Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 7** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 23: (A) a) Eine Menge $\mathscr{M}$ ist konvex, wenn mit zwei Punkten stets auch deren Verbindungsstrecke in $\mathscr{M}$ enthalten ist.

Seien also zwei Punkte $z_1 = z_0 + u_1 v$ und $z_2 = z_0 + u_2 v$ in $\mathscr{H}_+$ gegeben. Dann ist $y_1 := \mathrm{Im}(u_1) > 0$ und $y_2 := \mathrm{Im}(u_2) > 0$. Ein Punkt auf der Verbindungsstrecke von z_1 und z_2 hat die Gestalt

$$\begin{aligned}(1-t)z_1 + tz_2 &= z_1 + t(z_2 - z_1) = z_0 + u_1 v + t(u_2 - u_1)v \\ &= z_0 + v \cdot \big((1-t)u_1 + tu_2\big) \\ &= z_0 + v \cdot \big(\mathrm{Re}((1-t)u_1 + tu_2) + \mathrm{i}\,((1-t)y_1 + ty_2)\big).\end{aligned}$$

Ist $0 < t < 1$, so ist auch $0 < 1 - t < 1$. Weil $y_1 > 0$ und $y_2 > 0$ ist, ist auch $(1-t)y_1 + ty_2 > 0$. Das bedeutet, dass $(1-t)z_1 + tz_2$ in $\mathscr{H}_+$ liegt. Also ist $\mathscr{H}_+$ konvex.

$\mathscr{H}_+$, $\mathscr{H}_-$ und L sind natürlich Teilmengen von $\mathbb{C}$. Sei umgekehrt $z \in \mathbb{C}$ beliebig vorgegeben. Setzt man $u := (z - z_0)/v$, so ist $z = z_0 + uv$. Es gibt nun die drei Möglichkeiten: $\mathrm{Im}(u) > 0$, $\mathrm{Im}(u) < 0$ oder $\mathrm{Im}(u) = 0$. Das bedeutet, dass z in $\mathscr{H}_+ \cup \mathscr{H}_- \cup L$ liegt.

b) Sei $z_1 \in \mathscr{H}_+$ und $z_2 \in \mathscr{H}_-$. In (a) wurde schon ausgerechnet, wie ein Punkt z auf der Verbindungsstrecke von z_1 und z_2 aussieht. Der Punkt $z = z_t = (1-t)z_1 + tz_2$ liegt genau dann auf L, wenn $y_1 - t(y_1 - y_2) = (1-t)y_1 + ty_2 = 0$ ist, und das gilt genau dann, wenn $t = y_1/(y_1 - y_2)$ ist. Weil $y_1 > 0$ und $y_2 < 0$ ist, ist $0 < t = y_1/(y_1 + |y_2|) < y_1/y_1 = 1$. Also liegt dieser Punkt z_t tatsächlich zwischen z_1 und z_2.

(B) Die Axiome (B.1) bis (B.5) finden sich in der Vorlesung und werden hier deshalb nicht noch mal zitiert.

1) Axiom (B.1) (Gruppeneigenschaft):

$\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ kann man als Translation T_0 auffassen. Weiter gilt: Die Translationen bilden eine additive Gruppe, die Drehungen eine multiplikative Gruppe und $\{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, S\}$ bildet ebenfalls eine Gruppe. Bewegungen sind Abbildungen der Gestalt $f = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ mit Elementen f_i aus den genannten Gruppen. Offensichtlich ist die Verknüpfung zweier solcher Abbildungen wieder von dieser Gestalt, und auch die Umkehrung einer solcher Abbildung ist von dieser Gestalt. Also bildet auch die Gesamtheit aller Bewegungen eine Gruppe.

Man beachte, dass man hier z.B. auch negative Winkel zulässt, die es im euklidischen Axiomensystem eigentlich nicht gibt.

2) Axiom (B.2) (Respektierung der Zwischen-Beziehung):

Sei $\alpha(t) := z_0 + t(z_1 - z_0)$ die Parametrisierung einer Geraden g in $\mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\alpha(t) + a &= (z_0 + a) + t\big((z_1 + a) - (z_0 + a)\big), \\ e^{\mathrm{i}\theta}\alpha(t) &= (e^{\mathrm{i}\theta} z_0) + t\big((e^{\mathrm{i}\theta} z_1) - (e^{\mathrm{i}\theta} z_0)\big) \\ \text{und} \quad \overline{\alpha(t)} &= \overline{z}_0 + t(\overline{z}_1 - \overline{z}_0).\end{aligned}$$

Ist $0 < t < 1$, so liegt $\alpha(t)$ zwischen z_0 und z_1. Wie man sieht, liegt dann auch $\varphi(\alpha(t))$ zwischen $\varphi(z_0)$ und $\varphi(z_1)$, wenn φ eine der drei Standard-Bewegungen (Translation, Drehung um 0 oder Spiegelung an der reellen Achse) ist. Offensichtlich gilt es deshalb auch für beliebige Bewegungen.

