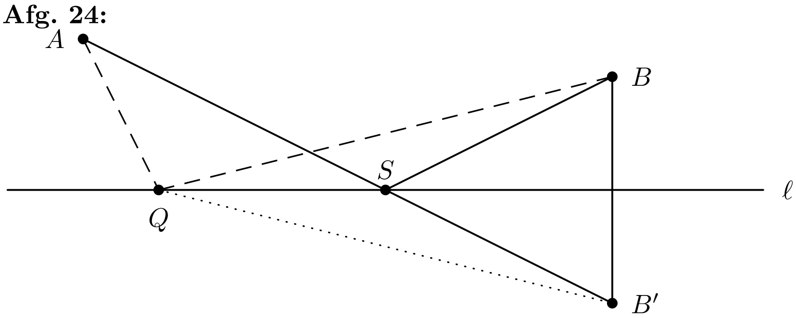
Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 8** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 24:



Sei φ die Spiegelung an ℓ, $B' := \varphi(B)$. Weil B und B' auf verschiedenen Seiten von ℓ liegen, schneidet $\overline{AB'}$ die Gerade ℓ in einem Punkt S. Für den Bauern wird der Weg vorgeschlagen, der sich aus den Strecken $\overline{AS}$ und $\overline{SB}$ zusammensetzt.

Beh.: Ist $Q \in \ell$, $Q \neq S$, so ist $\overline{AQ} + \overline{QB} > \overline{AS} + \overline{SB}$.

Beweis dafür: Weil φ eine Bewegung ist, sowie $\varphi(Q) = Q$ (Spiegelung an ℓ) und $\varphi(B) = B'$, ist $\overline{QB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{QB'}$. Daraus folgt:

$$\overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AQ} + \overline{QB'}.$$

Weil außerdem $\overline{SB} = \overline{SB'}$ ist, folgt:

$$\overline{AS} + \overline{SB} = \overline{AS} + \overline{SB'} = \overline{AB'} < \overline{AQ} + \overline{QB'} = \overline{AQ} + \overline{QB}.$$

Dabei gilt das $<$-Zeichen aufgrund der Dreiecks-Ungleichung im Dreieck AQB' (Satz der neutralen Geometrie).

Lösung zu Afg. 25: Sei $\ell = X_1X_2$. Weil $\varphi(X_1) = X_1$ und $\varphi(X_2) = X_2$ ist, bildet φ die Gerade ℓ auf sich ab, aber auch (zum Beispiel) den Strahl $\overrightarrow{X_1X_2}$ auf sich.

Nun sei ein Punkt $P \in \mathscr{E} \setminus \ell$ beliebig gewählt und $Q := \varphi(P)$. Nach Axiom (B.3) gibt es genau eine Bewegung $\psi \in \mathscr{B}$ mit $\psi(X_1) = X_1$, $\psi(X_2) \in \overrightarrow{X_1X_2}$ und $\psi(P) \in \mathscr{H}(\ell, Q)$. Deshalb muss $\psi = \varphi$ sein. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Liegen P und Q auf der gleichen Seite von ℓ, so ist $\varphi = \psi = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$

b) Liegen P und Q auf verschiedenen Seiten von ℓ, so muss $\varphi = \psi$ die Spiegelung an ℓ sein.

Zusatzaufgabe: Für die Fixpunktmenge einer Bewegung φ gibt es folgende Möglichkeiten:

- Enthält $\mathrm{Fix}(\varphi)$ wenigstens drei nicht-kollineare Punkte A, B und C, so ist $\varphi(A) = A$, $\varphi(B) = B \in \overrightarrow{AB}$ und $\varphi(C) = C \in \mathscr{H}(AB, C)$. Nach Axiom (B.3) muss φ dann schon die Identität sein, also $\mathrm{Fix}(\varphi) = \mathscr{E}$ die ganze Ebene.
- Enthält $\mathrm{Fix}(\varphi)$ wenigstens zwei Punkte $X_1 \neq X_2$ und ist $\varphi \neq \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$, so muss φ nach den obigen Überlegungen die Spiegelung an der Geraden $\ell = X_1X_2$ sein, also $\mathrm{Fix}(\varphi) = \ell$ eine Gerade.
- $\mathrm{Fix}(\varphi)$ könnte aus einem einzelnen Punkt bestehen. Gibt es dazu eine passende Bewegung? Die Aufgabenstellung in Aufgabe 26 lässt das vermuten.

$P \in \mathscr{E}$ sei ein fester Punkt, $g \neq h$ seien zwei Geraden mit $g \cap h = \{P\}$. Weiter seien μ und λ die Spiegelungen an diesen Geraden, sowie $\varphi := \mu \circ \lambda$. Dann ist φ eine Bewegung und $\varphi(P) = P$, also $P \in \operatorname{Fix}(\varphi)$.

