Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 9** **Prof. Fritzsche**

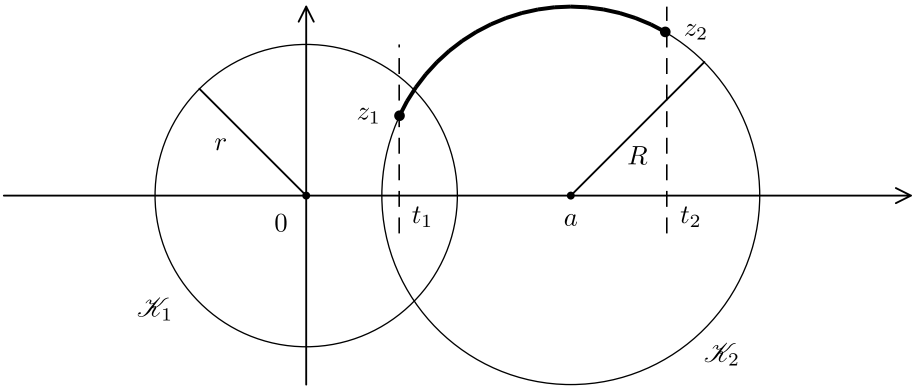
Lösung zu Afg. 27:

a) z liegt genau dann auf dem Kreis $\mathscr{K}$ um u mit Radius r, wenn $|z-u|=r$ ist, und es gilt:

$$\begin{aligned} |z-u|=r &\iff (z-u)(\overline{z}-\overline{u})=r^2 \\ &\iff z\overline{z}-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}=r^2 \\ &\iff z\overline{z}+cz+\overline{cz}+\delta=0, \end{aligned}$$

mit $c:=-\overline{u}$ und $\delta:=u\overline{u}-r^2$.

b) Es soll gezeigt werden, dass sich zwei Kreise unter bestimmten Bedingungen schneiden. Man kann annehmen, dass die Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen und einer davon der Nullpunkt ist. Es sei $\mathscr{K}_1 := \{z\,:\,|z|=r\}$ und $\mathscr{K}_2 := \{z\,:\,|z-a|=R\}$, mit $r,R,a>0$. Vorausgesetzt sei, dass $\mathscr{K}_2$ einen Punkt im Innern und einen Punkt im Äußeren von $\mathscr{K}_1$ besitzt.



Ein Kreis ist sehr symmetrisch: Ist $z=x+\mathrm{i}\,y\in\mathscr{K}_2$ (mit $x=a-\delta$), so liegt auch $\overline{z}=x-\mathrm{i}\,y\in\mathscr{K}_2$ und $z^*:=(a+\delta)+\mathrm{i}\,y\in\mathscr{K}_2$, denn es ist

$$|z^*-a|=|(a+\delta)+\mathrm{i}\,y-a|=|\delta+\mathrm{i}\,y|=|(a-\delta)-\mathrm{i}\,y-a|=|\overline{z}-a|=|z-a|.$$

Außerdem gilt: Liegt z im Innern des Kreises $\mathscr{K}_1$, so auch $\overline{z}$. Liegt z im Äußeren von $\mathscr{K}_1$, so auch $\overline{z}$ und z^*.

Ist $z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1\in\mathscr{K}_2$ ein Punkt im Innern von $\mathscr{K}_1$, so muss $x_1<r<a$ sein, und man kann annehmen, dass $y_1>0$ ist. Ist $z_2=x_2+\mathrm{i}\,y_2\in\mathscr{K}_2$ ein Punkt im äußeren von $\mathscr{K}_1$, so kann man annehmen, dass $x_2>a$ und $y_2>0$ ist.

Sei $\Phi:[x_1-a,x_2-a]\to\mathbb{C}$ definiert durch $\Phi(t):=(a+t)+\mathrm{i}\,\sqrt{R^2-t^2}$. Dann parametrisiert Φ den Kreis zwischen z_1 und z_2 (denn es ist $\Phi(x_1-a)=z_1$ und $\Phi(x_2-a)=z_2$, sowie $\big((a+t)-a\big)^2+(R^2-t^2)=R^2$, also $\Phi(t)\in\mathscr{K}_2$).

Die Funktion $f(t):=|\Phi(t)|^2-r^2$ ist auf $[x_1-a,x_2-a]$ stetig, und sie misst, ob $\Phi(t)$ vom Nullpunkt um weniger oder mehr als r entfernt ist. Es ist $f(x_1-a)<0$ (weil z_1 im Innern von $\mathscr{K}_1$ liegt) und $f(x_2-a)>0$ (weil z_2 im Äußeren von $\mathscr{K}_1$ liegt). Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass es ein $t\in[x_1-a,x_2-a]$ mit $f(t)=0$ gibt. Aber dann ist $\Phi(t)\in\mathscr{K}_1\cap\mathscr{K}_2$. Aus Symmetriegründen bekommt man das Spiegelbild $\overline{\Phi(t)}$ als zweiten Schnittpunkt.

