$

Ein Maximum liegt genau dann vor, wenn $n=2m$ gerade und deshalb $\sin(\omega x_n+\varphi)\geq 0$ ist. Also ist

$$f(x_{2m})=A\cdot e^{-kx_{2m}}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}.$$

Der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maxima x_{2m} und x_{2m+2} beträgt jeweils

$$\frac{1}{\omega}[a+(2m+2)\pi-\varphi]-\frac{1}{\omega}[a+2m\pi-\varphi]=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Setzt man $y_n:=f(x_n)$, so ist

$$\frac{y_{2m}}{y_{2m+2}}=\frac{A\cdot e^{-kx_{2m}}\sin(\omega x_{2m}+\varphi)}{A\cdot e^{-kx_{2m+2}}\sin(\omega x_{2m+2}+\varphi)}=\frac{e^{-kx_{2m}}}{e^{-kx_{2m+2}}}=e^{k(x_{2m+2}-x_{2m})}=e^{2k\pi/\omega}.$$

Es reicht also, den Wert des ersten Maximums explizit zu berechnen, dann erhält man auch alle anderen Werte.

Die Größe $D:=\ln\dfrac{y_{2m}}{y_{2m+2}}=\dfrac{2k\pi}{\omega}$ nennt man das *logarithmische Dekrement* der Schwingung. Wenn man die „Kreisfrequenz“ ω und die Amplitudenverhältnisse $\dfrac{y_{2m}}{y_{2m+2}}$ kennt, kann man über D den *Dämpfungskoeffizienten* k berechnen.

Übrigens stimmen die Maxima **nicht** mit den Punkten überein, wo der Graph die „Hüllkurve“ $y=Ae^{-kx}$ berührt: Dort muß ja $\sin(\omega x+\varphi)=\pm 1$ sein, also $\omega x+\varphi=(2m+1)\dfrac{\pi}{2}$. Bezeichnen wir mit $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ die „Schwingungsdauer“ und mit $z_n:=\dfrac{1}{\omega}(n\pi-\varphi)$ die Nullstellen von f, so haben die Berührungspunkte die Abszissen

$$b_n = \frac{1}{\omega}\Big((2n+1)\frac{\pi}{2} - \varphi\Big) = z_n + \frac{T}{4}.$$

Wendepunkte: Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (k^2-\omega^2)\sin(\omega x+\varphi) = 2k\omega\cos(\omega x+\varphi) \\ &\Longleftrightarrow \quad \tan(\omega x+\varphi) = \frac{2k\omega}{k^2-\omega^2}. \end{aligned}$$

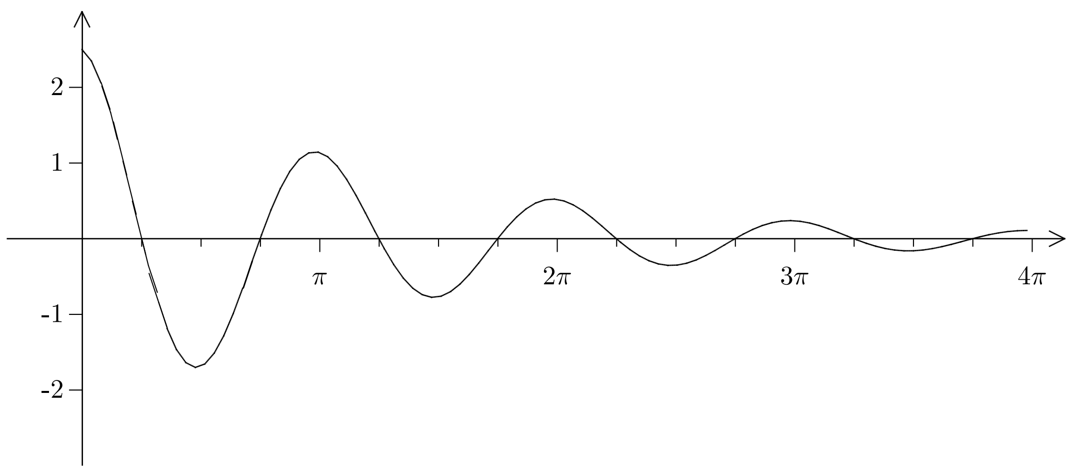
Da der Tangens überall streng monoton wachsend ist, ist

$$(k^2-\omega^2)\sin(\omega x+\varphi) - 2k\omega\cos(\omega x+\varphi) < 0,$$

falls x links von einem solchen Punkt liegt, und „ > 0 “, falls x rechts davon liegt. Das bedeutet, daß tatsächlich Wendepunkte vorliegen. Je zwei aufeinanderfolgende Wendepunkte unterscheiden sich um $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$.

Zwischen zwei benachbarten Wendepunkten ist f konvex, falls f dort ein Minimum besitzt, und konkav, falls f dort ein Maximum besitzt.

Nun kann man den Graphen skizzieren:



Graph der Funktion $f(x) = A \cdot e^{-kx} \cdot \sin(\omega x + \varphi)$,
mit $A = \frac{5}{2}$, $k = \frac{1}{4}$, $\omega = 2$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

§ 3 Integrale und Stammfunktionen

Inhalt:

Stammfunktionen, bestimmte Integrale und ihre Eigenschaften.

Zerlegungen, Unter- und Obersummen, Integrierbarkeit stetiger Funktionen, Riemannsche Summen, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, stückweise stetige Funktionen, Mittelwertsätze der Integralrechnung.

Definition:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und f eine reellwertige Funktion auf I. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls gilt:

1. F ist stetig.
2. Mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Punkten ist F auf I differenzierbar.
3. Es ist $F'(x) = f(x)$ in jedem Punkt $x \in I$, in dem F differenzierbar ist.

Wir nennen eine Funktion f *integrierbar*, falls sie eine Stammfunktion besitzt.

Beispiele.

1. $F(x) := \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^n$.
2. $F(x) := -\cos(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$
3. $F(x) := -\ln(\cos(x))$ ist auf $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ eine Stammfunktion von $f(x) := \tan(x)$. Dieses Beispiel zeigt, daß es eventuell nicht so einfach ist, eine Stammfunktion zu finden.
4. Sei $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 1/2 & \text{für } 1 \le x \le 3. \end{cases}$$

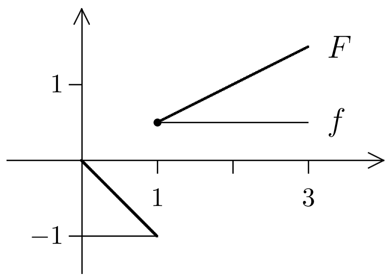
   Wir versuchen es mit einer Stammfunktion

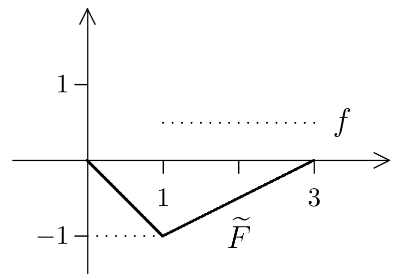
$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{für } 0 \le x < 1, \\ F_2(x) & \text{für } 1 \le x \le 3, \end{cases}$$

wobei wir $F_1(x) := -x$ und $F_2(x) := x/2$ setzen. Dann ist F auf $[0,3] \setminus \{1\}$ differenzierbar, und dort ist auch $F'(x) = f(x)$. Leider ist $F_1(1) = -1$ und $F_2(1) = 1/2$, also F in $x = 1$ nicht stetig. Das kann man aber leicht reparieren. Die Funktion

$$\widetilde{F}(x) := \begin{cases} -x & \text{für } 0 \le x < 1, \\ x/2 - 3/2 & \text{für } 1 \le x \le 3, \end{cases}$$

ist zwar immer noch in $x = 1$ nicht differenzierbar, aber sie ist dort stetig, und außerhalb von $x = 1$ ist auch $\widetilde{F}'(x) = f(x)$. Also ist $\widetilde{F}$ auf $[0,3]$ eine Stammfunktion von f.





Satz

Sind F_1, F_2 zwei Stammfunktionen einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, so ist $F_1 - F_2$ auf I konstant.

BEWEIS: Nimmt man aus I die endlich vielen Ausnahmepunkte heraus, in denen F_1 oder F_2 nicht differenzierbar ist, so bleibt eine Vereinigung von (endlich vielen) Intervallen J_ν übrig, so daß $F_1 - F_2$ auf jedem J_ν differenzierbar und dort $(F_1 - F_2)' = 0$ ist. Es folgt, daß $F_1 - F_2$ auf jedem J_ν gleich einer Konstanten c_ν ist. Wegen der Stetigkeit von $F_1 - F_2$ müssen alle diese Konstanten übereinstimmen. ∎

Definition:

Ist F auf $[a,b]$ eine Stammfunktion der Funktion f, so nennt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := F(b) - F(a)$$

das *(bestimmte) Integral* von f über $[a,b]$.

Ist G eine weitere Stammfunktion von f, so ist $G - F = c$ konstant, also

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Das bedeutet, daß die Definition des Integrals nicht von der Auswahl der Stammfunktion abhängt.

Linearität des Integrals

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch die Funktionen $f + g$ und $c \cdot f$ (mit $c \in \mathbb{R}$) integrierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\ \text{und} \quad \int_a^b \big(c \cdot f(x)\big)\,dx &= c \cdot \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Der Beweis ist simpel. Ist F (bzw. G) Stammfunktion von f (bzw. g), so ist $F + G$ Stammfunktion von $f + g$ und $c \cdot F$ Stammfunktion von $c \cdot f$. Mit F und G ist nämlich auch $F + G$ und $c \cdot F$ stetig, und überall dort, wo die Funktionen differenzierbar sind, ist $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x)$ bzw. $(c \cdot F)'(x) = c \cdot F'(x)$. ■

Weitere Eigenschaften des Integrals

Wenn f und g integrierbare Funktionen über $I = [a, b]$ sind, so gilt:

1. *Ist $a < c < b$, so ist* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$
2. *Ist c eine reelle Konstante, so ist* $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a).$
3. *Ist $f \le g$, so ist auch* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$

Beweis: 1) Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $F(b) - F(a) = \big(F(b) - F(c)\big) + \big(F(c) - F(a)\big)$.

2) $F(x) := cx$ ist Stammfunktion von $f(x) = c$, und $F(b) - F(a) = c(b - a)$.

3) Ist $f \ge 0$ und F Stammfunktion von f, so ist F monoton wachsend, zunächst auf jedem Intervall, auf dem F differenzierbar ist, dann aber sogar überall. Also ist auch $F(b) - F(a) \ge 0$. Ist $f \le g$, so ist $g - f \ge 0$. Hieraus und aus der Linearität des Integrals folgt die Behauptung. ■

Satz

Ist F Stammfunktion von f und f in x_0 stetig, so ist F in x_0 differenzierbar.

Beweis: Wir können annehmen, daß f noch in einer ganzen Umgebung U von x_0 stetig und F in $U \setminus \{x_0\}$ differenzierbar ist. Zu jedem $x \in U$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein c zwischen x_0 und x, so daß gilt:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(c) = f(c).$$

Läßt man jetzt x gegen x_0 gehen, so strebt der Differenzenquotient $\Delta F(x, x_0)$ gegen $f(x_0)$. Das bedeutet, daß F in x_0 differenzierbar und $F'(x_0) = f(x_0)$ ist. ∎

Wir wollen jetzt zeigen, daß jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Das wird ein wenig komplizierter. Der Beweis beruht auf folgender Idee:

1. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei $I_{a,b}(f)$ der Flächeninhalt unter dem Graphen G_f. Anteile, die unterhalb der x-Achse liegen, sollen dabei negativ gerechnet werden.

2. Wir zeigen, daß $F(x) := I_{a,x}(f)$ eine Stammfunktion von f ist. Ist $f > 0$, so kann man das schon ahnen, denn z.B. für $x > x_0$ ist

$$F(x) - F(x_0) = I_{x_0,x}(f) \approx (x - x_0) \cdot f(x_0).$$

Um diese Idee umzusetzen, müssen wir den Begriff des Flächeninhaltes mathematisch sauber einführen. Zunächst betrachten wir beschränkte (nicht notwendig stetige) Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Unter einer *Zerlegung* des Intervalls $I = [a, b]$ verstehen wir eine endliche Menge

$$\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset I$$

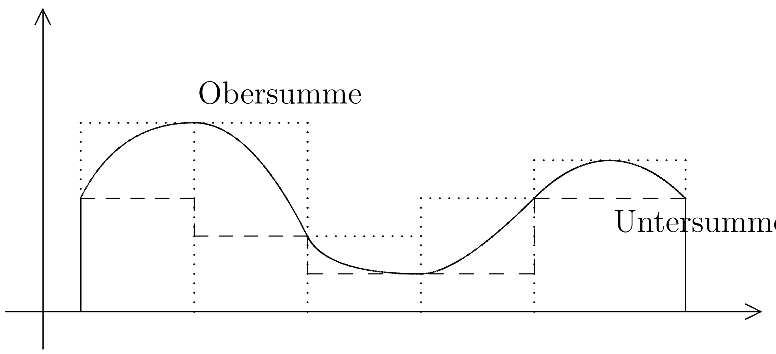
mit $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Für $i = 1, \ldots, n$ sei

$$\begin{aligned} m_i = m_i(f, \mathfrak{Z}) &:= \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\} \\ \text{und} \quad M_i = M_i(f, \mathfrak{Z}) &:= \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}. \end{aligned}$$

Damit kann man folgende Größen definieren:

$$\begin{aligned} \text{Die } \textit{Untersumme } U(f, \mathfrak{Z}) &:= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ \text{und die } \textit{Obersumme } O(f, \mathfrak{Z}) &:= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Anschaulich gesehen ist $U(f, \mathfrak{Z})$ eine Approximation des Flächeninhaltes unter dem Graphen G_f von unten und $O(f, \mathfrak{Z})$ eine Approximation von oben. Die Näherung wird um so besser, je mehr Teilungspunkte x_i man benutzt.