3) Axiom (B-3): Gegeben seien drei nicht kollineare Punkte z_1, z_2, z_3 und drei andere, ebenfalls nicht kollineare Punkte w_1, w_2, w_3.

a) Die Translation $T(z) := z + w_1 - z_1$ bildet z_1 auf w_1 ab. Also kann man o.B.d.A. annehmen, dass $w_1 = z_1 = 0$ ist.
b) Sei $z_2 = |z_2|\, e^{\mathrm{i}\,\theta}$ und $w_2 = |w_2|\, e^{\mathrm{i}\,\lambda}$. Dann bildet die Drehung $R(z) := e^{\mathrm{i}\,(\lambda-\theta)}z$ den Punkt z_2 auf einen Punkt $z_2' \in \overrightarrow{w_1 w_2}$ ab. Also sei o.B.d.A. $w_2 \in \mathbb{R}$ und $z_2 = x w_2$ mit reellem $x > 0$.
c) Haben die Imaginärteile von z_3 und w_3 verschiedenes Vorzeichen, so wende man noch die Spiegelung S an. Danach liegen w_3 und das Bild von z_3 in der gleichen Halbebene bezüglich der reellen Achse.

Die Eindeutigkeit ist etwas schwerer zu beweisen. Hilfreich ist es, $\mathbb{C}$ mit dem $\mathbb{R}^2$ zu identifizieren (vermöge $x + \mathrm{i}\,y \mapsto (x, y)$). Jede Bewegung in $\mathbb{C}$ ist eine Isometrie, denn es ist $|(z + z_0) - (w + z_0)| = |z - w|$, $|e^{\mathrm{i}\,\theta}z - e^{\mathrm{i}\,\theta}w| = |z - w|$ und $|\overline{z} - \overline{w}| = |z - w|$. Jede Isometrie des $\mathbb{R}^2$ besteht aus einer Translation und einer orthogonalen Transformation. Und jede orthogonale 2×2-Matrix A (mit $A^\top \cdot A = E_2$) hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ \varepsilon b & \varepsilon a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \text{ und } \varepsilon^2 = 1.$$

Deshalb hat jede Bewegung in $\mathbb{C}$ die Gestalt $\varphi(z) = z_0 + \sigma\big(e^{\mathrm{i}\,t}z\big)$, wobei σ die Identität oder die Konjugation ist. Wenn φ den Nullpunkt auf den Nullpunkt, eine positive reelle Zahl auf eine ebensolche und einen Punkt der oberen Halbebene in die obere Halbebene abbildet, dann muss $z_0 = 0$, $e^{\mathrm{i}\,t}$ reell und > 0 und $\sigma = \mathrm{id}$ sein, also auch $\varphi = \mathrm{id}$.

Es seien nun drei nicht-kollineare Punkte A, B, C und drei weitere nicht-kollineare Punkte O, P, Q gegeben. Die schon bewiesene Existenzaussage zeigt, dass es eine feste Bewegung φ_1 gibt, die 0 auf A, ein $r > 0$ auf B und ein z mit $\mathrm{Im}(z) > 0$ auf C abbildet, sowie eine feste Bewegung φ_2, die 0 auf O, ein $s > 0$ auf P und ein w mit $\mathrm{Im}(w) > 0$ auf Q abbildet.

Ist nun ψ eine Bewegung, die A, B, C auf O, P, Q abbildet, so bildet $\varphi = \varphi_2^{-1} \circ \psi \circ \varphi_1$ die Punkte 0, r und z auf 0, s und w ab. Wie oben festgestellt wurde, ist dann automatisch $\varphi = \mathrm{id}$ und deshalb $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Das zeigt, dass ψ eindeutig bestimmt ist.

4) Axiom (B-4): Sind Punkte $a \neq b$ gegeben, so kann man wegen (3) o.B.d.A. annehmen, dass $a = 0$ und b reell und > 0 ist. Dann bildet $B(z) := b - \overline{z}$ den Punkt $a = 0$ auf b und den Punkt b auf a ab. B ist die Spiegelung an der Geraden $x = b/2$ und setzt sich zusammen aus einer Translation und der Spiegelung $z \mapsto -\overline{z}$ an der y-Achse.

5) Axiom (B-5): Ist ein Winkel $\angle BAC$ gegeben, so kann man annehmen, dass $A = 0$, $B = b > 0$ reell und $C = r\, e^{\mathrm{i}\,\theta}$ mit $r > 0$ und $0 < \theta < \pi$ ist. Dann bildet $D(z) := e^{\mathrm{i}\,\theta}\overline{z}$ den Punkt A auf A, den Strahl $\overrightarrow{AB} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 0\}$ auf den Strahl $\overrightarrow{AC}$ und den Strahl $\overrightarrow{AC} = \{\varrho\, e^{\mathrm{i}\,\theta} \,:\, \varrho \geq 0\}$ auf $\overrightarrow{AB}$ ab, denn es ist $D\Big(\varrho e^{\mathrm{i}\,\theta}\Big) = e^{\mathrm{i}\,\theta} \cdot \varrho \cdot e^{-\mathrm{i}\,\theta} = \varrho$.