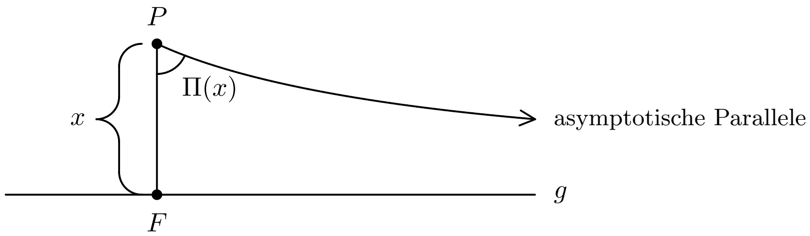
Leitfaden zur „Geometrie“, Teil 3

In **Abschnitt 3.4** wird erklärt, welche Theorie Johann Bolyai und Nikolai Lobatschewski entwickelt haben. Ihre neue Geometrie setzt das „hyperbolische Parallelenaxiom“ an die Stelle des euklidischen Parallelenaxioms, enthält aber auch viele Ergebnisse, die schon innerhalb der neutralen Geometrie gelten. Dementsprechend muss bei vielen Sätzen und Beweisen eine Fallunterscheidung vorgenommen werden: Entweder gilt die Hypothese vom rechten Winkel oder die vom spitzen Winkel. Die Hypothese vom stumpfen Winkel hatte ja Saccheri (und später noch einmal Legendre) schon ausgeschlossen. Die Geometrie auf der Sphäre ist damit endgültig aus dem Rennen.

Bolyai und Lobatschewki konzentrierten sich auf drei Schwerpunkte:

1. Die alte Parallelität von Geraden wird durch die Parallelität von Strahlen mit vorgegebener Richtung ersetzt. Man unterscheidet zwischen ***asymptotisch parallelen*** Strahlen (die sich beliebig nahe kommen) und ***überparallelen*** Strahlen (die eine gemeinsame Senkrechte besitzen). Bei den asymptotischen Parallelen gewinnt man damit sogar die Eindeutigkeit und kann zeigen, dass diese Parallelität eine Äquivalenzrelation ist.

2. Ist eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ gegeben, sowie das Lot von P auf g mit Fußpunkt F, so gibt es einen eindeutig bestimmten zu g asymptotisch parallelen Strahl durch P (in einer vorgegebenen Richtung). Dementsprechend ist auch der Winkel zwischen dem Strahl und der Geraden PF eindeutig bestimmt, und er hängt nicht von der speziellen Situation ab, nur von der Länge der Strecke $\overline{PF}$. Man nennt ihn den ***Parallelitätswinkel***. Benutzt man eine Längenfunktion, so ergibt sich eine reelle Funktion $\Pi : \mathbb{R}_+ \to (0, \pi/2]$.

   Π ist schwach monoton fallend und unter der Hypothese des spitzen Winkels sogar streng monoton fallend und stetig, und dann bildet Π die Menge $(0, \infty)$ bijektiv auf das Intervall $(0, \pi/2)$ ab.

3. Betrachtet man ein Büschel Σ von Geraden, so nennt man Punkte A und B (auf zwei verschiedenen Geraden von Σ) ***korrespondierend***, falls die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ebenfalls zu σ gehört. Dabei interessiert vor allem der Fall des Büschels von Geraden, die in einer festen Richtung zueinander asymptotisch parallel sind. Die Menge der Punkte, die zu einem festen Punkt korrespondierend sind, nennt man in diesem Fall einen ***Horozykel***. Geht man in die dritte Dimension, so erhält man analog die ***Horosphäre***.

   Bolyai entdeckte, dass man die Horosphäre als Modell für die ebene Geometrie verwenden kann, mit den Horozykeln als „Geraden“. Erstaunlicherweise gilt in dieser Geometrie das euklidische Parallelenaxiom. Man kann dann auf der Horosphäre zum Beispiel auch in gewohnter Weise mit Winkelfunktionen arbeiten und erhält die Formel für den Parallelitätswinkel:

   $$\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k} \qquad \text{(mit einer globalen Konstanten } k\text{).}$$

   Der Originalbeweis von Bolyai verwendet Raumgeometrie und ist nicht einfach zu verstehen, in der Vorlesung konnte er nicht vorgeführt werden.