Eine Zerlegung $\mathfrak{Z}'$ heißt *feiner* als die Zerlegung $\mathfrak{Z}$, falls $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{Z}'$ ist. Das bedeutet, daß $\mathfrak{Z}'$ auf jeden Fall die Teilungspunkte von $\mathfrak{Z}$ enthält, eventuell aber sogar noch mehr.

Satz (Eigenschaften von Ober- und Untersumme)

Unter den obigen Voraussetzungen sei noch $m := \inf_I(f)$ und $M := \sup_I(f)$. Dann gilt:

1. $m(b-a) \le U(f, \mathfrak{Z}) \le O(f, \mathfrak{Z}) \le M(b-a)$ *für jede Zerlegung* $\mathfrak{Z}$.
2. *Ist $\mathfrak{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$, so ist*
$$U(f, \mathfrak{Z}) \le U(f, \mathfrak{Z}') \le O(f, \mathfrak{Z}') \le O(f, \mathfrak{Z}).$$
3. *Sind $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ zwei beliebige Zerlegungen von I, so ist $U(f, \mathfrak{Z}_1) \le O(f, \mathfrak{Z}_2)$.*

BEWEIS: 1) ist klar, denn es ist stets $m \le m_i \le M_i \le M$.

2) Sei $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Es reicht, den Fall
$$\mathfrak{Z}' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_i, \ldots, x_n\}$$
zu betrachten, mit $x_{i-1} < y < x_i$. Dann sei
$$m_i' := \inf_{[x_{i-1}, y]} f \quad \text{und} \quad m_i'' := \inf_{[y, x_i]} f.$$
Offensichtlich ist $m_i \le \min(m_i', m_i'')$, also $m_i(x_i - x_{i-1}) \le m_i'(y - x_{i-1}) + m_i''(x_i - y)$. Daraus folgt, daß $U(f, \mathfrak{Z}) \le U(f, \mathfrak{Z}')$ ist. Eine entsprechende Ungleichung (in der anderen Richtung) erhält man für die Obersumme.

3) Zu den zwei Zerlegungen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ gibt es eine *gemeinsame Verfeinerung*, z.B. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2$. Aber dann folgt: $U(f, \mathfrak{Z}_1) \le U(f, \mathfrak{Z}) \le O(f, \mathfrak{Z}) \le O(f, \mathfrak{Z}_2)$. ∎

Das sogenannte *Unterintegral*

$$I_*(f) := \sup\{U(f,\mathfrak{Z}) \,:\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } I\}$$

ist die beste Approximation des Flächeninhaltes von unten, und das *Oberintegral*

$$I^*(f) := \inf\{O(f,\mathfrak{Z}) \,:\, \mathfrak{Z} \text{ Zerlegung von } I\}$$

ist die beste Approximation des Flächeninhaltes von oben.

Ist $I_*(f) = I^*(f)$, so nennen wir f *summierbar*, und den gemeinsamen Wert

$$I_{a,b}(f) = I_*(f) = I^*(f)$$

fassen wir als *Flächeninhalt* (unter dem Graphen von f) auf.

Satz (Summierbarkeit stetiger Funktionen)

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $I_*(f) = I^*(f)$.

BEWEIS: Wir zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, so daß für $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$M_i(f,\mathfrak{Z}) - m_i(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon.$$

Der Beweis wird durch Widerspruch geführt. Wir nehmen an, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß für **jede** Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ein i existiert, so daß gilt:

$$M_i(f,\mathfrak{Z}) - m_i(f,\mathfrak{Z}) \geq \varepsilon.$$

Deshalb können wir eine Intervallschachtelung

$$[a,b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

konstruieren, so daß für alle k gilt: $\sup_{I_k}(f) - \inf_{I_k}(f) \geq \varepsilon$. Dann kann man Punkte $x_k', x_k'' \in I_k$ finden, so daß $|f(x_k') - f(x_k'')| \geq \varepsilon/2$ ist.

Es gibt genau einen Punkt x_0, der in allen Intervallen I_k liegt. Offensichtlich konvergieren die beiden Folgen (x_k') und (x_k'') gegen x_0. Da f stetig ist, konvergieren dann aber auch die Folgen $(f(x_k'))$ und $(f(x_k''))$ gegen $f(x_0)$, also $f(x_k') - f(x_k'')$ gegen Null. Das ist ein Widerspruch.

Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit $O(f,\mathfrak{Z}) - U(f,\mathfrak{Z}) < \varepsilon(b-a)$. Das bedeutet, daß $I_*(f) = I^*(f)$ ist. ∎

Für jede auf $[a,b]$ stetige Funktion f ist also der Flächeninhalt $I_{a,b}(f)$ wohldefiniert. Insbesondere ist $I_{a,a}(f) = 0$, und wenn $a > b$ ist, setzen wir $I_{a,b}(f) := -I_{b,a}(f)$.

Eigenschaften des Flächeninhaltes

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

1. *Ist $c \leq f(x) \leq C$, so ist $c(b-a) \leq I_{a,b}(f) \leq C(b-a)$.*
2. *Ist $f \geq 0$, so ist auch $I_{a,b}(f) \geq 0$.*
3. *Ist $a < c < b$, so ist $I_{a,c}(f) + I_{c,b}(f) = I_{a,b}(f)$.*

BEWEIS: 1) Sei $\mathfrak{Z}_0 = \{a, b\}$ die „triviale" Zerlegung von $[a, b]$. Dann ist

$$c(b-a) \leq U(f, \mathfrak{Z}_0) \leq I_{a,b}(f) \leq O(f, \mathfrak{Z}_0) \leq C(b-a).$$

2) Ist $f \geq 0$, so ist auch $U(f, \mathfrak{Z}) \geq 0$ für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$, und damit erst recht $I_{a,b}(f)$.

3) ist anschaulich völlig klar. Einen exakten Beweis bringen wir gleich im Anschluß.
■

Man kann die Zahl $I_{a,b}(f)$ auch noch auf anderem Wege berechnen. Es sei $\mathfrak{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von I, und für jedes i sei ein Punkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gewählt. Wir fassen die ξ_i zu einem Vektor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ zusammen. Dann nennt man

$$\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i-1} - x_i)$$

die *Riemannsche Summe* von f zur Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und der Wahl von Zwischenpunkten $\boldsymbol{\xi}$. Offensichtlich gilt:

$$U(f, \mathfrak{Z}) \leq \Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) \leq O(f, \mathfrak{Z}).$$

Weil $I_*(f) = I^*(f) = I_{a,b}(f)$ ist, gibt es eine Folge $(\mathfrak{Z}_n)$ von Zerlegungen, so daß $U(f, \mathfrak{Z}_n)$ (monoton wachsend) und $O(f, \mathfrak{Z}_n)$ (monoton fallend) gegen $I_{a,b}(f)$ konvergiert.[1] Nun folgt:

[1] Zunächst erhält man für Unter- und Obersummen verschiedene Zerlegungsfolgen, und auch die Monotonie ist nicht von vornherein gegeben. Man kann aber zu Verfeinerungen übergehen und so die gewünschte Aussage erhalten.

Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_0$, so daß für jede feinere Zerlegung $\mathfrak{Z}$ und jede dazu passende Wahl von Zwischenpunkten $\boldsymbol{\xi}$ gilt:

$$\left|\Sigma(f, \mathfrak{Z}, \boldsymbol{\xi}) - I_{a,b}(f)\right| < \varepsilon.$$

Jetzt kann man die noch ausstehende dritte Aussage des vorherigen Satzes zeigen:

Zu jeder natürlichen Zahl n kann man Zerlegungen $\mathfrak{Z}'_n$ von $[a,c]$ und $\mathfrak{Z}''_n$ von $[c,b]$ finden, so daß für die zugehörigen Riemannschen Σ'_n und Σ''_n (mit beliebigen Zwischenpunkten) gilt:

$$|\Sigma'_n - I_{a,c}(f)| < \frac{1}{3n}, \quad |\Sigma''_n - I_{c,b}(f)| < \frac{1}{3n} \quad \text{und} \quad |(\Sigma'_n + \Sigma''_n) - I_{a,b}(f)| < \frac{1}{3n}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&|(I_{a,c}(f) + I_{c,b}(f)) - I_{a,b}(f)| = \\
&\quad = \; |(I_{a,c}(f) - \Sigma'_n) + (I_{c,b}(f) - \Sigma''_n) + (\Sigma'_n + \Sigma''_n - I_{a,b}(f))| \\
&\quad \leq \; |I_{a,c}(f) - \Sigma'_n| + |I_{c,b}(f) - \Sigma''_n| + |(\Sigma'_n + \Sigma''_n) - I_{a,b}(f)| \\
&\quad < \; \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} \; == \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$

Weil das für jedes n gilt, ist $I_{a,b}(f) = I_{a,c}(f) + I_{c,b}(f)$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für $x \in [a,b]$ sei $F(x) := I_{a,x}(f)$. Dann ist F eine Stammfunktion von f. Insbesondere ist $F(a) = 0$ und deshalb

$$I_{a,b}(f) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis: Sei $x_0 \in [a,b]$ und $x > x_0$. Dann ist

$$F(x) - F(x_0) = I_{a,x}(f) - I_{a,x_0}(f) = (I_{a,x_0}(f) + I_{x_0,x}(f)) - I_{a,x_0}(f) = I_{x_0,x}(f).$$

Nun sei $m(f,x) := \inf_{[x_0,x]}(f)$ und $M(f,x) := \sup_{[x_0,x]}(f)$. Es folgt:

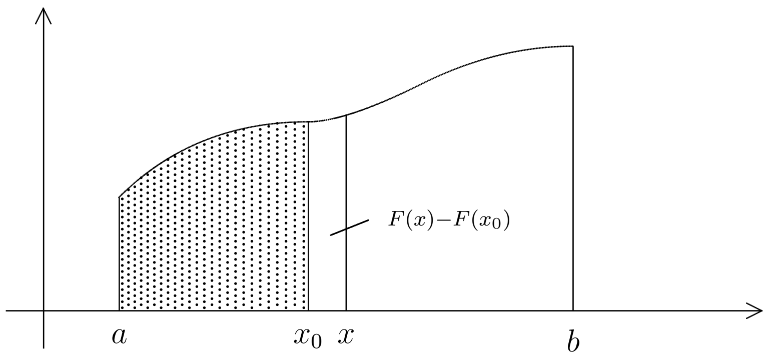
$$m(f,x) \cdot (x - x_0) \leq I_{x_0,x}(f) \leq M(f,x) \cdot (x - x_0),$$

also

$$m(f,x) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq M(f,x).$$

Für $x \to x_0$ streben $m(f,x)$ und $M(f,x)$ gegen $f(x_0)$. Also ist

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$



Ist $x < x_0$, so ist $F(x) - F(x_0) = -I_{x,x_0}(f)$ und

$$m(f,x) \cdot (x_0 - x) \leq I_{x,x_0}(f) \leq M(f,x) \cdot (x_0 - x).$$

Daraus folgt:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Zusammen bedeutet das, daß $F'(x_0) = f(x_0)$ ist. ∎

Definition:

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, falls f bis auf endlich viele Punkte stetig ist und überall einen linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert (also höchstens endlich viele Sprungstellen als Unstetigkeitsstellen) besitzt.

Satz

Jede stückweise stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.

Beweis: Es gibt eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, so daß f auf jedem offenen Intervall $I_k = (x_{k-1}, x_k)$ stetig ist und in x_i jeweils der rechts- und linksseitige Grenzwert existiert. Dann sei $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_{k-1}+} f(x) & \text{in } x_{k-1}, \\ f(x) & \text{auf } I_k, \\ \lim\limits_{x \to x_k-} f(x) & \text{in } x_k. \end{cases}$$

Die stetige Funktion f_k besitzt auf $[x_{k-1}, x_k]$ eine Stammfunktion F_k. Bei x_k tritt jeweils ein Sprung der Höhe $F_{k+1}(x_k) - F_k(x_k)$ auf. Eine auf ganz $[a, b]$ stetige Stammfunktion F erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
F(x) &:= F_1(x) \text{ auf } [x_0, x_1], \\
F(x) &:= F_2(x) - (F_2(x_1) - F(x_1)) \\
&= F_2(x) - F_2(x_1) + F(x_1) \text{ auf } (x_1, x_2], \\
F(x) &:= F_3(x) - (F_3(x_2) - F_2(x_2)) - (F_2(x_1) - F(x_1)) \\
&= F_3(x) - F_3(x_2) + F(x_2) \text{ auf } (x_2, x_3], \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

Auf diese Weise ist F stetig und $F' = f$ außerhalb der Punkte x_i. ■

1. und 2. Mittelwertsatz der Integralrechnung

Die Funktion f sei stetig über $[a, b]$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Sind $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p \geq 0$, so gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Beweis: Die erste Aussage folgt sofort aus der zweiten, wenn man $p(x) \equiv 1$ einsetzt. Wir brauchen also nur die zweite Aussage zu beweisen:

Die stetige Funktion f nimmt auf $[a, b]$ ein globales Minimum m und ein globales Maximum M an. Dann ist $m \leq f(x) \leq M$ auf $[a, b]$ und daher

$$m \cdot p(x) \leq f(x)p(x) \leq M \cdot p(x) \text{ auf } [a, b].$$

Wegen der Linearität und der Monotonie des Integrals ist dann auch

$$m \cdot \int_a^b p(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx \leq M \cdot \int_a^b p(x)\,dx.$$

Durch $F(x) := f(x) \cdot \int_a^b p(t)\,dt$ wird nun eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert, die die Werte $m \cdot \int_a^b p(t)\,dt$ und $M \cdot \int_a^b p(t)\,dt$ in $[a, b]$ annimmt. Nach dem Zwischenwertsatz und wegen der obigen Ungleichung muß F dann in einem geeigneten Punkt $c \in [a, b]$ auch den Wert $\int_a^b f(x)p(x)\,dx$ annehmen. Also ist

$$f(c) \cdot \int_a^b p(t)\,dt = F(c) = \int_a^b f(x)p(x)\,dx.$$

∎

Die Standard-Abschätzung

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \sup_{[a,b]}|f| \cdot (b-a).$$

BEWEIS: Weil $-|f| \le f \le +|f|$ ist, folgt die erste Ungleichung aus der Monotonie des Integrals. Die zweite ist dann trivial. ∎

Es sollen nun einige Beispiele gerechnet werden. Dabei verwenden wir die folgende Notation: Ist F Stammfunktion von f, so ist

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beispiele.

