Leitfaden zur „Geometrie“, Teil 2

In der Vorlesung wurde ein Axiomensystem („V“ wie „Vorlesung“) vorgestellt. Das Besondere an dem synthetischen Vorgehen besteht darin, dass man versucht, mit Hilfe von primitiven Termen und Axiomen eine mathematische Theorie quasi aus dem Nichts aufzubauen. Das ist schwierig, weil man nicht weiß, was am Ende herauskommt, und weil man sich – gerade in der Geometrie – nicht wirklich an Bildern orientieren kann.

Erst wenn man ein Modell vor sich hat (bei dem man dann natürlich erst mal testen muss, ob die fraglichen Axiome tatsächlich erfüllt sind), kann man Fragen wie die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems klären.

Die Axiome werden in Gruppen zusammengefasst:

- Inzidenz-Axiome (I-1 bis I-3, in Abschnitt 2.4)
- Anordnungsaxiome (A-1 bis zum Pasch-Axiom A-5, in Abschnitt 2.4)

  Eine wichtige Konsequenz aus den Anordnungsaxiomen ist Tatsache, dass jede Gerade zwei Halbebenen bestimmt, die beiden Seiten der Gerade. Damit ist es auch möglich, das Innere eines Winkels und das Innere eines Dreiecks zu definieren.

- Bewegungsaxiome (B-1 bis B-5, in Abschnitt 2.5)

  Wichtig ist die Existenz von Spiegelungen an Geraden, die aus den Bewegungsaxiomen abgeleitet werden kann. Jede Spiegelung vertauscht die beiden Seiten der Spiegelgerade. Translationen und Drehungen kann man aus Spiegelungen zusammenbauen. Es gibt aber keine Garantie, dass diese Transformationen so aussehen, wie man das vom $\mathbb{R}^2$ her gewohnt ist.

  Mit den Axiomengruppen I, A und B kann man schon viele wichtige und bekannte Sätze der Geometrie herleiten: Kongruenzsätze, das Abtragen von Strecken auf einem Strahl, Vergleich und Addition von Strecken und Winkeln, Sätze über gleichschenklige Dreiecke und Errichtung solcher Dreiecke über einer gegebenen Strecke, Winkelhalbierung, Streckenhalbierung, Errichten von Senkrechten und Fällen von Loten, die Dreiecksungleichung und die Konstruktion einer Parallelen zu einer gegebenen Gerade durch einen gegebenen Punkt. Ein Modell, in dem alle bisherigen Axiome erfüllt sind, ist die „pythagoräische Ebene“. Es gibt aber auch andere Modelle, z.B. den $\mathbb{R}^2$.

- Stetigkeitsaxiome (Kreis-Axiom S-1 und Archimedes-Axiom S-2, in Abschnitt 2.6)

  Das Kreis-Axiom braucht man, um alle Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen zu können. In der pythagoräischen Ebene gilt es nicht, da muss man schon zu der reichhaltigeren „euklidische Ebene“ übergehen.

  Das Archimedes-Axiom (das sowohl in der pythagoräischen als auch in der euklidischen Ebene gilt) braucht man für die Einführung der Längenmessung und später für allerlei Dinge im Zusammenhang mit der Theorie der drei Hypothesen (Kapitel 3). Die nicht-archimedische Ebene liefert ein Modell, in dem alle vorangegangenen Axiome erfüllt sind, nur nicht das Archimedes-Axiom.

  Die euklidische Ebene ist eine abzählbare Menge mit vielen Lücken. Manchmal ist das lästig, deshalb ersetzt man in moderneren Axiomensystemen gerne das Kreis-Axiom durch das Cantor-Axiom (C).

Cantor- und Archimedes-Axiom zusammen entsprechen einem der Vollständigkeitsaxiome für den Körper der reellen Zahlen. Deshalb braucht man als Modell die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$, damit diese Axiome (und alle vorhergehenden) gelten. Würde man noch das euklidische Parallelenaxiom hinzunehmen, so hätte man ein kategorisches System, das Modell (also der $\mathbb{R}^2$) wäre dann sogar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Die Gemeinschaft von Cantor- und Archimedes-Axiom kann man durch das äquivalente Dedekind-Axiom (D) ersetzen.