Abschnitt 3.5 behandelt das von Poincaré gefundene Modell für die nichteuklidische Geometrie. In der ersten Hälfte des Abschnittes werden die Hilfsmittel bereitgestellt (Möbius-Transformationen, Spiegelungen an Kreisen, das Doppelverhältnis und speziell die sogenannten Automorphismen des Einheitskreises).

Hier kommen ein paar alte Bekannte wieder ins Spiel, wie etwa die Geometrie in $\mathbb{C}$, die Riemannsche Zahlenkugel und die stereographische Projektion, sowie der projektive Raum. Ursprünglich sollte dieser Teil sehr viel ausführlicher behandelt werden, aber das klappte aus Zeitgründen nicht.

Im zweiten Teil des Abschnittes wird das eigentliche Modell vorgeführt. Als Ebene dient das Innere $\mathbb{D}$ des Einheitskreises, als Geraden die Abschnitte sogenannter „Orthokreise", die sich innerhalb von $\mathbb{D}$ befinden. Die Automorphismen von $\mathbb{D}$ sind die Bewegungen. In dem Modell findet man Saccheri-Vierecke und Horozykel, und alles lässt sich mit den Mitteln der euklidischen Geometrie ausrechnen. Insbesondere ergibt sich auch die Formel für den Parallelitätswinkel recht einfach.

Mit Hilfe der Cayley-Abbildung lässt sich die nichteuklidische Geometrie in $\mathbb{D}$ auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ übertragen.

Zusammenfassung: Was bleibt im Rückblick?

Kapitel 1 beschreibt den $\mathbb{R}^2$ als Modell für die ebene euklidische Geometrie. Mit den Mitteln der Vektorrechnung kann man die klassischen Aussagen der Schulgeometrie beweisen und alles Mögliche berechnen. Man bezeichnet diese Darstellung der Geometrie als ***analytisch***. In den Übungsaufgaben wird auch noch die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ als ein zu $\mathbb{R}^2$ isomorphes Modell behandelt.

In Kapitel 2 werden erst mal die Ursprünge der Geometrie in Form der „Elemente" von Euklid vorgestellt. Der Aufbau der Geometrie bei Euklid dient dann auch als Vorlage für eine moderne Darstellung der Geometrie, wobei allerdings erst mal zahlreiche Lücken geschlossen werden müssen. Dazu gehören insbesondere Fragen der Anordnungen („Zwischen"-Beziehung, Pasch-Axiom, die durch Geraden bestimmten Halbebenen), Fragen der Kongruenz (die man mit Hilfe der Bewegungs-Axiome klären kann) und Fragen der Existenz von Schnittpunkten (die man mit Hilfe des Kreisaxioms oder geeigneter Vollständigkeitsaxiome beantworten kann). An dieser Stelle taucht der Begriff der „neutralen Geometrie" auf, der alles Bisherige umfasst, aber noch ohne Parallelenaxiom auskommt. Letzteres braucht man dann, um zum Beispiel den Satz über die Winkelsumme im Dreieck und den Satz des Pythagoras zu beweisen. Die Darstellung der Geometrie in diesem Kapitel ist rein ***synthetisch*** (abgesehen von kurzen Ausflügen in die analytische Welt der Modelle).

Kapitel 3 beginnt mit einem historischen Überblick über die verschiedenen Versuche, das Parallelenaxiom (Euklids Postulat V) zu beweisen, inklusive der Ergebnisse von Saccheri, der immerhin zeigen konnte, dass die Winkelsumme im Dreieck immer $\leq 180°$ beträgt. Gauß, Bolyai und Lobatschewski entdeckten als erste und fast zur gleichen Zeit, dass die Verneinung des euklidischen Parallelenaxioms ebenso auf eine in sich stimmige Geometrie führt wie die Annahme der Gültigkeit von Postulat V. Ein Teil der neu gefundenen Geometrie wird synthetisch (also allein mit Hilfe der Axiome) hergeleitet, für die vollständige Herleitung fehlte in der Vorlesung die Zeit. Am Schluss wird mit Hilfe der Geometrie von $\mathbb{C}$ ein komplettes Modell für die nichteuklidische Geometrie konstruiert, in dem sich alles berechnen lässt, so wie das im $\mathbb{R}^2$ für die euklidische Geometrie möglich ist. Im letzten Abschnitt des letzten Kapitels ist man damit wieder zur ***analytischen*** Darstellung zurückgekehrt.