1. Es soll $\displaystyle\int_{-2}^{+2} |x-1|\,dx$ berechnet werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die Nullstellen zu ermitteln und stückweise zu integrieren:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{+2} |x-1|\,dx &= \int_{-2}^{1} (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= (x - \frac{x^2}{2})\Big|_{-2}^1 + (\frac{x^2}{2} - x)\Big|_1^2 \\ &= (\frac{1}{2} - (-4)) + (0 - (-\frac{1}{2})) \\ &= 5.\end{aligned}$$

Eine zweite Möglichkeit besteht darin, **eine** Stammfunktion über $[-2,2]$ zu verwenden. Die muß dann allerdings stetig sein. Wir benutzen

$$F(x) := \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & \text{für } -2 \le x \le 1, \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & \text{für } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_{-2}^{2} |x-1|\,dx = F(2) - F(-2) = 1 - (-4) = 5.$$

Natürlich muß in beiden Fällen das gleiche Ergebnis herauskommen.

2. Da $\cos'(x) = -\sin(x)$ ist, folgt:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -(\cos(\pi) - \cos(0)) = 2$$

und

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = -(\cos(2\pi) - \cos(0)) = 0.$$

Im zweiten Fall heben sich positiv und negativ zu rechnende Flächenteile gegenseitig weg.

3. Bekanntlich ist $\arctan'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ und $\arctan(0) = 0$. Daraus folgt:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+u^2}\,du.$$

Da $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist, ist $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, also

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du}$$

Das liefert uns eine interessante Definition für die Zahl π.

Auf der folgenden Seite fassen wir noch die gängigsten Stammfunktionen zu einer Tabelle zusammen:

Funktion	Stammfunktion	
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x > 0$
$\frac{1}{x-c}$	$\ln(\|x-c\|)$	$x \neq c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$x \neq (n+\frac{1}{2})\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$	$x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	
e^x	e^x	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$	

§ 4 Integrationstechniken

Inhalt:

Partielle Integration, Substitutionsregel, Beispiele, Integration rationaler Funktionen.

Bemerkung. Die Menge aller Stammfunktionen von f wird mit dem Symbol $\int f(x)\,dx$ bezeichnet, und man spricht dann vom *unbestimmten Integral*. Diese Bezeichnungsweise korrekt durchzuhalten, ist recht mühsam. Üblicherweise benutzt man die Notation auch für eine einzelne (aber beliebige) Stammfunktion. Dem werden wir uns hier gelegentlich anschließen.

Wir wollen jetzt Differentiations-Regeln neu betrachten und in die Sprache der Integrale und Stammfunktionen übersetzen.

Wir beginnen mit der *Produktregel*:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Das bedeutet, daß $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$ ist. Nun kommt es selten vor, daß der Integrand deutlich sichtbar diese Form besitzt, aber umso häufiger ist er von der Form $f' \cdot g$. Wenn die Stammfunktion von $f \cdot g'$ leichter zu bestimmen ist als die von $f' \cdot g$, dann hilft die Formel weiter. Wir formulieren das Ergebnis gleich etwas allgemeiner:

Satz von der partiellen Integration

Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, so ist

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \big(f(x) \cdot g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Der Beweis ist nach der Vorbemerkung eigentlich klar. Wir wollen hier stattdessen eine etwas allgemeinere Aussage beweisen:

Verallgemeinerter Satz von der partiellen Integration

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion einer stückweise stetigen Funktion f_0 und g über $[a,b]$ stetig differenzierbar, so ist

$$\int_a^b f_0(x)g(x)\,dx = \big(f(x)\cdot g(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

BEWEIS: f ist stetig, und es gibt eine Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

so daß f auf jedem offenen Teilintervall $J_k = (x_{k-1}, x_k)$ stetig differenzierbar ist, mit $f' = f_0$. Dann ist dort $(f \cdot g)' = f_0 \cdot g + f \cdot g'$. Die Funktion $f \cdot g$ ist also auf $[a,b]$ Stammfunktion der Funktion $f_0 \cdot g + f \cdot g'$, die ihrerseits Summe der stückweise stetigen Funktion $f_0 \cdot g$ und der stetigen Funktion $f \cdot g'$ ist. Daraus folgt:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)\Big|_a^b = \int_a^b f_0(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

∎

In der Fourier-Theorie wird der Satz in dieser Allgemeinheit gebraucht. Hier werden wir aber nur Beispiele zur gewöhnlichen Regel der partiellen Integration betrachten.

Beispiele.

1. Sei $0 < a < b$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln(x)\,dx &= \int_a^b \ln(x)\cdot x'\,dx \quad \text{(denn es ist } x' = 1\text{)} \\
&= (\ln(x)\cdot x)\Big|_a^b - \int_a^b \ln'(x)\cdot x\,dx \quad \text{(Partielle Integration)} \\
&= (x\cdot\ln(x))\Big|_a^b - (x)\Big|_a^b \quad \text{(denn es ist } \ln'(x)\cdot x = 1\text{).}
\end{aligned}$$

   Also ist $x \cdot \ln(x) - x$ eine Stammfunktion von $\ln(x)$. Zur Probe kann man ja differenzieren.

   Die Regel der Partiellen Integration hat hier weitergeholfen, weil $f' \cdot g$ viel einfacher als $f \cdot g'$ ist. Wie man in solchen Fällen jeweils f und g wählen muß, sagt einem aber keiner. Hier fängt die Kunst des Integrierens an.

2. Das folgende Beispiel ist besonders typisch und hat schon fast den Charakter eines Kochrezeptes:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin^2(x)\,dx &= \int_a^b (-\cos'(x)) \cdot \sin(x)\,dx \\
&= (-\cos(x) \cdot \sin(x)) \Big|_a^b - \int_a^b (-\cos(x)) \cdot \cos(x)\,dx \\
&= -(\cos(x) \cdot \sin(x)) \Big|_a^b + \int_a^b \cos^2(x)\,dx \\
&= -(\cos(x) \cdot \sin(x)) \Big|_a^b + (x) \Big|_a^b - \int_a^b \sin^2(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Jetzt ist das Integral, das wir ausrechnen wollten, wieder aufgetaucht! Trotzdem hilft uns das weiter: Wir können das Integral über $\sin^2(x)$ auf die andere Seite der Gleichung bringen und erhalten:

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left((x - \cos(x) \cdot \sin(x)) \Big|_a^b \right).$$

3. Von ähnlicher Bauart ist das folgende Beispiel:

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^x \cdot \sin(x)\,dx &= \int_a^b e^x \cdot (-\cos'(x))\,dx \\
&= -(e^x \cdot \cos(x)) \Big|_a^b - \int_a^b (e^x)' \cdot (-\cos(x))\,dx \\
&= -(e^x \cdot \cos(x)) \Big|_a^b + \int_a^b e^x \cdot \cos(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Eine zweite Rechnung liefert:

$$\int_a^b e^x \cdot \cos(x)\,dx = (e^x \cdot \sin(x)) \Big|_a^b - \int_a^b e^x \cdot \sin(x)\,dx.$$

Setzt man das in das erste Ergebnis ein, so erhält man:

$$\int_a^b e^x \cdot \sin(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\Big(e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x)) \Big) \Big|_a^b \right).$$

Die nächste Technik, die wir kennenlernen wollen, ist noch etwas schwieriger.

Durch Probieren kann man rasch herausfinden, daß nicht nur $-\cos(x)$ Stammfunktion von $\sin(x)$ ist, sondern auch $-\cos(ax)/a$ Stammfunktion von $\sin(ax)$. Wenn man zur Probe differenziert, benötigt man die Kettenregel. Daher liegt es nahe, diese Regel auf ihre Verwendbarkeit in der Integrationstheorie hin zu untersuchen:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Weiter sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, mit $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I = [a, b]$.

Dann ist auch die Verknüpfung $F \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, es ist

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t).$$

Also ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Substitutionsregel

Sei $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Beweis: Wir betrachten eine stetige Funktion f. Der stückweise stetige Fall erfordert nur geringfügige Modifikationen. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt &= (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx. \end{aligned}$$

■

Eine besondere Situation liegt vor, wenn φ **streng monoton wachsend** ist. Dann bildet φ das Intervall $[\alpha, \beta]$ bijektiv auf ein Intervall $[a, b]$ ab, und es ist $\varphi(\alpha) = a$ und $\varphi(\beta) = b$. Man erhält also:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Ist φ **streng monoton fallend**, so ist $\varphi(\alpha) = b$ und $\varphi(\beta) = a$, und deshalb

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Will man die Stammfunktionen durch unbestimmte Integrale bezeichnen, so erhält man folgende Formeln:

$$\left(\int f(x)\,dx\right) \circ \varphi = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

bzw.

$$\int f(x)\,dx = \Big(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big) \circ \varphi^{-1}, \text{ falls } \varphi \text{ umkehrbar ist.}$$

Auch hier zeigt sich der Nutzen der Regel am besten an Hand von Beispielen. Dabei beginnen wir mit dem einfacheren Fall, der Anwendung der Substitutionsregel **von rechts nach links**. Der Integrand ist dann in der Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ gegeben.

Sehr beliebt ist dann folgendes Vorgehen: Man führt die Abkürzung $x = \varphi(t)$ ein, und die Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$$

wird symbolisch in der Form $dx = \varphi'(t)\,dt$ geschrieben. Dann ist

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = f(x)\,dx.$$

Integration auf beiden Seiten liefert wieder die Substitutionsregel. Leider können wir den symbolischen Zwischenschritt derzeit nicht exakt begründen, und außerdem wird hier verschleiert, daß man nach der Integration wieder zurücktransformieren muß. Die Hauptschwierigkeiten bleiben dagegen erhalten: Die Substitution $x = \varphi(t)$ muß erkannt werden, und $\int f(x)\,dx$ muß berechnet werden. Also können wir genauso gut in der bisherigen Weise weiterarbeiten.

Beispiele.

1. Häufig möchte man eine Funktion der Form $x \mapsto f(x+c)$ integrieren. Hier wird in f die Funktion $\varphi(t) := t + c$ eingesetzt. Da $\varphi'(t) \equiv 1$ ist, folgt:

$$\int_\alpha^\beta f(t+c)\,dt = \int_{\alpha+c}^{\beta+c} f(x)\,dx.$$

Dies ist ein Beispiel für eine streng monoton wachsende Substitution. Die Funktion $\psi(t) := c - t$ ist streng monoton fallend. Ist $\alpha < \beta$, so ist $\psi(\alpha) = c - \alpha > c - \beta = \psi(\beta)$. Mit $\psi'(t) \equiv -1$ erhält man

$$\int_\alpha^\beta f(c-t)\,dt = \int_{c-\beta}^{c-\alpha} f(x)\,dx.$$

2. Bei Funktionen der Form $x \mapsto f(x \cdot c)$, $c \neq 0$, wird $\varphi(t) := t \cdot c$ eingesetzt, mit $\varphi'(t) \equiv c$. Die Substitutionsregel liefert eine Formel für das Integral über $c \cdot f(t \cdot c)$. Wir können aber die Konstante c auf die andere Seite der Gleichung bringen und erhalten dann:

$$\int_\alpha^\beta f(t \cdot c)\,dt = \frac{1}{c} \cdot \int_{\alpha\cdot c}^{\beta\cdot c} f(x)\,dx.$$

Man beachte dabei, daß $\alpha \cdot c > \beta \cdot c$ ist, wenn c negativ ist!

3. Auch das folgende Beispiel ist eigentlich ein alter Bekannter:

   Es sei $f(x) := \dfrac{1}{x}$ und $\varphi(t)$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstellen über $[\alpha, \beta]$. Dann gilt:

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

   Also ist

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{1}{x}\, dx = (\ln|x|)\ \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = (\ln|\varphi(t)|)\ \Big|_\alpha^\beta .$$

   Das hätte man aber auch über die logarithmische Ableitung erhalten:

   Da $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = (\ln \circ |\varphi|)'(t)$ ist, ist $\ln \circ |\varphi|$ eine Stammfunktion von $\dfrac{\varphi'}{\varphi}$.

   Z.B. ist

$$\int_a^b \tan(t)\, dt = \int_a^b \frac{-\cos'(t)}{\cos(t)}\, dt = -(\ln|\cos(t)|)\ \Big|_a^b .$$

4. Sei $f(x) := x^n$, φ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \varphi(t)^n \cdot \varphi'(t)\, dt &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{n+1} x^{n+1}\ \Big|_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot \left(\varphi(\beta)^{n+1} - \varphi(\alpha)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

   Speziell ist $\dfrac{1}{2}\varphi(t)^2$ Stammfunktion von $\varphi(t)\varphi'(t)$, also etwa

$$\int_\alpha^\beta \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2} \ln(t)^2\ \Big|_\alpha^\beta .$$

Wenn die rechte Seite der Substitutionsregel der Ausgangspunkt ist, muß man die Substitution φ nur erkennen. Schwieriger wird es, wenn man mit der linken Seite (also dem Integranden $f(x)$) beginnt. Dann muß eine geeignete Substitution gesucht werden, das erfordert Kreativität und viel Routine. Als Daumenregel kann man vielleicht sagen: Man versucht, durch eine Substitution $x = \varphi(t)$ das zu eliminieren, was einen stört. An Stelle von dx muß dann $\varphi'(t)\, dt$ eingesetzt werden.