Lösung zu Afg. 28: Antworten:

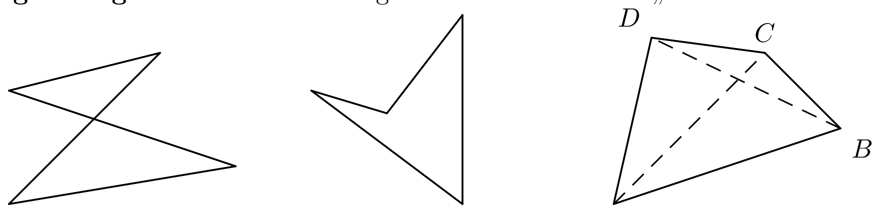
a) Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome gelten in der pythagoräischen Ebene, nicht aber das Kreisaxiom. (In der euklidischen Ebene, und erst recht im $\mathbb{R}^2$ gelten alle Axiome).

b) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist ein Punkt M mit $A - M - B$ und $\overline{AM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MB}$. (Die Existenz dieses Punktes ist damit aber noch nicht gesichert.)

c) Sei $P \in g$. Man kann sagen: X und Y liegen auf verschiedenen Seiten von P, falls $X - P - Y$ gilt. X und Y liegen auf der gleichen Seite von P, falls X und Y nicht auf verschiedenen Seiten liegen oder gleich sind. Damit wird eine Äquivalenzrelation auf $g \setminus \{P\}$ eingeführt (das braucht hier aber nicht bewiesen zu werden).

d) Die Existenz der Mittelsenkrechten (und damit auch die Spiegelung daran) kann erst mit Hilfe der Eindeutigkeit der Strecken-Abtragung (und deshalb nach Einführung des Axioms (B.4)) bewiesen werden.

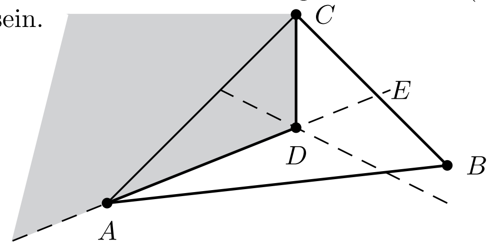
Lösung zu Afg. 29: Zunächst einige Skizzen zum Thema „Viereck“:



kein Viereck Viereck, nicht konvex konvexes Viereck

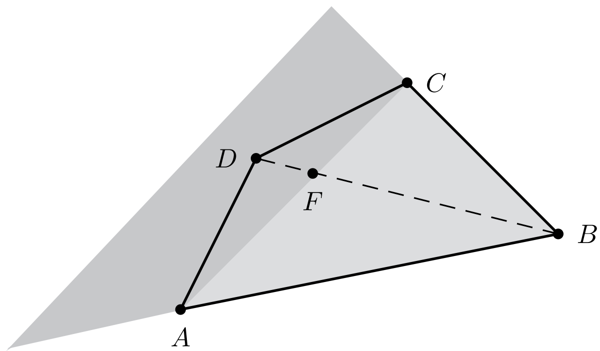
Behauptung: D liegt nicht im Innern des Dreiecks ABC.

Annahme, D liegt im Innern des Dreiecks ABC. Der Winkel $\angle DAB$ ist dann kleiner als der Winkel $\angle CAB$, also kleiner als zwei Rechte. Außerdem schneidet der Strahl $\overrightarrow{AD}$ die gegenüberliegende Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt E (nach einem Satz aus der Vorlesung). Wegen $B - E - C$ liegen B und C auf verschiedenen Seiten von AD. Also liegt C nicht in $I(\angle DAB) = \mathscr{H}(AD, B) \cap \mathscr{H}(AB, D)$. Das kann nicht sein.



Auch keine der anderen Ecken liegt in dem aus den restlichen drei Ecken gebildeten Dreieck.

Weil D also **nicht** im Innern des Dreiecks ABC liegt, wohl aber im Innern von $\angle ABC$, liegt D nicht in $\mathscr{H}(AC, B)$. Das bedeutet, dass D und B auf verschiedenen Seiten von AC liegen.



Also treffen sich $\overline{DB}$ und AC in einem Punkt F. Dann gilt $D - F - B$, und weil der Strahl $\overrightarrow{BD}$ im Innern von $\angle ABC$ verläuft, muss auch $A - F - C$ gelten, d.h., es ist $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{F\}$.