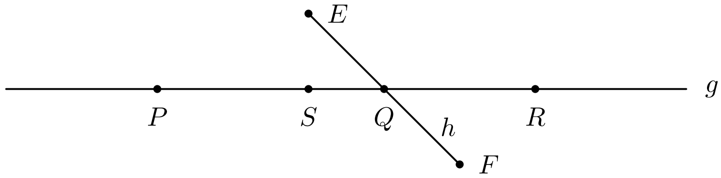
Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 6** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 20: Sei $P - Q - R$ und $P - S - Q$. Es soll die Aussage $S - Q - R$ gezeigt werden.

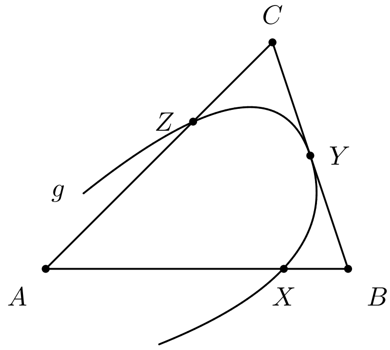


Es gibt einen Punkt $E \notin g$ und dann einen Punkt F mit $E - Q - F$. Sei $h := EF$. Wegen $P - Q - R$ und $h \cap g = \{Q\}$ liegen P und R auf verschiedenen Seiten von h. Irgendwie muss man herausfinden, dass auch S und R auf verschiedenen Seiten von h liegen. Dazu reicht es zu zeigen, dass P und S auf der gleichen Seite von h liegen.

Annahme: P und S liegen auf verschiedenen Seiten von h. Dann gibt es einen Punkt Y mit $\overline{PS} \cap h = \{Y\}$. Weil $PS = g$ und $g \cap h = \{Q\}$ ist, folgt: $Y = Q$, also $P - Q - S$. Das steht im Widerspruch zur Beziehung $P - S - Q$. Also ist die Annahme falsch.

Da P und R auf verschiedenen Seiten von h und P und S auf der gleichen Seite von h liegen, liegen S und R auf verschiedenen Seiten von h. Nun ist $SR = g$ und $g \cap h = \{Q\}$. Also gilt $S - Q - R$. Das war zu zeigen.

Lösung zu Afg. 21: A, B, C bilden ein Dreieck. Auf den Seiten der Dreiecke liegen die Punkte X, Y, Z (die mit keiner der Ecken übereinstimmen). Annahme, X, Y, Z liegen auf einer Geraden g.



Die Skizze sieht absurd aus, aber das reicht nicht als Beweis. Man muss mit Hilfe von Axiomen und Sätzen der Vorlesung zeigen, dass eine solche absurde Situation nicht auftreten kann (denn andernfalls müsste man an dieser Stelle seine anschauliche Vorstellung von der Geometrie komplett revidieren).

Aus der Voraussetzung folgt, dass die Punkte X, Y, Z paarweise verschieden sind, und aus der Annahme folgt, dass einer der drei Punkte zwischen den beiden anderen liegen muss. O.B.d.A. gelte $X - Y - Z$.

Sei $h = BC$. Dann liegen A, X und Z nicht auf h (zum Beispiel liegen A und X nicht auf h, weil sie auf AB liegen und $\neq B$ sind, aber $AB \cap h = \{B\}$ ist). Es ist $h \cap \overline{XZ} = \{Y\}$, und die Anwendung des Pasch-Axioms auf das Dreieck AXZ und die Gerade h ergibt:

$$h \cap \overline{AX} \neq \varnothing \quad \text{oder} \quad h \cap \overline{AZ} \neq \varnothing.$$

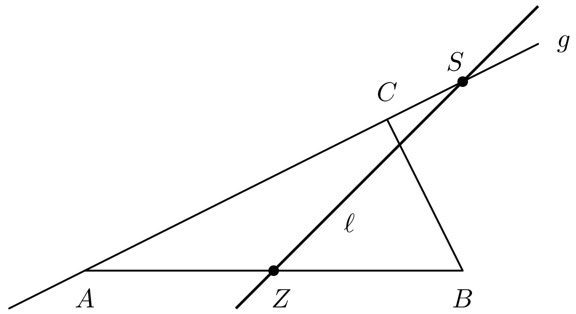
Weil $h \cap AX = \{B\}$ und $A - X - B$ gilt, kann h die Strecke $\overline{AX}$ nicht treffen. Und weil $h \cap AZ = \{C\}$ und $A - Z - C$ gilt, kann h auch die Strecke $\overline{AZ}$ nicht treffen. Die Annahme war also falsch.

Lösung zu Afg. 22: Gegeben sei ein Dreieck ABC und eine Gerade ℓ, die nicht durch A, B oder C geht. Außerdem sei $\overline{AB} \cap \ell \neq \varnothing$. Mit Hilfe der Bedingung (P^*) soll dann gezeigt werden, dass $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$ oder $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$ ist. Aufgrund der Bedingung (P^*) kann man jederzeit von den beiden verschiedenen Seiten einer Geraden sprechen. Liegen zwei Punkte auf der gleichen Seite, so trifft ihre Verbindungsstrecke die Gerade nicht.

1. Fall: ℓ trifft die Gerade $g := AC$ in einem Punkt S. Dann ist $S \neq A$ und $S \neq C$. Man hat nun drei Möglichkeiten zu unterscheiden.

a) Gilt $A - S - C$, so ist $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$, und man ist schon fertig.

b) Gilt $A - C - S$, so liegen A und C auf der gleichen Seite von ℓ, während A und B auf verschiedenen Seiten liegen.



Also liegen B und C auf verschiedenen Seiten von ℓ, und dann ist $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$.

c) Gilt $S - A - C$, so liegen A und C auf der gleichen Seite von ℓ, während A und B auf verschiedenen Seiten von ℓ liegen. Also liegen auch C und B auf verschiedenen Seiten von ℓ, und es ist $\overline{CB} \cap \ell \neq \varnothing$.

2. Fall: ℓ ist parallel zu g. Dann liegen A und C auf der gleichen Seite von ℓ, aber A und B auf verschiedenen Seiten. Das bedeutet, dass $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$ ist.