Wir beginnen mit einem relativ einfachen Beispiel. Es soll das Integral $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1-x^2}\, dx$ berechnet werden, für $-1 < a < b < +1$. Für $a \to -1$ und $b \to +1$ wird damit die Fläche des halben Einheitskreises berechnet.

Wir suchen nach einer Substitution, durch die der Integrand einfacher wird. Die Gleichung $y = \sqrt{1-x^2}$ erinnert an die Gleichung $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$, deshalb kann man es ja einmal mit der Substitution $x = \varphi(t) := \sin(t)$ versuchen. Da die Sinus-Funktion das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ bijektiv (streng monoton wachsend) auf das Intervall $[-1,+1]$ abbildet, mit Umkehrfunktion $y = \arcsin(x)$, erhält man:

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt\\ &= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Tatsächlich hat sich die Situation vereinfacht, das neue Integral kann in der bekannten Weise mit Hilfe partieller Integration berechnet werden. Mit $\alpha := \arcsin(a)$ und $\beta := \arcsin(b)$ erhält man:

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \cos^2(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta \cos(t)\sin'(t)\,dt\\ &= \cos(t)\sin(t)\,\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \sin^2(t)\,dt\\ &= \cos(t)\sin(t)\,\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (1-\cos^2(t))\,dt\\ &= (\cos(t)\sin(t)+t)\,\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \cos^2(t)\,dt.\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_\alpha^\beta \cos^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot(\cos(t)\cdot\sin(t)+t)\,\Big|_\alpha^\beta\,.$$

Das Ergebnis kann nun noch etwas umformuliert werden. Wir können $\cos(t)$ durch $\sqrt{1-\sin^2(t)}$ ersetzen, so daß die Rücktransformation $t = \arcsin(x)$ direkt eingesetzt werden kann. So erhalten wir:

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(t\cdot\sqrt{1-t^2}+\arcsin(t)\right)\Big|_a^b\,.$$

Läßt man hier $a \to -1$ und $b \to +1$ gehen, so konvergiert auch die rechte Seite gegen $\frac{1}{2}\cdot(\arcsin(+1)-\arcsin(-1)) = \frac{\pi}{2}$. Also ist

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Das sollte für die Fläche des halben Einheitskreises auch herauskommen!

Nachdem das Prinzip klargeworden ist, können wir weitere Beispiele behandeln. Dabei rechnen wir mit unbestimmten Integralen.

Beispiele.

1. Es soll $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ berechnet werden:

   Um die störende Wurzel zu beseitigen, versuchen wir es mit der Substitution $x =: \varphi(t) = t^2$, also $\varphi'(t) = 2t$. Dann ist $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ und

   $$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}}\,dx &= \Big(\int e^t \cdot 2t\,dt\Big) \circ \varphi^{-1} \\ &= (2(t-1)e^t) \circ \varphi^{-1} \;=\; 2(\sqrt{x}-1)\cdot e^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

2. Wir werden weiter unten zeigen, daß man jede rationale Funktion (außerhalb ihrer Polstellen) integrieren kann. Deshalb möchte man Integranden gerne mit Hilfe einer geeigneten Substitution rational machen:

   In $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ benutzen wir die Substitution $x = \varphi(t) := t^6$, mit $\varphi'(t) = 6t^5$ und $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}$. Dann gilt:

   $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \Big(\int \frac{6t^5}{t^2+t^3}\,dt\Big) \circ \varphi^{-1} = 6\Big(\int \frac{t^3}{1+t}\,dt\Big) \circ \varphi^{-1}.$$

3. Ist F rational, so integriert man $f(x) := F(e^x)$ mit Hilfe der Substitution $x = \varphi(t) := \ln(t)$, also $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ und $t = \varphi^{-1}(x) = e^x$. Dann ist

   $$\int F(e^x)\,dx = \Big(\int \frac{F(t)}{t}\,dt\Big) \circ \varphi^{-1}.$$

4. Jetzt sollte das Schema deutlich geworden sein.

   Sei etwa $F(x,y)$ eine rationale Funktion in x und y. Um $f(x) := F(x,\ \sqrt[m]{ax+b})$ zu integrieren, setzen wir $\sqrt[m]{ax+b} = t$, also $x = \varphi(t) = \dfrac{1}{a}(t^m - b)$, mit $\varphi'(t) = \dfrac{m}{a}t^{m-1}$. Das ergibt:

   $$\int F(x,\ \sqrt[m]{ax+b})\,dx = \Big(\int F(\frac{1}{a}(t^m-b), t)\frac{m}{a}t^{m-1}\,dt\Big) \circ \varphi^{-1}.$$

5. Zum Schluß noch ein schwierigeres Beispiel:

   Es soll $\displaystyle\int F(\sin x, \cos x)\,dx$ für eine rationale Funktion $F = F(x,y)$ berechnet werden. Der entscheidende Schritt besteht wieder darin, das Integral rational zu machen.

   In der Klasse der Winkelfunktionen, ihrer Umkehrungen und deren Ableitungen kennen wir nur einen einzigen Fall, wo eine rationale Funktion auftaucht:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Daher versuchen wir, Sinus und Cosinus durch den Tangens auszudrücken: Es ist

$$\tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \text{ und damit } 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

also

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= \frac{1}{1+\tan^2(x)} \\ \text{und} \qquad \sin^2(x) &= 1-\cos^2(x) = \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}. \end{aligned}$$

Das ist noch nicht ganz befriedigend, weil jetzt für die Darstellung von Sinus und Cosinus durch den Tangens noch Wurzeln benötigt werden. Es gilt aber:

$$\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})},$$

$$\text{und} \qquad \cos(x) = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}.$$

Jetzt verwenden wir die Substitution $t = \tan(\dfrac{x}{2})$, also $x = \varphi(t) := 2\arctan(t)$ und $\varphi'(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$. Dann ist $t = \varphi^{-1}(x) = \tan(\frac{x}{2})$, und es folgt:

$$\int F(\sin x, \cos x)\,dx = \left(\int F\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big) \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \right) \circ \varphi^{-1}.$$

Damit ist der ganze Integrand rational geworden.

Wir wollen nun – zumindest andeutungsweise – zeigen, daß jede rationale Funktion „elementar“ integrierbar ist.

$$\text{Es sei} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ mit Polynomen } P \text{ und } Q.$$

Wir gehen in mehreren Schritten vor:

1. Schritt:

Ist $\text{grad}(P) \geq \text{grad}(Q)$, so führt man eine Polynomdivision durch:

$$f(x) = P_0(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \text{ mit Polynomen } P_0 \text{ und } R,$$

sowie $\mathrm{grad}(R) < \mathrm{grad}(Q)$.

Da Polynome problemlos integriert werden können, braucht man nur den Fall $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ mit $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$ zu betrachten.

2. Schritt:

Als nächstes bestimmt man nach Möglichkeit alle Nullstellen von $Q(x)$. Da einige Nullstellen komplex sein können, ergibt sich eine Zerlegung

$$Q(x) = (x - c_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - c_r)^{k_r} \cdot q_1(x)^{s_1} \cdot \ldots \cdot q_l(x)^{s_l},$$

mit reellen Zahlen $c_1, \ldots, c_r$ und in $\mathbb{R}$ unzerlegbaren quadratischen Polynomen $q_1(x), \ldots, q_l(x)$.

Dieser Schritt kann natürlich in der Praxis ein unüberwindbares Hindernis darstellen, denn für $\mathrm{grad}(Q) > 4$ gibt es kein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen. Theoretisch existiert die Zerlegung aber!

3. Schritt:

Wenn die Zerlegung von $Q(x)$ in „irreduzible Faktoren" vom Typ $x - c$ bzw. $q(x)$ gegeben ist, dann kann man $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von *Partialbrüchen* schreiben:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{i=1}^{k_\varrho} \frac{A_{\varrho,i}}{(x - c_\varrho)^i} + \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{j=1}^{s_\lambda} \frac{B_{\lambda,j} x + C_{\lambda,j}}{q_\lambda(x)^j}.$$

Auf den Beweis verzichten wir hier, wir geben nur ein Beispiel:

Ist $Q(x) = (x-1)^3(x^2+1)$ und $P(x)$ ein Polynom vom Grad < 5, so ist

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-1} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{A_{13}}{(x-c)^3} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+1}\,.$$

4. Schritt:

Schließlich sucht man nach Stammfunktionen für Funktionen der Art

$$\frac{A}{(x-c)^k} \quad \text{und} \quad \frac{Bx + C}{q(x)^s}.$$

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x-c}\,dx = \ln|x - c|$.

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-c)^k}\,dx = \frac{1}{1-k}(x-c)^{1-k}$, für $k \geq 2$.

c) Bei Integralen der Form $\displaystyle\int \frac{h(x)}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$ mit affin-linearem $h(x)$ müssen wir zunächst eine Substitution vornehmen. Da wir nur den Fall betrachten, wo der Nenner **keine** reelle Nullstelle besitzt, ist $a^2 - 4b < 0$.

Wir machen die Substitution

$$x = \varphi(t) := ct - \frac{a}{2}, \quad \varphi'(t) = c,$$

mit $c := \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$. Dann ist

$$x^2 + ax + b = (ct - \frac{a}{2})^2 + act - \frac{a^2}{2} + b = c^2t^2 + \frac{4b - a^2}{4} = c^2(t^2 + 1).$$

Also ist

$$\int \frac{h(x)}{(x^2 + ax + b)^n}\,dx = \int \frac{c \cdot h(x(t))}{(c^2(t^2 + 1))^n}\,dt = \frac{1}{c^{2n-1}} \int \frac{h(x(t))}{(t^2 + 1)^n}\,dt.$$

Der Zähler $h(x(t))$ ist wieder eine affin-lineare Funktion.

Wir müssen also noch die folgenden Integraltypen behandeln:

d) $\displaystyle\int \frac{1}{t^2 + 1}\,dt = \arctan(t).$

e) $\displaystyle\int \frac{t}{t^2 + 1}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2 + 1).$

f) $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2 + 1)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{x'(t)}{x(t)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^n}\,dx$, für $x(t) = t^2 + 1$ (und $n > 1$).

Also ist $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2 + 1)^n}\,dt = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + 1)^{n-1}}.$

g) Es bleibt der schwierigste Fall, nämlich $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2 + 1)^n}\,dt$. Ohne Beweis sei nur erwähnt:

Behauptung: Es gibt für jedes $n \geq 1$ eine aus elementaren Funktionen zusammengesetzte Funktion F_n mit $F_n(0) = 0$ und $F_n' = \dfrac{1}{(t^2 + 1)^n}$.

In der Theorie läßt sich also jede rationale Funktion elementar integrieren. In der Praxis dürfte es oft an der Nullstellenbestimmung im Nenner scheitern.

Beispiele.

1. Sei $f(x) := \dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \dfrac{1}{(x-1)(x^2 + 1)}$.

   Wir machen den Ansatz $\dfrac{1}{x^3 - x^2 + x - 1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b + cx}{x^2 + 1}$. Dann muß $(a + c)x^2 + (b - c)x + a - b = 1$ sein, und das führt zu dem

   Gleichungssystem $\quad a + c = 0, \quad b - c = 0 \quad$ und $\quad a - b = 1.$

Also muß $a = \dfrac{1}{2}$ und $b = c = -\dfrac{1}{2}$ sein, d.h. $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{x+1}{x^2+1}\right]$.
Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \frac{1}{2} \cdot \left[\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\ln|x-1| - \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right].\end{aligned}$$

2. Sei $f(x) := \dfrac{x^4}{x^3-1} = \dfrac{x(x^3-1)+x}{x^3-1} = x + \dfrac{x}{x^3-1} = x + \dfrac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}$.

$$\text{Der Ansatz} \quad \frac{x}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b+cx}{x^2+x+1}$$

liefert $a + c = 0,\quad a + b - c = 1$ und $a - b = 0$, also $a = b = \dfrac{1}{3}$ und $c = -\dfrac{1}{3}$.

$$\text{Damit ist} \quad f(x) = x + \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{x-1} + \frac{1-x}{x^2+x+1}\right].$$

Das Integral $\displaystyle\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx$ behandeln wir mit der Substitution

$$x(t)^2 + x(t) + 1 = c^2(t^2+1), \text{ mit } c = \frac{1}{2}\sqrt{4-1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Das ergibt $x(t) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}t - 1)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1-x(t)}{x(t)^2+x(t)+1}\,dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int \frac{3-\sqrt{3}t}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\,dt \quad = \quad \int \frac{\sqrt{3}-t}{t^2+1}\,dt,\end{aligned}$$

mit $t = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ und $t^2 = \dfrac{1}{3}(4x^2+4x+1)$. Also ist

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2+1}\,dt \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\ln\left(\frac{4}{3}(x^2+x+1)\right).\end{aligned}$$

§ 5 Reihenentwicklungen

Inhalt:

Integration und Differentiation von Reihen, Konvergenz von Taylorreihen,wichtige Reihenentwicklungen, spezielle Reihenwerte.

Satz (Integration von Reihen)

Die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sei auf $[a,b]$ ***normal*** *konvergent gegen f. Dann ist*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Beweis: Es sei $F_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ wie üblich die N-te Partialsumme der Reihe. Dann gilt für jeden Punkt $x \in [a,b]$ die Gleichung

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x),$$

und die Grenzfunktion f ist stetig, wegen der normalen Konvergenz.