Annahme, es gibt noch einen Punkt $Q \neq P$ mit $\varphi(Q) = Q$. Dann ist

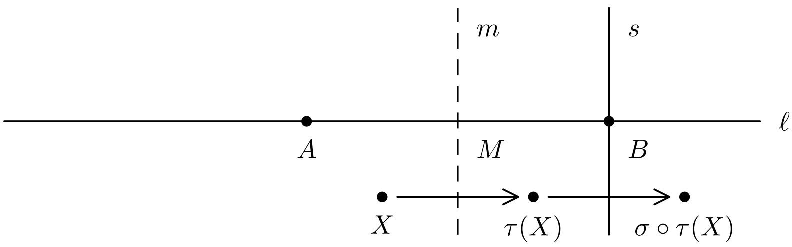
$$\lambda(Q) = \mu^{-1}(Q) \quad \text{und} \quad \lambda(P) = \mu^{-1}(P).$$

Das bedeutet, dass die beiden Spiegelungen λ und μ^{-1} jeweils die Gerade PQ auf sich abbilden, und dann muss PQ sowohl für λ als auch für μ^{-1} (und damit für μ) die Spiegelachse sein. Damit ist aber $\lambda = \mu$, im Widerspruch zur Annahme. Also besteht $\operatorname{Fix}(\varphi) = \{P\}$ tatsächlich aus einem einzelnen Punkt. Solche Bewegungen nennt man „Drehungen“.

- Als letztes bleibt noch die Möglichkeit, dass $\operatorname{Fix}(\varphi) = \varnothing$ ist. Gibt es eine solche Bewegung?

Es bietet sich eine Translation an, aber wie soll man die im axiomatischen Umfeld beschreiben? Es stehen keine Koordinaten zur Verfügung, und auch nicht das Parallelenaxiom. Wenn φ so etwas wie eine Translation ist und den Punkt A auf den Punkt B abbildet, dann bildet φ die Gerade $\ell = AB$ auf sich ab, und von jeder Geraden ℓ', die zu ℓ parallel ist, erwartet man ebenfalls, dass sie durch φ auf sich abgebildet wird.

Sei also ℓ die Gerade durch zwei gegebene Punkte A und B, m die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ und s die Senkrechte zu ℓ im Punkt B. Sodann sei $\varphi := \sigma \circ \tau$, wobei τ die Spiegelung an m und σ die Spiegelung an s ist.



Speziell ist $\varphi(A) = \sigma \circ \tau(A) = \sigma(B) = B$, also $\varphi \neq \operatorname{id}_{\mathscr{E}}$.

Annahme, φ hat einen Fixpunkt X_0. Dann ist

$$\sigma \circ \tau(X_0) = X_0, \quad \text{also} \quad \tau(X_0) = \sigma^{-1}(X_0) = \sigma(X_0) =: Y_0.$$

Wäre $Y_0 = X_0$, so wäre X_0 gleichzeitig Fixpunkt von σ und von τ, also ein Element von $m \cap s$. Das ist nicht möglich, weil m und s parallel sind (würden sich m und s treffen, so würde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen).

Wäre $Y_0 \neq X_0$, so wäre die Mittelsenkrechte von $\overline{X_0Y_0}$ die Spiegelachse von σ und von τ. Dann wäre $\sigma = \tau$ und damit $\varphi = \sigma \circ \tau = \sigma \circ \tau^{-1} = \operatorname{id}_{\mathscr{E}}$. Das ist aber gerade ausgeschlossen.

Also besitzt φ keinen Fixpunkt.

Lösung zu Afg. 26:

1) Aus den Beziehungen $X - P - \varphi(X)$ und $\varphi(P) = P$ folgt: $\varphi(X) - P - \varphi \circ \varphi(X)$. Damit liegen X und $\varphi \circ \varphi(X)$ auf der gleichen Seite von P (auf der Geraden $g = PX$), also $\varphi \circ \varphi(X) \in \overrightarrow{PX}$. Offensichtlich ist $\overline{PX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{P\varphi \circ \varphi(X)}$, und wegen des Satzes von der Eindeutigkeit der Strecken-Abtragung ist $\varphi \circ \varphi(X) = X$.