In der Antike und bis ins Mittelalter hinein kannte man bestenfalls S-1 und S-2 (wenn überhaupt; bei Euklid kommen solche Axiome überhaupt nicht vor). Dann entwickelte sich langsam eine intuitive Vorstellung von Stetigkeit und Vollständigkeit (wie zum Beispiel bei Saccheri). Erst in der Neuzeit wurde der Begriff der reellen Zahl präzisiert und die Vollständigkeit der reellen Zahlen auf die Geometrie übertragen (z.B. bei Hilbert).

- Unter der „Neutralen Geometrie“ versteht man die Geometrie, die durch die Inzidenz-, Anordnungs-, Bewegungs- und Stetigkeitsaxiome beschrieben wird. Vor Saccheri enthielt die neutrale Geometrie nur die Stetigkeitsaxiome S-1 und S-2, in der Vorlesung (und natürlich auch in der Klausur) darf aber – wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird – stattdessen das Dedekind-Axiom (oder äquivalente Vollständigkeitsaxiome) verwendet werden. S-1 und S-2 gelten dann ja erst recht.

- Unter dem euklidischen Parallelenaxiom (E-P) versteht man – vor allem, wenn es um die Frage der Beweisbarkeit dieses Axioms geht – das Postulat V von Euklid. Dies ist aber bekanntlich äquivalent zum Playfair-Axiom, und letzteres wird gerne im modernen Kontext gebraucht: „Zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Parallele zu g durch P.“

  Neutrale Geometrie (inkl. Dedekind) + Parallelenaxiom ergeben die euklidische Geometrie, deren einziges Modell der $\mathbb{R}^2$ ist (bis auf Isomorphie; man kann zum Beispiel den $\mathbb{R}^2$ als affine Ebene oder als 2-dimensionalen Vektorraum ansehen).

In Kapitel 3 geht es im Grunde um die Frage, ob das euklidische Parallelenaxiom unabhängig von den Axiomen der neutralen Geometrie ist.

Das Kapitel beginnt mit der Vorstellung etlicher Beweisversuche, die alle darauf hinausliefen, dass ein zu Postulat V äquivalentes Axiom gefunden wurde. Um 1100 v.Chr. entdeckte der persische Mathematiker Omar Khayyam, dass das Parallelenproblem auf die Entscheidung zwischen drei Hypothesen zurückgeführt werden kann: Bei einem Saccheri-Viereck (also einem 4-Eck $ABCD$ mit rechten Winkeln bei A und B und gleich langen Seitenlinien $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$) sind die „Gipfelwinkel“ γ und δ, die an die Gipfellinie $\overline{DC}$ anschließen, gleich groß. Es gilt die Hypothese vom spitzen, rechten oder stumpfen Winkel, je nachdem, ob diese Gipfelwinkel (immer) spitze, rechte oder stumpfe Winkel sind. Äquivalent dazu ist die Aussage, dass die Winkelsumme im Dreieck immer $< \pi$, $= \pi$ oder $> \pi$ ist.

Seit Saccheri weiß man, dass die Hypothese vom stumpfen Winkel schon innerhalb der neutralen Geometrie ausgeschlossen werden kann. Gilt die Hypothese vom rechten Winkel, so liegt die euklidische Geometrie vor. Die Hypothese vom spitzen Winkel gilt genau dann, wenn das euklidische Parallelenaxiom falsch ist, also durch seine logische Verneinung ersetzt werden muss: Es gibt eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$, so dass durch P mindestens zwei verschiedene Parallelen zu g gehen.

Erst Carl Friedrich Gauß, Johann Bolyai und Nikolai Lobatschewski gelang es, unter der Voraussetzung des obigen nichteuklidischen Parallelenaxioms (welches man das „hyperbolische Parallelenaxiom“ nennt) eine in sich konsequente Geometrie zu entwickeln, die sich sehr stark von der euklidischen Geometrie unterscheidet (obwohl mit Ausnahme des Parallelenaxioms alle Axiome der neutralen Geometrie erfüllt sind).