Nun sei ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil die Funktionen-Reihe normal konvergiert, können wir auf die Reihe der Normen das Cauchy-Kriterium anwenden. Es gibt ein N_0, so daß für $N \geq N_0$ und $M > N$ gilt:

$$\sum_{n=N+1}^{M} \|f_n\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\,,$$

also insbesondere

$$\Big|\sum_{n=N+1}^{M} f_n(x)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für alle } x \in I.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |F_N(x) - f(x)| &= \lim_{M\to\infty} |F_N(x) - F_M(x)| \\ &= \lim_{M\to\infty} \Big| \sum_{n=N+1}^{M} f_n(x) \Big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für alle } x \in I. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Big| \int_a^b F_N(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Big| &= \Big| \int_a^b (F_N(x) - f(x))\,dx \Big| \\ &\leq \|F_n - f\| \cdot (b-a) \;\leq\; \varepsilon \text{ für } N \geq N_0. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß $\lim\limits_{N\to\infty} \int_a^b F_N(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ist. Es ist aber

$$\int_a^b F_N(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

■

Satz (Differentiation von Reihen)

Die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar, die Reihe $\sum_n f_n(x)$ sei ***punktweise*** *konvergent gegen eine Funktion f und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ sei auf $[a,b]$* ***normal*** *konvergent. Dann ist f stetig differenzierbar und $f' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$.*

Beweis: Sei $x_0 \in I = [a,b]$. Dann gilt für $x \in I$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \lim_{N\to\infty} (F_N(x) - F_N(x_0)) \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_{x_0}^{x} F_N'(t)\,dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Weil am Schluß der Integrand stetig ist, ist f differenzierbar, f' stetig und

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

■

Insbesondere können reelle Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzintervalls gliedweise integriert und differenziert werden. Hat nämlich $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius R, so hat auch $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ den Konvergenzradius R. Daraus folgt:

Die Grenzfunktion einer Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

ist auf dem Konvergenzintervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ *beliebig oft differenzierbar!*

Wir berechnen die Ableitungen im Entwicklungspunkt. Es ist

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0, \\ f'(x_0) &= a_1, \\ f''(x_0) &= 2a_2, \\ f'''(x_0) &= 6a_3 \\ \text{und allgemein } f^{(k)}(x_0) &= k!a_k. \end{aligned}$$

Also gilt für die Grenzfunktion f einer Potenzreihe im Konvergenzintervall:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Man nennt die Reihe auf der rechten Seite auch die *Taylorreihe* von f in x_0. Eine Potenzreihe stimmt im Konvergenzintervall mit ihrer Taylorreihe überein.

Ist nun f irgendeine unendlich oft differenzierbare Funktion auf einem Intervall I, so kann man die Taylorreihe Tf von f in einem Punkt $x_0 \in I$ bilden und fragen, wo diese Reihe gegen f konvergiert. Zwei Antworten wären denkbar:

1. Tf konvergiert auf dem Konvergenzintervall von Tf gegen f ?
2. Tf konvergiert auf dem Definitionsbereich von f gegen f ?

Es stellt sich heraus, daß i.a. beide Antworten falsch sind!!

Die Taylorsche Formel liefert: $f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$, wobei $T_n f(x)$ das n-te Taylorpolynom und $R_n f(x)$ das zugehörige Restglied ist. Offensichtlich gilt:

$$Tf(x) \text{ konvergiert gegen } f(x) \iff \lim_{n\to\infty} R_n f(x) = 0.$$

Konvergenzkriterium für die Taylorreihe

Sei $I \subset \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $x_0 \in I$ *und* $f : I \to \mathbb{R}$ *beliebig oft differenzierbar. Gibt es Konstanten* $C, r > 0$*, so daß* $|f^{(n)}(x)| \le C \cdot r^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $x \in I$ *gilt, so konvergiert die Taylorreihe* Tf *von* f *in* x_0 *auf ganz* I *gegen* f*.*

Beweis: Zu jedem $x \in I$ gibt es ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$|R_n f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \leq C \cdot \frac{(r \cdot |x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!},$$

und die rechte Seite konvergiert gegen Null, wegen der Konvergenz der Exponentialreihe. Das gilt unabhängig von x. ∎

Beispiele.

1. Sei $f(x) := e^x$. Weil $(e^x)^{(n)} = e^x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, ist die Exponentialreihe

   $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

   zugleich die Taylorreihe der Exponentialfunktion im Nullpunkt, und sie konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Funktion.

2. Sei $f(x) := \sin(x)$ und $g(x) := \cos(x)$. Dann ist

   $$Tf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad Tg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

   Weil jeweils $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ und $|g^{(n)}(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, konvergieren die Taylorreihen auf ganz $\mathbb{R}$ gegen die Funktionen. Außerdem gilt:

   $$\begin{aligned} \exp(\mathrm{j}t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{j}t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{j}t)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{j}t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(t) + \mathrm{j} \sin(t). \end{aligned}$$

   Das ist die schon bekannte Eulersche Formel.

3. Sei

   $$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

   Durch Induktion zeigt man, daß $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$ ist. Die Taylorreihe Tf im Nullpunkt ist die Nullreihe, die natürlich überall (gegen Null) konvergiert, aber nur bei $x = 0$ gegen die Funktion f.

4. Die Funktion $f(x) := \ln(1+x)$ ist im Intervall $I = (-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitung $f'(x)$ kann durch die geometrische Reihe

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

dargestellt werden. Als Potenzreihe ist diese Reihe gleich ihrer eigenen Taylorreihe. Allerdings ist $f'(x)$ auch für $x > 1$ definiert, während die Reihe dort divergiert. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; f(x) - f(0) \;&=\; \int_0^x f'(t)\,dt \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)}\Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}\,. \end{aligned}$$

Also ist

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\,.$$

Die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Die Grenzfunktion $f(x) = \ln(1+x)$ der Potenzreihe ist in $x = 1$ noch stetig, mit $f(1) = \ln(2)$. Aus dem Abelschen Grenzwertsatz folgt jetzt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \ln(2).$$

5. Wir betrachten die Funktion $f(x) := \arctan(x)$. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

nach der Summenformel für die geometrische Reihe. Die Gleichung gilt für $|x| < 1$. Für solche x ist dann

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

Auch hier gilt die Darstellung nicht über $(-1, 1)$ hinaus. Lediglich am rechten Randpunkt des Intervalls geht noch etwas. Nach dem Leibnizkriterium ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(2n+1)$ konvergent, und $f(x) = \arctan(x)$ ist bei $x = 1$ noch stetig, mit $f(1) = \pi/4$. Der Abelsche Grenzwertsatz liefert

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

§ 6 Uneigentliche Integrale

Inhalt:

Uneigentliche Integrale (unbeschränkte Funktionen und unbeschränkte Intervalle), Cauchyscher Hauptwert, Majorantenkriterium, absolute Konvergenz, Vergleichssatz.

Wir beginnen mit einem Beispiel:

Sei $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Dann ist f bei $x = 0$ nicht definiert und $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$. Wir können also f nicht einmal zu einer stückweise stetigen Funktion auf $[0,1]$ fortsetzen und daher mit unseren bisherigen Mitteln über $[0,1]$ auch nicht integrieren.

Andererseits ist $F(x) := 2\sqrt{x}$ über $(0,1]$ eine Stammfunktion von $f(x)$, und daher

$$\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = F(1) - F(\varepsilon) = 2(1 - \sqrt{\varepsilon}), \text{ für kleines } \varepsilon > 0.$$

Lassen wir jetzt ε gegen Null gehen, so erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx = 2.$$

Da dieser Grenzwert existiert, wollen wir ihn als Integral von f über $[0,1]$ auffassen. In diesem Sinne soll jetzt der Integralbegriff erweitert werden.

Definition:

Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Der Grenzwert

$$\int_a^b f(t)\,dt := \lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)\,dt$$

wird als *uneigentliches Integral* bezeichnet. Falls er existiert, nennt man das uneigentliche Integral *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Analog erklärt man das uneigentliche Integral einer stetigen Funktion $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ durch den rechtsseitigen Limes, so wie im obigen Beispiel.

Man sieht sofort, daß dieser Begriff nichts Neues bringt, wenn f schon auf $[a,b]$ stetig ist.

Ist f eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall (a, b), so bildet man das uneigentliche Integral, indem man einen Punkt $c \in (a, b)$ wählt und die uneigentlichen Integrale von f über $(a, c]$ und über $[c, b)$ bildet und dann addiert. Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl des Punktes c ab, wichtig ist nur, daß man beide Grenzübergänge unabhängig voneinander durchführt!

Beispiel.

Wir betrachten $f(x) := \dfrac{1}{x^\alpha}$ auf $(0, b]$ für verschiedene α.

a) Ist $\alpha = 1$, so ist $F(x) := \ln(x)$ eine Stammfunktion für $f(x)$, und daher

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x}\, dx = \ln(b) - \ln(\varepsilon) \longrightarrow +\infty \text{ für } \varepsilon \to 0.$$

Das uneigentliche Integral divergiert!

b) Ist $\alpha \neq 1$, so ist $F(x) := -\dfrac{1}{(\alpha - 1)x^{\alpha-1}}$ Stammfunktion für f.

Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha < 1$: dann ist

$$\int_\varepsilon^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = -\frac{1}{\alpha - 1} \cdot \left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right).$$

Da $1 - \alpha > 0$ ist, strebt $\dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} = \varepsilon^{1-\alpha}$ gegen Null für $\varepsilon \to 0$.

Also existiert $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = -\frac{1}{(\alpha - 1)b^{\alpha-1}}$ für $\alpha < 1$.

Insbesondere ist $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha}$, z.B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$.

c) Ist $\alpha > 1$, so ist $\alpha - 1 > 0$, und $1/(\varepsilon^{\alpha-1})$ strebt gegen $+\infty$ für $\varepsilon \to 0$. In diesem Fall divergiert das uneigentliche Integral.

Das trifft z.B. auf $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$ zu.

Bisher haben wir nur über beschränkte Intervalle integriert. Manchmal möchte man jedoch die Integration auf ganz $\mathbb{R}$ oder zumindest auf eine Halbachse ausdehnen. Dann behilft man sich mit einer anderen Sorte von uneigentlichen Integralen:

Definition:

Sei $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann wird auch der Grenzwert

$$\int_a^\infty f(t)\,dt := \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

als *uneigentliches Integral* bezeichnet. Konvergenz und Divergenz erklärt man wie oben. Das uneigentliche Integral über $(-\infty, b]$ definiert man analog.

Beispiel.

Wir betrachten noch einmal $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ für verschiedene α.

a) $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x) - \ln(a)$ strebt für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$.

Das uneigentliche Integral divergiert also auch hier.

b) Ist $\alpha < 1$, so ist $\displaystyle\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = -\frac{1}{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$, wobei $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = x^{1-\alpha}$ gegen $+\infty$ strebt, für $x \to \infty$. Auch dieses Integral divergiert.

c) Ist $\alpha > 1$, so konvergiert das uneigentliche Integral offensichtlich. Das bedeutet, daß insbesondere das Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert (gegen 1), während $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ divergiert.

Insgesamt haben wir gesehen, daß $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ für **kein** α konvergiert!

Wie bei offenen Intervallen müssen uneigentliche Integrale über ganz $\mathbb{R}$ durch zwei voneinander unabhängige Grenzprozesse berechnet werden:

Definition:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das *uneigentliche Integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ konvergiert genau dann, wenn die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt \text{ und } \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$$

konvergieren. Der Wert des Integrals über ganz $\mathbb{R}$ ist gleich der Summe der Werte der Teilintegrale, d.h. es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(t)\,dt.$$

Man beachte, daß in der letzten Formel a und b unabhängig voneinander gegen die Grenzen streben. Manchmal findet man auch noch den folgenden Grenzwert:

$$HW \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt := \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} f(t)\,dt.$$

Man spricht dann vom *Cauchy'schen Hauptwert*. Es kann passieren, daß dieser Hauptwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral von f über $\mathbb{R}$ divergiert.

Wenn keine explizite Stammfunktion gegeben ist, wird es schwierig mit dem Nachweis von Konvergenz oder Divergenz eines uneigentlichen Integrals. Für den Fall gibt es aber gewisse Vergleichskriterien.

Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale

Es seien f und g zwei stetige Funktionen über $[a,\infty)$, mit $|f| \le g$. Konvergiert das uneigentliche Integral über g, so konvergiert auch das uneigentliche Integral über f.

Beweis: Für $x \in [a,\infty)$ ist $0 \le |f(x)| + f(x) \le 2|f(x)| \le 2g(x)$. Ist $A_n \ge a$ eine monotone Folge, die gegen $+\infty$ konvergiert, so ist

$$0 \le \int_{a}^{A_n} (|f(x)| + f(x))\,dx \le 2\int_{a}^{A_n} g(x)\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist durch $2\int_a^\infty g(x)\,dx$ nach oben beschränkt. Das Integral in der Mitte wächst mit n monoton (da der Integrand nicht negativ wird) und ist erst recht nach oben beschränkt, konvergiert also nach dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Genauso folgt, daß $\int_a^{A_n} |f(x)|\,dx$ konvergiert. Aber dann konvergiert auch die Differenz der beiden Folgen, d.h. die Folge der Integrale

$$\int_a^{A_n} f(x)\,dx\,.$$

Weil die Folge (A_n) beliebig ist, folgt die Behauptung. ■

Definition:

Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert absolut*, falls $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergiert. Für andere Typen von uneigentlichen Integralen definiert man die absolute Konvergenz entsprechend.

Absolute Konvergenz impliziert gewöhnliche Konvergenz

Konvergiert ein uneigentliches Integral über f absolut, so auch im gewöhnlichen Sinne.

Beweis: Trivial! ■

Die Umkehrung des Satzes ist falsch!

Beispiele.

1. $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ konvergiert, weil $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert.
2. Es ist
$$\int_1^r e^{-x}\,dx = -\int_1^r (e^{-x})'\,dx = -(e^{-r} - e^{-1}),$$
und das konvergiert gegen $\frac{1}{e}$ für $r \to \infty$.

   Also konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$.