2) Es seien φ und ψ zwei Bewegungen mit $\operatorname{Fix}(\varphi) = \operatorname{Fix}(\psi) = \{P\}$. Außerdem gelte $X - P - \varphi(X)$ und $X - P - \psi(X)$ für alle $X \neq P$. Dann ist $\overline{P\psi(X)} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{P\varphi(X)}$, und $\varphi(X)$ und $\psi(X)$

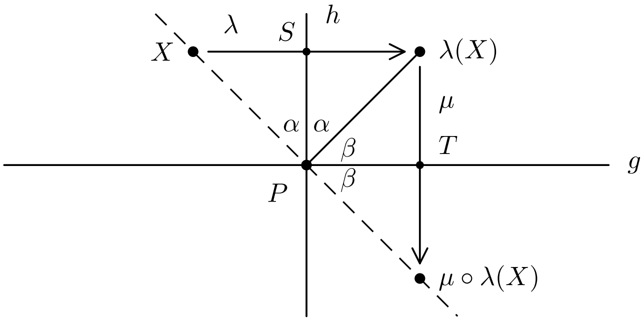
liegen beide auf der Geraden PX und genauer auf demjenigen in P beginnenden Strahl auf PX, der P nicht enthält. Wieder folgt mit dem Satz von der Eindeutigkeit der Strecken-Abtragung, dass $\varphi(X) = \psi(X)$ ist.

3) Sei $\ell \subset \mathscr{E}$ eine beliebige Gerade. Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) Liegt P auf ℓ, so gilt für $X \in \ell\colon \ell = PX$ und $X - P - \varphi(X)$, also $\varphi(X) \in \ell$. Damit ist $\varphi(\ell) = \ell$ und somit $\varphi(\ell)$ „parallel" zu ℓ.

b) P liege nun nicht auf ℓ. **Annahme**, es gibt ein $Q \in \ell \cap \varphi(\ell)$, aber es ist $\varphi(\ell) \neq \ell$. Dann liegt $\varphi(Q)$ in $\varphi(\ell) \cap \varphi \circ \varphi(\ell) = \varphi(\ell) \cap \ell = \{Q\}$, und es ist $\varphi(Q) = Q$, also $Q \neq P$ ein Fixpunkt von φ. Das kann nicht sein, $\varphi(\ell)$ ist parallel zu ℓ.

4) Seien g und h zwei Geraden, die sich in P unter einem rechten Winkel treffen, μ und λ die jeweiligen Spiegelungen an diesen Geraden. Außerdem sei $\psi := \mu \circ \lambda$



Zunächst soll gezeigt werden, dass ψ genau einen Fixpunkt hat:

Offensichtlich ist $\psi(P) = P$. Sei $X \in \mathscr{E} \setminus \{P\}$ beliebig. Liegt X auf h, so liegt $\psi(X) = \mu(X)$ auf der anderen Seite von g, ist also $\neq X$. Liegt X auf g, so auch $\lambda(X)$, allerdings auf der anderen Seite von h, und μ ändert daran nichts mehr. Also ist auch in diesem Fall $\psi(X) \neq X$. Die Geraden g und h teilen die Ebene in vier „Quadranten". Liegt X in einem dieser Quadranten, so schickt ψ den Punkt in den gegenüberliegenden Quadranten (wie man sich leicht über die Eigenschaften der Spiegelungen überlegt). Damit ist klar: $\mathrm{Fix}(\psi) = \{P\}$.

Nun geht es darum, die Beziehung $X - P - \psi(X)$ für alle $X \neq P$ zu beweisen:

Wenn X auf g oder h liegt, sieht man das sofort. Sei also X ein Punkt in einem der 4 Quadranten. Die Strecke $\overline{X\lambda(X)}$ trifft h in einem Punkt S (weil λ die Spiegelung an h ist), die Dreiecke XPS und $SP\lambda(X)$ sind kongruent (SSS). Also ist $\angle XPS = \angle SP\lambda(X) =: \alpha$.

Die Strecke $\overline{\lambda(X)\mu \circ \lambda(X)}$ trifft g in einem Punkt T. Hier sind nun die Dreiecke $PT\lambda(X)$ und $PT\mu \circ \lambda(X)$ kongruent, und deshalb ist $\angle\lambda(X)PT = \angle TP\mu \circ \lambda(X) =: \beta$. Weil die Geraden g und h bei P aufeinander senkrecht stehen, ist $\alpha + \beta = R$ ein rechter Winkel, und damit ist $2\alpha + 2\beta = 2R$. Das bedeutet, dass $\angle XP\lambda(X)$ und $\angle\lambda(X)P\mu \circ \lambda(X)$ Nebenwinkel sind. Damit liegen X, P und $\psi(X) = \mu \circ \lambda(X)$ auf einer Geraden, und es gilt $X - P - \psi(X)$.

Weil die hier betrachtete Bewegung durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, ist $\psi = \varphi$.

Anmerkungen: Die Skizze ist nicht optimal, weil sie suggeriert, dass $\alpha = \beta$ ist. Das braucht natürlich nicht der Fall zu sein. Für die 3 Punkte für Teil 4 der Aufgabe erwarte ich auch nur die oben dargestellte (oder eine andere brauchbare) Idee, es müssen nicht unbedingt alle Details komplett ausgeführt worden sein.