Leitfaden zur „Geometrie“, Teil 1

Kapitel 1 behandelt den $\mathbb{R}^2$ als Modell für die ebene euklidische Geometrie. Damit werden folgende Ziele verfolgt:

- Wiederholung der Inhalte der Schulgeometrie,
- Vorstellung von Beweisen mit Hilfe der Vektorgeometrie, die man aus LA 1 kennen sollte
- Verifikation des $\mathbb{R}^2$ als „Modell“ für die später (ab Kapitel 2) behandelte axiomatische Geometrie.

Weil die elementare Geometrie in der Schule viel früher als die Vektorrechnung behandelt wird, kennen die meisten den in Kapitel 1 eingeschlagenen Weg nicht. Das machte sich bei den Lösungen bemerkbar. Weil in der elementaren Geometrie von Punkten und Geraden die Rede ist, während man in der Vektorrechnung von Vektoren und Untervektorräumen spricht, wurde der Begriff des affinen Raumes eingeführt, der mit dem Vektorraum sehr verwandt ist, aber auf die Koordinaten-Darstellung verzichtet. Für die Beweise ist es aber angenehm, rechnen zu können, mit Koordinaten oder wenigstens mit den Gesetzen des Vektorraumes. Deshalb wird in Kapitel 1 sehr schnell der Übergang vom affinen Raum zum Vektorraum vollzogen.

Die Aufgaben (1) bis (3) und (5) haben mit dem affinen Raum zu tun, Aufgabe (4) bezieht sich allein auf Schulkenntnisse, und die Aufgaben (6) bis (12) haben allein mit Vektorrechnung zu tun. Benutzt werden darf alles, was man in LA 1 gelernt hat (und natürlich auch das, was man da hätte lernen können und sollen). **Vollkommen auf dem Holzweg** waren aber diejenigen, die glaubten, nicht in die Vorlesung gehen zu müssen, etwas in alten Skripten von mir geblättert haben und dann dachten, sie bewegen sich in der synthetischen Geometrie, die erst in Kapitel 2 angesprochen wird.

Hier ist ein Beispiel: In Aufgabe (11) soll für das Modell $\mathbb{R}^2$ die Gültigkeit des Pasch-Axioms gezeigt werden (wobei einem die volle Kraft der linearen Algebra zur Verfügung steht), während in Kapitel 2 dieses Axiom abstrakt eingeführt wird und dann mit sehr beschränkten Mitteln daraus Folgerungen gezogen werden müssen.

Zur Erinnerung: Was ist ein „Modell“ für ein Axiomensystem? Ein Axiomensystem $\mathscr{A}$ (bestehend aus primitiven Termen, Axiomen, ergänzenden Definitionen und abgeleiteten Sätzen) erschafft im Grunde eine neue Welt, unter der man sich zunächst nichts vorstellen kann. Unter Benutzung anderer, längst etablierter Axiomensysteme $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ usw. und den daraus entstandenen Theorien, von denen man in der Regel schon gewisse Vorstellungen hat, beschreibt man dann ein spezielles System, in dem alle Bedingungen von $\mathscr{A}$ erfüllt sind. Das ist sinnvoll, denn $\mathscr{A}$ erweist sich deshalb als widerspruchsfrei, und außerdem gwinnt man so eine anschauliche Vorstellung dessen, was in $\mathscr{A}$ beschrieben wird. In der Praxis läuft es manchmal umgekehrt: Man entdeckt innerhalb eines etablierten Bereiches der Mathematik eine interessante Struktur und erfindet dafür ein Axiomensystem, um sich für die weitere Arbeit von Vorurteilen zu lösen, die sich aus der Anschauung ergeben.

Aufgaben (13) und (14) handeln davon, welche Größen man – ausgehend von gewissen gegebenen Größen – mit Zirkel und Lineal konstruieren kann. Da kein Axiomensystem angegeben ist, wohl aber eine Liste von erlaubten Hilfsmitteln, ist die Aufgabe so zu verstehen, dass man mit den Mitteln der Schulgeometrie darangehen soll. Normalerweise kann man ja im Modell $\mathbb{R}^2$ alles berechnen und braucht dazu weder Zirkel noch Lineal, aber hier darf die analytische Geometrie nicht benutzt werden, nur die genannten Hilfsmittel und bekannte Sätze (wie z.B. der Satz des Pythagoras).

Aufgabe (15) (Sphäre und Großkreise) behandelt wieder ein Modell für die Geometrie und die Frage, welche Axiome erfüllt sind: Das gehört zu Kapitel 2, auf das im Folgenden noch näher eingegangen wird.

Aufgabe (16) fällt etwas aus dem Rahmen. Es geht um die Menge der reellen Zahlen und eine Version des Vollständigkeitsaxioms. Diese Aufgabe dient dazu, das Verständnis für die später zu behandelnden Stetigkeitsaxiome der Geometrie vorzubereiten.

In **Kapitel 2** beginnt die sogenannte synthetische Geometrie (im Gegensatz zur analytischen Geometrie), in der man nichts berechnet, sondern nur mit Hilfe der Axiome etwas beweist oder konstruiert.

Abschnitt 2.1 liefert eine historische Einführung in die griechische Mathematik der Antike.

Abschnitt 2.2 beginnt mit allgemeinen Bemerkungen über Axiomensysteme. Eigentlich sollte so etwas am Anfang des Mathematikstudiums stehen. Dann wird als Beispiel der Anfang der „Elemente" des Euklid vorgestellt, einem der ältesten Mathematik-Lehrbücher der Welt.

Abschnitt 2.3. enthält die ersten von Euklid bewiesenen Sätze, zum Teil mit den Original-Beweisen. Dabei wird darauf hingewiesen, wo Euklid leichte und auch schwerere Fehler begangen hat. Das von Euklids Nachfolgern am meisten kritisierte Axiom, das Parallelenpostulat, wird sich dagegen als völlig korrekt erweisen.

In Abschnitt 2.4 beginnt die Vorstellung eines modernen Systems der Geometrie. Das ist ein Wendepunkt in der Vorlesung. **Von dieser Stelle an dürfen (außer der Mengenlehre) nur noch die primitiven Terme und die Axiome des neuen Systems und die daraus gezogenen Folgerungen benutzt werden.**

Die Axiome (und die zugehörigen primitiven Terme) werden in Gruppen zusammengefasst:

- Inzidenz-Axiome
- Anordnungsaxiome (inklusive Pasch-Axiom)
- Bewegungsaxiome (die den Begriff der Kongruenz regeln)
- Stetigkeitsaxiome
- das Parallelenaxiom

Der Aufbau der Geometrie aus diesen Grunddaten, mit Hilfe logisch hergeleiteter Sätze, folgt – soweit das möglich ist – den „Elementen" des Euklid, weicht aber gelegentlich bei der Reihenfolge und häufig bei den einzelnen Beweisführungen von Euklid ab, denn es sollen ja die Fehler korrigiert werden. Am Ende sollte natürlich die Geometrie herauskommen, für die in Kapitel 1 ein Modell vorgestellt wurde. Das wird dann aber gar nicht mehr im einzelnen nachvollzogen, stattdessen wird dem langen Weg nachgespürt, den man beschreiten muss, wenn man auf das Parallelenaxiom verzichtet, bzw. es durch ein anderes Axiom ersetzt. Historisch hat es 2000 Jahre gedauert, bis man so zu einer „nichteuklidischen Geometrie" kam, die der euklidischen ebenbürtig ist, aber doch ganz anders aussieht.

Details zu den Abschnitten und Kapiteln jenseits von 2.4 werden in einem weiteren Leitfaden näher besprochen werden.