   Analog ist
$$\int_{-\infty}^{-1} e^x\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{-1} (e^x)'\,dx = \lim_{r\to\infty} (e^{-1} - e^{-r}) = e^{-1}.$$

Für $x \geq 1$ ist $x^2 \geq x$, also $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Für $x \leq -1$ ist $x^2 = |x|^2 \geq |x| = -x$, also $-x^2 \leq x$. Damit ist dort $e^{-x^2} \leq e^x$

Daraus folgt die Konvergenz des „Fehlerintegrals“ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

3. Die Funktion $f(x) := \dfrac{\sin(x)}{x}$ ist überall stetig, und man kann zeigen, daß $\displaystyle\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ divergiert. Deshalb ist es nicht so ohne weiteres möglich, die etwaige Konvergenz von $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ mit Hilfe des Majorantenkriteriums zu zeigen. Man muß sich etwas Trickreicheres einfallen lassen.

   Wir können die Integration bei 1 beginnen und setzen
$$F(x) := \int_1^x \sin t\,dt.$$
   Dann ist F integrierbar, $F'(x) = \sin x$ und
$$|F(x)| = |\cos(1) - \cos(x)| \leq 2.$$
   Wir benutzen nun partielle Integration:
$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt &= \int_1^x \frac{1}{t} \cdot F'(t)\,dt \\ &= \frac{F(t)}{t}\Big|_1^x - \int_1^x \Big(-\frac{1}{t^2}\Big) \cdot F(t)\,dt \\ &= \frac{F(x)}{x} + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt\,.\end{aligned}$$
   Nun ist $|F(x)| \leq 2$, und $\dfrac{1}{x}$ konvergiert gegen Null für $x \to \infty$. Weiter ist $\left|\dfrac{F(t)}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2}$, und $\displaystyle\int_1^x \frac{2}{t^2}\,dt = -\frac{2}{t}\Big|_1^x = 2 - \frac{2}{x}$ strebt für $x \to \infty$ gegen 2. Also konvergiert $\displaystyle\int_1^\infty \frac{F(t)}{t^2}\,dt$, und damit auch $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$

Zum Schluß wollen wir noch den engen Zusammenhang zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen hervorheben:

Vergleichssatz

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f : [m, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig, positiv und monoton fallend. Dann haben die Reihe $\displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ und das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_m^\infty f(x)\,dx$ das gleiche Konvergenzverhalten.

Beweis: Auf dem Intervall $[k, k+1]$ ist

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1),$$

also auch

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1)$$

und damit

$$\sum_{k=m}^{N} f(k) \geq \int_m^{N+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=m+1}^{N+1} f(k).$$

Daraus folgt die Behauptung. ∎

Beispiel.

Aus dem Vergleichssatz und unseren Kenntnissen über uneigentliche Integrale folgt sofort:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert genau dann, wenn } \alpha > 1 \text{ ist.}$$

So ist etwa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ konvergent.

§ 7 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Inhalt:

Begriff der Differentialgleichung, Wachstumsgleichung, Gleichung mit getrennten Variablen, lineare DGL erster Ordnung, Bernoullische DGL.

Es seien I und J zwei beschränkte oder unbeschränkte offene Intervalle, und $G := I \times J \subset \mathbb{R}^2$. Eine Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ heißt *stetig*, falls für $t_0 \in I$, $s_0 \in J$ und beliebige Folgen (t_ν) in I und (s_ν) in J mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} t_\nu = t_0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} s_\nu = s_0$ gilt:

$$\lim_{\nu\to\infty} F(t_\nu, s_\nu) = f(t_0, s_0).$$

Das ist in Analogie zur Stetigkeit auf Kreisscheiben in $\mathbb{C}$ definiert.

Definition:

Sei $F : G = I \times J \to \mathbb{R}$ stetig. Unter einer *Lösung* der *Differentialgleichung*

$$y' = F(x, y)$$

versteht man eine Funktion $f : I_0 \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $I_0 \subset I$ ist ein offenes Intervall mit $f(I_0) \subset J$.
2. f ist stetig differenzierbar, und es ist

$$f'(t) = F(t, f(t)), \text{ für alle } t \in I_0.$$

Allgemein versteht man unter einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* n-ter Ordnung eine Gleichung der Form

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Hat sie die speziellere Form $y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, so spricht man von einer *expliziten* DGL, andernfalls von einer *impliziten* DGL. In diesem Paragraphen werden wir nur explizite DGLn erster Ordnung betrachten, und auch davon nur einige spezielle Typen. Im folgenden Paragraphen werden wir noch eine besonders einfache Sorte von expliziten DGLn zweiter Ordnung behandeln.

Wir beginnen mit einem ganz einfachen Beispiel, nämlich der DGL

$$y' = ay, \quad a \neq 0 \text{ eine reelle Konstante.}$$

Hier ist $F(x, y) = ay$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und stetig. Eine Lösung kann sofort angegeben werden, $f_0(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Das ist eine ziemlich langweilige Lösung. Gibt es noch andere?

Nehmen wir an, wir hätten irgend eine Lösung $f(t)$ auf einem Intervall I. Dann ist

$$f'(t) = a \cdot f(t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

Setzen wir $g(t) := f(t) \cdot e^{-at}$, so ist

$$g'(t) = \big(f'(t) - a \cdot f(t)\big) \cdot e^{-at} \equiv 0,$$

also $g(t)$ konstant, etwa $= c$. Daraus folgt:

$$f(t) = c \cdot e^{at}, \text{ mit } c = f(0).$$

Die Probe zeigt, daß jede derartige Funktion eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung ist, und andererseits muß natürlich jede Lösung so aussehen. Die Gesamtheit aller Lösungen wird parametrisiert durch den Faktor $c = f(0)$.

Satz (Lösungen der Wachstumsgleichung)

Für jede reelle Zahl c gibt es genau eine auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung f_c der DGL $y' = ay$ mit $f_c(0) = c$, nämlich $f_c(t) = c \cdot e^{at}$.

Damit haben wir schon das erste *Anfangswertproblem* (AWP) gelöst. Allgemein verstehen wir hier unter einem Anfangswertproblem die Suche nach einer Lösung f einer DGL $y' = F(x, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $f(x_0) = y_0$. Wir haben gezeigt, daß das Anfangswertproblem

$$y' = ay, \quad y(0) = c,$$

immer eindeutig lösbar ist.

Als nächstes betrachten wir **Differentialgleichungen mit getrennten Variablen**:

$$y' = f(x)g(y), \quad f : I \to \mathbb{R} \text{ und } g : J \to \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

1. Schritt: Ist $g(y_0) = 0$, so ist für jedes $x_0 \in I$ die konstante Funktion $y(t) = y_0$ die einzige Lösung mit $y(x_0) = y_0$.

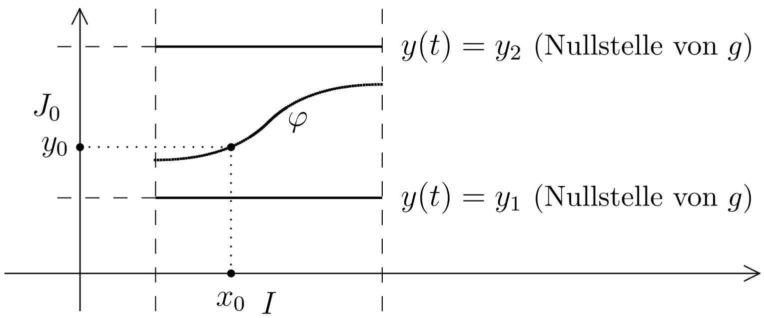
2. Schritt: Sei $J_0 \subset J$ ein offenes Intervall, auf dem g keine Nullstellen hat, und $y_0 \in J_0$. Ist $\varphi(t)$ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$, so muß gelten:

$$\frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))} = f(t).$$

Also ist

$$\int f(t)\,dt = \int \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}\,dt = \Big(\int \frac{1}{g(u)}\,du\Big) \circ \varphi.$$

Sei nun F eine Stammfunktion von f auf I und G eine Stammfunktion von $1/g$ auf J_0. Dann ist $G'(x) = 1/g(x) \neq 0$ für $x \in J_0$, also G dort streng monoton. Damit ist G umkehrbar. Ist $F(x_0) + c = G(y_0)$, so ist $\varphi(t) := G^{-1}(F(t) + c)$ in der Nähe von x_0 definiert und $\varphi(x_0) = y_0$. Die Probe zeigt sofort, daß $\varphi(t)$ tatsächlich die DGL löst. Dabei ist φ auf $\{t \in I \,:\, F(t) + c \in G(J_0)\}$ definiert und hat Werte in J_0.



Die Stammfunktionen sind nur bis auf eine Konstante bestimmt. Um das AWP zu lösen, arbeiten wir am besten mit bestimmten Integralen:

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_0) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \\
&= \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}\,dt \\
&= \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(u)}\,du \\
&= G(y(x)) - G(y_0),
\end{aligned}$$

also

$$y(x) = G^{-1}\big(F(x) - F(x_0) + G(y_0)\big).$$

Das AWP ist eindeutig lösbar!

Beispiele.

1. Zu lösen ist die DGL $y' = xy$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

   Ist $y_0 = 0$, so ist $y(x) \equiv 0$ die eindeutig bestimmte Lösung.

   Ist $y_0 > 0$, so benutzen wir die Stammfunktionen $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ von $f(x) = x$ und $G(y) = \ln(y)$ von $g(y) = 1/y$. Dann ist $G^{-1}(x) = e^x$ und

   $$y(x) = \exp\Big(\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + \ln(y_0)\Big).$$

   Ist $y_0 < 0$, so müssen wir $G(y) = \ln|y| = \ln(-y)$ benutzen. Dann ist $G^{-1}(x) = -e^x$ und

$$y(x) = -\exp\bigl(\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) + \ln(-y_0)\bigr).$$

2. Jetzt untersuchen wir die DGL $y' = -\dfrac{x}{2y}$, mit einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

   Hier ist $f(x) = -\dfrac{x}{2}$ (mit Stammfunktion $F(x) = -\dfrac{x^2}{4}$) und $g(y) = \dfrac{1}{y}$. Da g in $y = 0$ nicht definiert ist, müssen wir die Fälle $y > 0$ und $y < 0$ getrennt untersuchen. Dort hat g dann keine Nullstellen.

   Ist $y_0 > 0$, so müssen wir den Fall $y > 0$ betrachten. Hier ist $G(y) = y^2/2$ Stammfunktion von $1/g(y) = y$. Diese Funktion bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv nach $\mathbb{R}_+$ ab, mit $G^{-1}(x) = \sqrt{2x}$. Die gesuchte Lösung ist

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(x_0^2 - x^2) + y_0^2}.$$

   Sie ist nur definiert und stetig differenzierbar, solange $x^2 < x_0^2 + 2y_0^2$ ist. Ist etwa $x_0 = 1$ und $y_0 = 1$, so ist $y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(3 - x^2)}$ auf $|x| < \sqrt{3}$.

   Die Lösung braucht also nicht auf dem ganzen Intervall I definiert zu sein. Das maximale Definitionsintervall einer Lösung ist aber immer offen. Im obigen Beispiel ist die Lösung auf dem Rand des Intervalls nicht mehr differenzierbar.

Als nächstes betrachten wir **lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung**.

Die Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$ seien stetig. Gesucht sind die Lösungen der DGL

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Wir beginnen mit dem Fall $b(x) \equiv 0$. Man spricht dann auch von einer *homogenen linearen DGL.*

Satz (Der Lösungsraum der homogenen Gleichung)

Die Menge $\mathcal{L}_h$ aller Lösungen der DGL $y' + a(x)y = 0$ ist ein 1-dimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(I)$. Zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $y_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Lösung $y(t)$ der DGL $y' + a(x)y = 0$ mit $y(x_0) = y_0$.

Beweis: Die DGL $y' = -a(x)y$ ist eine DGL mit getrennten Variablen. Die Nullfunktion ist die eindeutig bestimmte Lösung, die bei einem beliebigen Punkt x_0 den Wert Null annimmt.

Ist J ein beliebiges Intervall, das nicht die Null enthält, so hat $g(y) = y$ dort keine Nullstellen, und $G(y) = \ln|y|$ ist Stammfunktion von $1/g(y)$. Ist etwa $J \subset \mathbb{R}_+$, $y_0 \in$

J und außerdem $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$, so ergibt sich die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = \exp(-A(x) + A(x_0) + \ln(y_0)) = y_0 \cdot \exp(A(x_0) - A(x))$$

mit $y(x_0) = y_0$. Wie man jetzt sieht, sind die Fälle $y_0 = 0$ und $y_0 < 0$ auch darin enthalten.

Also ist das AWP immer eindeutig lösbar, und jede Lösung ist ein Vielfaches von $e^{-A(x)}$. ∎

Wir kommen jetzt zum *inhomogenen* Fall $y' + a(x)y = b(x)$. Man macht folgende Beobachtung: Sind y_1, y_2 zwei Lösungen der inhomogenen Gleichung über einem Intervall J, so ist $y_1 - y_2$ über J eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y' + a(x)y = 0$, denn es gilt:

$$(y_1 - y_2)' + a(y_1 - y_2) = b - b = 0.$$

Das bedeutet, daß die Menge $\mathcal{L}_i$ der Lösungen der inhomogenen Gleichung ein affiner Raum zum Raum $\mathcal{L}_h$ ist, sofern nur eine einzige *partikuläre Lösung* $y_p(t)$ der inhomogenen Gleichung über I existiert. Dann ist

$$y_p + \mathcal{L}_h = \mathcal{L}_i.$$

Nun ist $y(t)$ genau dann eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit $y(x_0) = y_0$, wenn $(y - y_p)(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung mit $(y - y_p)(x_0) = y_0 - y_p(x_0)$ ist. Also ist auch hier das AWP eindeutig lösbar, und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(t) = y_p(t) + c \cdot \exp(-A(x)).$$

Wie findet man nun eine partikuläre Lösung? Üblich ist ein Ansatz, der als „Variation der Konstanten" bezeichnet wird:

$$\textbf{Ansatz:} \quad y_p(t) = c(t) \cdot e^{-A(t)}\,.$$

Wenn dies eine Lösung ist, so gilt:

$$y_p'(t) + a(t)y_p(t) = b(t),$$

mit

$$y_p'(t) = c'(t) \cdot e^{-A(t)} - c(t)A'(t) \cdot e^{-A(t)} = (c'(t) - c(t)a(t)) \cdot e^{-A(t)}.$$

Also muß $c'(t) = b(t) \cdot e^{A(t)}$ sein. Das führt zu

$$y_p(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)} \, dt \Big) \cdot e^{-A(x)}.$$

Beispiel.

Auf $I = \mathbb{R}$ betrachten wir die lineare DGL $y' + 2y = x$, mit einer Anfangsbedingung $y(0) = y_0$.

$A(x) = 2x$ ist Stammfunktion von $a(x) = 2$. Also ist $y_h(x) = e^{-2x}$ eine Basis des Lösungsraumes der homogenen Gleichung.

Als Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir

$$y_p(x) = \Big(\int_0^x te^{2t}\,dt\Big) \cdot e^{-2x} = \Big(e^{2t}(\frac{t}{2} - \frac{1}{4})\Big|_0^x\Big) \cdot e^{-2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2x}\,.$$

Unter einer **Bernoullischen Differentialgleichung** versteht man eine DGL der Form

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 1,$$

mit stetigen Funktionen a, b auf einem Intervall $I = (c, d)$. Es soll gezeigt werden, daß das AWP für $x_0 \in I$ und $y_0 > 0$ eindeutig lösbar ist. Wir suchen deshalb nach Lösungen, die in der Nähe von x_0 positiv sind. Sei etwa φ eine solche Lösung. Dann gilt:

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(t)^\alpha.$$

Nun ist $\big(\varphi(t)^{1-\alpha}\big)' = (1-\alpha)\varphi(t)^{-\alpha}\varphi'(t)$. Teilt man die obige Gleichung durch $\varphi(t)^\alpha/(1-\alpha)$, so erhält man:

$$\big(\varphi(t)^{1-\alpha}\big)' = (1-\alpha)a(t)\varphi(t)^{1-\alpha} + (1-\alpha)b(t).$$

Das bedeutet, daß $\Phi(t) := \varphi(t)^{1-\alpha}$ Lösung der folgenden linearen DGL ist:

$$Y' = (1-\alpha)a(t)Y + (1-\alpha)b(t).$$

Und umgekehrt ist für jede Lösung Φ dieser linearen DGL die Funktion $\varphi(t) = \Phi(t)^{1/(1-\alpha)}$ Lösung der Bernoulli-Gleichung. Aber für die lineare Gleichung ist das AWP eindeutig lösbar.

Ein Spezialfall ist die sogenannte **logistische Differentialgleichung** (auch als **Differentialgleichung des beschränkten Wachstums** bezeichnet):

$$y' = ay - by^2,\ a, b \in \mathbb{R}_+,\ y > 0.$$

Ist $\varphi(t)$ Lösung der logistischen DGL, so ist $\Phi(t) = \varphi(t)^{-1}$ Lösung der linearen DGL $Y' + aY = b$. Die homogene Gleichung $Y' + aY = 0$ hat die Lösung $Y(t) = c \cdot e^{-at}$. Als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung können wir die konstante Funktion $y_p(x) = b/a$ nehmen. Also können wir $\Phi(t) = ce^{-at} + \dfrac{b}{a}$ setzen. Dann ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Phi(t)} = \frac{a}{b + ace^{-at}}\,.$$

Gewisse Eigenschaften der Lösung kann man schon direkt aus der DGL ablesen. Es ist $y' = y(a - by)$. Ist $0 < y < a/b$, so ist $y' > 0$, d.h., y nimmt zu. Oberhalb von a/b ist $y' < 0$, d.h., y nimmt ab. Ist sogar $y < a/(2b)$, so ist nicht nur $y' > 0$, sondern auch $y'' = y'(a - by) + y(-by') = ay' - 2byy' = (a - 2by)y' > 0$. Daher nennt man diesen Bereich den „Bereich des beschleunigten Wachstums“.

Zum Schluß soll noch an einem Beispiel gezeigt werden, daß das AWP nicht immer eindeutig lösbar ist. Wir betrachten die DGL

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Die rechte Seite ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig (aber nicht differenzierbar). Offensichtlich ist $y(x) \equiv 0$ eine Lösung. Aber es gibt noch weitere Lösungen y mit $y(0) = 0$. Sei etwa $a < 0 < b$ und

$$y(x) = y_{a,b}(x) := \begin{cases} -(x-a)^2 & \text{für } x \le a, \\ 0 & \text{für } a < x < b, \\ (x-b)^2 & \text{für } x \ge b. \end{cases}$$

Dann ist

$$y'(x) := \begin{cases} -2(x-a) & \text{für } x \le a, \\ 0 & \text{für } a < x < b, \\ 2(x-b) & \text{für } x \ge b, \end{cases}$$

d.h., jede solche Funktion $y_{a,b}$ löst die DGL, und es ist $y_{a,b}(0) = 0$.

Im 3. Semester wird gezeigt: Ist die rechte Seite einer DGL $y' = f(x, y)$ stetig differenzierbar (in einem Sinne, der natürlich auch erst mal präzisiert werden muß), so ist jedes AWP eindeutig lösbar.

§ 8 Differentialgleichungen 2. Ordnung

Inhalt:

Determinanten, Cramersche Regel, komplexwertige Funktionen.

Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Wronski-Determinante, charakteristisches Polynom, Fundamentalsystem, inhomogene Gleichung, Variation der Konstanten, partikuläre Lösung durch Ansatz.

Wir wollen DGLn der folgenden Form untersuchen:

$$y'' + ay' + by = q(x),\ a, b \in \mathbb{R},\ q : I \to \mathbb{R} \text{ stetig.}$$

Man spricht von einer **linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**. Die Funktion q heißt *Inhomogenität* oder *Störfunktion*. Die Gleichung $y'' + ay' + by = 0$ nennt man die *zugehörige homogene Gleichung*.

Bevor wir diese Gleichungen behandeln können, müssen noch gewisse Vorbereitungen getroffen werden.

1. Determinanten:

Ist $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, so heißt die Zahl $\det(A) := ad - bc$ die *Determinante* von A.

Behauptung: $\operatorname{rg}(A) = 2 \iff \det(A) \neq 0$.

Beweis: 1) Ist $\operatorname{rg}(A) < 2$, so sind die Spalten von A linear abhängig. Gibt es etwa ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $b = \lambda a$ und $d = \lambda c$ ist, so ist $\det(A) = a \cdot (\lambda c) - c \cdot (\lambda a) = 0$.

2) Sei umgekehrt $\det(A) = 0$, also $ad = bc$. Ist $a = c = 0$, so ist offensichtlich $\operatorname{rg}(A) < 2$. Ist $a \neq 0$, so ist $d = (bc)/a$ und daher

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{b}{a} \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Ist $c \neq 0$, so ist $b = (ad)/c$ und

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \frac{d}{c} \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Auch in diesen beiden Fällen ist $\operatorname{rg}(A) < 2$. ∎

Man kann die Determinante benutzen, um einfache lineare Gleichungssysteme zu lösen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Wir schließen aus, daß $a = b = c = d = 0$ ist. Ist dann $\det(A) = 0$, so muß $\text{rg}(A) = 1$ sein. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $a \neq 0$ ist, sowie $b = \lambda a$ und $d = \lambda c$. Das Gleichungssystem ist nur dann lösbar, wenn es auch noch ein μ mit $u = \mu a$ und $v = \mu c$ gibt. Es reduziert sich dann auf die Gleichung $ax + (\lambda a)y = \mu a$, also $x + \lambda y = \mu$. Die Lösungsgesamtheit besteht aus den Vektoren $(\mu - t\lambda, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Sei jetzt $\det(A) \neq 0$. Aus den beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rrcl} & adx + bdy & = & ud \\ \text{und} & bcx + bdy & = & bv \end{array}$$

folgt:

$$(ad - bc)x = du - bv, \text{ also } x = \frac{du - bv}{ad - bc},$$

und aus

$$\begin{array}{rrcl} & acx + bcy & = & uc \\ \text{und} & acx + ady & = & av \end{array}$$

folgt:

$$(ad - bc)y = av - uc, \text{ also } y = \frac{av - uc}{ad - bc}.$$

Man kann das auch so schreiben:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} u & b \\ v & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & u \\ c & v \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.$$

Man nennt dies die *Cramersche Regel*.

2. Komplexwertige Funktionen:

Sei $f = g + \mathrm{j}\,h : I \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Das bedeutet, daß die Funktionen $g, h : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und es ist

$$(g + \mathrm{j}\,h)' = g' + \mathrm{j}\,h'.$$

Beispiel.

Wir betrachten die Funktion $f(t) = e^{\mathrm{j}t} = \cos t + \mathrm{j}\sin t$.

$$\begin{aligned} (e^{\mathrm{j}t})' &= -\sin t + \mathrm{j}\cos t \\ &= \mathrm{j}(\cos t + \mathrm{j}\sin t) \;=\; \mathrm{j}e^{\mathrm{j}t}. \end{aligned}$$

Auch für komplexwertige Funktionen gilt die Produktregel und die Kettenregel:

1. Sind $f_1, f_2 : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist auch $f_1 \cdot f_2$ differenzierbar, und es ist $(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$.
2. Ist $\varphi : J \to I$ differenzierbar und $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist auch $f \circ \varphi : J \to \mathbb{C}$ differenzierbar und $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

Der BEWEIS erfolgt durch einfaches Nachrechnen.

Ist $\lambda = \alpha + \mathsf{j}\beta$, so ist $e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{\mathsf{j}\beta t}$, also

$$\begin{aligned} \left(e^{\lambda t}\right)' &= \alpha e^{\alpha t} \cdot e^{\mathsf{j}\beta t} + \mathsf{j}\beta e^{\alpha t} e^{\mathsf{j}\beta t} \\ &= \lambda \cdot e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Analog wird auch das Integral einer stetigen komplexwertigen Funktion definiert:

$$\int_a^b (g(t) + \mathsf{j}\, h(t))\, dt = \int_a^b g(t)\, dt + \mathsf{j} \int_a^b h(t)\, dt.$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{\mathsf{j}t}\, dt &= \int_a^b \cos t\, dt + \mathsf{j} \int_a^b \sin t\, dt \\ &= \sin(t)\, \Big|_a^b + \mathsf{j}(-\cos(t))\, \Big|_a^b \\ &= \sin(b) - \sin(a) - \mathsf{j}\cos(b) + \mathsf{j}\cos(a) \\ &= -\mathsf{j}\left((\cos(b) + \mathsf{j}\sin(b)) - (\cos(a) + \mathsf{j}\sin(a))\right) \\ &= (-\mathsf{j}e^{\mathsf{j}t})\, \Big|_a^b\, . \end{aligned}$$

3. Die homogene Gleichung:

Sei $q : I \to \mathbb{R}$ stetig. Unter einer Lösung der DGL

$$y'' + ay' + by = q(x)$$

versteht man eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) = q(t)$.

Wir werden weiter unten sehen, daß jede Lösung der homogenen DGL $y'' + ay' + by = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Man rechnet dann ganz einfach nach, daß die Lösungsmenge $\mathcal{L}_h$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet. Wir wollen versuchen, eine Basis dieses Raumes zu bestimmen.

Sind $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei (über einem Intervall I definierte) Lösungen der homogenen Gleichung, so nennt man

$$W = W_{f,g} := \det \begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = fg' - f'g$$

die *Wronski-Determinante* von f und g. Dann ist W über I noch einmal stetig differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} W' &= f'g' + fg'' - f''g - f'g' \\ &= f(-ag' - bg) - (-af' - bf)g \\ &= -a(fg' - f'g) \\ &= -aW, \end{aligned}$$

d.h. W ist Lösung der DGL $y' = -ay$, also $W(x) = c \cdot e^{-ax}$. Entweder ist $W(x) \equiv 0$ oder $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Ist $W(x_0) \neq 0$, so gibt es zu beliebig vorgegebenen Werten y_0, y_1 zwei Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} f(x_0) & g(x_0) \\ f'(x_0) & g'(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man dann $h := c_1 f + c_2 g$, so ist $h(x_0) = y_0$ und $h'(x_0) = y_1$. In dieser Form ist also das AWP für $y'' + ay' + by = 0$ immer lösbar, sobald es zwei Lösungen f, g mit $W_{f,g} \neq 0$ gibt. Über die Eindeutigkeit sprechen wir später.

Wir zeigen jetzt, daß es immer zwei solche Lösungen gibt.

Zunächst lassen wir auch komplexwertige Lösungen zu und versuchen es mit dem Ansatz $\varphi(t) := e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + a\varphi'(t) + b\varphi(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} \\ &= (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

$p(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$ heißt das *charakteristische Polynom* der DGL. Offensichtlich gilt:

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \text{ ist Lösung} \iff p(\lambda) = 0 \iff \lambda = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Jetzt müssen wir drei Fälle unterscheiden:

1. Fall: $p(\lambda)$ hat zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann ist $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$.

In diesem Fall sind $\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ und $\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ zwei Lösungen, und es gilt:

$$W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0.$$

2. Fall: $p(\lambda)$ hat eine reelle Nullstelle λ mit Vielfachheit 2. Dann ist $\lambda = -a/2$ und $b = a^2/4$.

$\varphi_1(t) := e^{\lambda t}$ ist natürlich eine Lösung. Wir brauchen noch eine zweite Lösung und versuchen es mit $\varphi_2(t) := te^{\lambda t}$. Es gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi_2'(t) & = & (1+\lambda t)e^{\lambda t} \\ \text{und} & \varphi_2''(t) & = & (2\lambda+\lambda^2 t)e^{\lambda t}, \end{array}$$

also

$$\begin{aligned} \varphi_2''(t)+a\varphi_2'(t)+b\varphi_2(t) &= \big((2\lambda+\lambda^2 t)+a(1+\lambda t)+bt\big)e^{\lambda t} \\ &= \big((2\lambda+\lambda^2 t)+(-2\lambda)(1+\lambda t)+t\lambda^2\big)e^{\lambda t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für die Wronski-Determinante erhalten wir

$$\begin{aligned} W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) &= \det\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & (1+\lambda t)e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ &= (1+\lambda t)e^{2\lambda t} - \lambda t e^{2\lambda t} \\ &= e^{2\lambda t} \neq 0. \end{aligned}$$

3. Fall: $p(\lambda)$ hat keine reelle Nullstelle. Dann gibt es eine komplexe Nullstelle $\lambda = \alpha + \mathsf{j}\beta$ mit $\beta \neq 0$, und $\overline{\lambda} = \alpha - \mathsf{j}\beta$ ist die zweite Nullstelle.

Die Funktionen $e^{\lambda t}$ und $e^{\overline{\lambda}t}$ können wir als Lösungen nicht brauchen. Deshalb versuchen wir es mit dem Realteil und dem Imaginärteil von $e^{\lambda t}$,

$$\varphi_1(t) := e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) := e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi_1+\mathsf{j}\varphi_2)'' + a(\varphi_1+\mathsf{j}\varphi_2)' + b(\varphi_1+\mathsf{j}\varphi_2) \\ &= (\varphi_1''+a\varphi_1'+b\varphi_1) + \mathsf{j}(\varphi_2''+a\varphi_2'+b\varphi_2). \end{aligned}$$

Damit sind φ_1, φ_2 Lösungen, und es gilt:

$$\begin{aligned} W_{\varphi_1,\varphi_2}(t) &= \det\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\sin\beta t & \alpha e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix} \\ &= \alpha e^{2\alpha t}\cos(\beta t)\sin(\beta t) + \beta e^{2\alpha t}\cos^2(\beta t) \\ &\quad - \alpha e^{2\alpha t}\cos(\beta t)\sin(\beta t) + \beta e^{2\alpha t}\sin^2(\beta t) \\ &= \beta e^{2\alpha t} \neq 0, \text{ da } \beta = \operatorname{Im}(\lambda) \neq 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Damit sind alle Fälle betrachtet, und es folgt, daß das AWP immer lösbar ist. Die Lösungen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Satz (Eindeutigkeit der Lösungen)

Ist f Lösung von $y'' + ay' + by = 0$ und $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, so ist $f(x) \equiv 0$.

BEWEIS: Angenommen, $f(x_1) \neq 0$ für ein x_1. Es gibt dann eine Lösung g mit $g(x_1) = 0$ und $g'(x_1) = f(x_1)$. Wir betrachten die Wronski-Determinante von f und g. Es ist

$$W_{f,g}(x_1) = \det \begin{pmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f'(x_1) & g'(x_1) \end{pmatrix} = f(x_1)^2 \neq 0,$$

aber $W_{f,g}(x_0) = 0$. Das kann nicht sein! ■

Folgerung

*Das AWP für die homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist immer **eindeutig** lösbar.*

Satz (Lineare Unabhängigkeit von Lösungen)

Zwei Lösungen f, g der homogenen Gleichung über einem Intervall I sind genau dann linear unabhängig, wenn $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist.

BEWEIS: 1) Ist $g = c \cdot f$, so ist $W_{f,g} = cff' - cff' = 0$.

2) Sei umgekehrt $W(x) \equiv 0$. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $x_0 \in I$. Weil $W(x_0) = 0$ ist, sind die Spalten der Wronski-Matrix in x_0 linear abhängig, es sei etwa $f(x_0) = c \cdot g(x_0)$ und $f'(x_0) = c \cdot g'(x_0)$. Dann setzen wir $h := f - c \cdot g$. Auch h ist Lösung, und weil $h(x_0) = h'(x_0) = 0$ ist, muß $h = 0$ sein, also $f = c \cdot h$. ■

Folgerung

Der Vektorraum $\mathcal{L}_h$ der über $\mathbb{R}$ definierten Lösungen ist 2-dimensional.

BEWEIS: Wir wissen schon, daß es zu vorgegebenen Anfangswerten y_0, y_1 immer genau eine Lösung $y \in \mathcal{L}_h$ mit $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_1$ gibt. Die Abbildung $A : \mathcal{L}_h \to \mathbb{R}^2$ mit $A(f) := (f(x_0), f'(x_0))$ ist also bijektiv. Außerdem ist A linear! Also ist $\text{Ker}(A) = \{0\}$ und $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^2$.

Wir wählen zwei Lösungen φ_1, φ_2 mit $A(\varphi_1) = \mathbf{e}_1$ und $A(\varphi_2) = \mathbf{e}_2$. Ist $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = 0$, so ist auch

$$(0,0) = A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = (c_1, c_2).$$

Also sind φ_1, φ_2 linear unabhängig.

Ist $\varphi \in \mathcal{L}_h$ beliebig, $A(\varphi) = (c_1, c_2)$, so ist $A(\varphi - c_1\varphi_1 - c_2\varphi_2) = (0, 0)$. Weil $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ ist, ist $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$. Das bedeutet, daß $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Erzeugendensystem und damit eine Basis von $\mathcal{L}_h$ ist. Also ist $\dim(\mathcal{L}_h) = 2$. ∎

Definition:

Unter einem Fundamentalsystem der DGL $y'' + ay' + by = 0$ versteht man eine Basis $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ von $\mathcal{L}_h$.

Wir haben oben für jeden denkbaren Fall (in Abhängigkeit vom charakteristischen Polynom) ein Fundamentalsystem angegeben.

4. Die inhomogene Gleichung:

Wir betrachten die DGL $y'' + ay' + by = q(x)$ mit stetigem q. Sind f und g zwei Lösungen dieser inhomogenen Gleichung, so ist $f - g$ Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Das bedeutet, daß die Menge $\mathcal{L}_i$ der Lösungen der inhomogenen Gleichung ein affiner Raum zum Vektorraum $\mathcal{L}_h$ ist. Es genügt also, eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Gleichung und ein Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$ der homogenen Gleichung zu finden. Das allgemeine Element von $\mathcal{L}_i$ hat dann die Gestalt

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Für jede Anfangsbedingung können die Konstanten c_1, c_2 so gewählt werden, daß $y(t)$ das zugehörige AWP löst.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung gibt es verschiedene Strategien.

A) Variation der Konstanten:

Wir machen den **Ansatz** $y_p(t) = c_1(t) \cdot y_1(t) + c_2(t) \cdot y_2(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' + u \quad (\text{mit } u := c_1' y_1 + c_2' y_2) \\ \text{und} \quad y_p'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + v + u' \ (\text{mit } v := c_1' y_1' + c_2' y_2'), \end{aligned}$$

Ist $u = 0$ und $v = q$, so ist

$$y_p'' + ay_p' + by_p = c_1(y_1'' + ay_1' + by_1) + c_2(y_2'' + ay_2' + by_2) + q = q,$$

und y_p löst die DGL. Daher gilt es, das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Da $W_{y_1,y_2}(t) \neq 0$ für alle t ist, liefert die Cramersche Regel die gewünschte Auflösung:

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ q & y_2' \end{pmatrix}}{W} \quad \text{und} \quad c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & q \end{pmatrix}}{W},$$

also

$$c_1 := -\int \frac{q(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt \quad \text{und} \quad c_2 := \int \frac{q(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt.$$

Beispiel.

Wir betrachten die DGL $y'' + y' - 2y = \sin(x)$. Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$, mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$. Also bilden die Funktionen

$$y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung. Als Wronski-Determinante erhält man

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -3e^{-x}.$$

Ist $q(x)$ die Störfunktion, so ist

$$c_1 = \frac{1}{3}\int q(t)e^{-t}\,dt \quad \text{und} \quad c_2 = -\frac{1}{3}\int q(t)e^{2t}\,dt.$$

Ist $q(t) = \sin t$, so ist

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3}\int e^{-t}\sin t\,dt = -\frac{e^{-x}}{6}(\sin x + \cos x) \\ \text{und} \quad c_2 &= -\frac{1}{3}\int e^{2t}\sin t\,dt = -\frac{e^{2x}}{15}(2\sin x - \cos x). \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\frac{1}{6}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{15}(2\sin x - \cos x) \\ &= -\frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x. \end{aligned}$$

Die Probe zeigt, daß y_p tatsächlich eine Lösung ist.

B) Direkter Ansatz:

Dieses Verfahren ist bei speziellen Störfunktionen sinnvoll, z.B. im Falle $q(x) = P(x) \cdot e^{\lambda x}$, mit einem Polynom $P(x)$.

Dazu eine Vorüberlegung: Sei $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ das charakteristische Polynom der DGL

$$(I) \quad y'' + ay' + by = q(x).$$

Dann ist $a = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ und $b = \lambda_1\lambda_2$.

Behauptung: $y(x)$ ist genau dann Lösung von (I), wenn es eine Lösung $z(x)$ von

$$(II_a) \quad z' - \lambda_2 z = q(x)$$

gibt, so daß $y(x)$ Lösung von

$$(II_b) \quad y' - \lambda_1 y = z(x)$$

ist.

BEWEIS: 1) Ist $z(x)$ Lösung von (II_a) und $y(x)$ Lösung von (II_b), so ist

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda_1 y' + z' \\ &= \lambda_1 y' + \lambda_2 z + q \\ &= \lambda_1 y' + \lambda_2(y' - \lambda_1 y) + q \\ &= -ay' - by + q. \end{aligned}$$

2) Ist umgekehrt $y(x)$ Lösung von (I), so setze man $z := y' - \lambda_1 y$. Dann ist

$$z' - \lambda_2 z = y'' - \lambda_1 y' - \lambda_2(y' - \lambda_1 y) = y'' + ay' + by = q.$$

∎

Man nennt das System aus (II_a) und (II_b) ein *System linearer DGLn 1. Ordnung.*

Wir untersuchen deshalb zunächst mal eine DGL der Gestalt

$$y' - \mu y = P(x)e^{\lambda x}, \text{ mit einem Polynom } P(x).$$

Für die Lösung machen wir den **Ansatz** $\varphi(x) = Q(x)e^{\lambda x}$, mit einem Polynom $Q(x)$. Dann ist $\varphi'(x) = Q'(x)e^{\lambda x} + \lambda Q(x)e^{\lambda x}$, also

$$\varphi'(x) - \mu\varphi(x) = [Q'(x) + (\lambda - \mu)Q(x)]e^{\lambda x}.$$

Damit φ eine Lösung ist, muß $Q'(x) + (\lambda - \mu)Q(x) = P(x)$ sein.

1. Fall: Ist $\lambda = \mu$, so muß $Q(x) = \int P(t)\,dt$ sein, also insbesondere $\text{grad}(Q) = \text{grad}(P) + 1$.

2. Fall: Ist $\lambda \neq \mu$, so kann man versuchen, ein Q mit $\text{grad}(Q) = \text{grad}(P)$ zu finden. Das ist tatsächlich möglich. Setzt man Q mit unbestimmten Koeffizienten an, so führt das zu einem einfach zu lösenden Gleichungssystem.

Zusammen erhält man folgendes Ergebnis:

Satz (Partikuläre Lösung durch Ansatz)

Sei $P(x)$ ein normiertes Polynom vom Grad n. Dann besitzt die DGL

$$y'' + ay' + by = P(x)e^{\lambda x}$$

eine Lösung der Gestalt $\varphi(x) = Q(x)e^{\lambda x}$ mit einem Polynom $Q(x)$.

1. *Ist λ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so hat auch $Q(x)$ den Grad s.*

2. *Ist λ eine m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so hat $Q(x)$ den Grad $s + m$.*

In der Praxis bedeutet das, daß man die Lösung mit unbestimmten Koeffizienten für $Q(x)$ ansetzen kann. Diesen Ansatz setzt man in die DGL ein, so daß man ein Gleichungssystem für die Koeffizienten erhält.

Beispiel.

Wir betrachten die DGL $y'' - y = (3 + 2x + x^2)e^x$. Das charakteristische Polynom ist $p(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Die Funktionen $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$ bilden ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung.

Die Störfunktion hat die Gestalt $q(x) = P(x)e^x$, wobei $P(x) = 3 + 2x + x^2$ ein Polynom vom Grad 2 und der Koeffizient $\lambda = 1$ im Exponenten eine Nullstelle der Ordnung 1 des charakteristischen Polynoms ist.

Also machen wir für die Lösung den Ansatz

$$\varphi(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)e^x.$$

Dann ist

$$\varphi''(x) - \varphi(x) = (2(a_1 + a_2) + 2(2a_2 + 3a_3)x + 6a_3 x^2)e^x.$$

Damit φ eine Lösung ist, muß gelten:

$$2(a_1 + a_2) = 3, \quad 2a_2 + 3a_3 = 1 \quad \text{und} \quad 6a_3 = 1.$$

Daraus folgt:

$$a_3 = \frac{1}{6}, \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad a_1 = \frac{5}{4}.$$

Weil wir für a_0 keine Bedingung erhalten, können wir $a_0 = 0$ setzen.

Tatsächlich ist

$$\varphi(x) = (\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3)e^x$$

eine Lösung.

Ein anderer Lösungsweg könnte übrigens darin bestehen, zunächst die DGL $z' + z = q(x)$ zu lösen (man erhält $z(x) = (\frac{5}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2)e^x$), und dann die DGL $y' - y = z(x)$. Das Ergebnis ist das Gleiche!