Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 5** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 17:

Zur Gültigkeit von **Axiom (I.1):** „Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade“.

Gegeben seien zwei Punkte $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Ist $x_1 = x_2$, so gibt es genau eine vertikale Gerade, die diese Punkte miteinander verbindet, und die anderen Geraden tun es nicht.

Ist $x_1 < x_2$, so unterscheidet man zwei Fälle:

a) Ist $y_1 \geq y_2$, so kann man die Punkte mit genau einer Geraden vom Typ $g_f(m, b)$ verbinden:

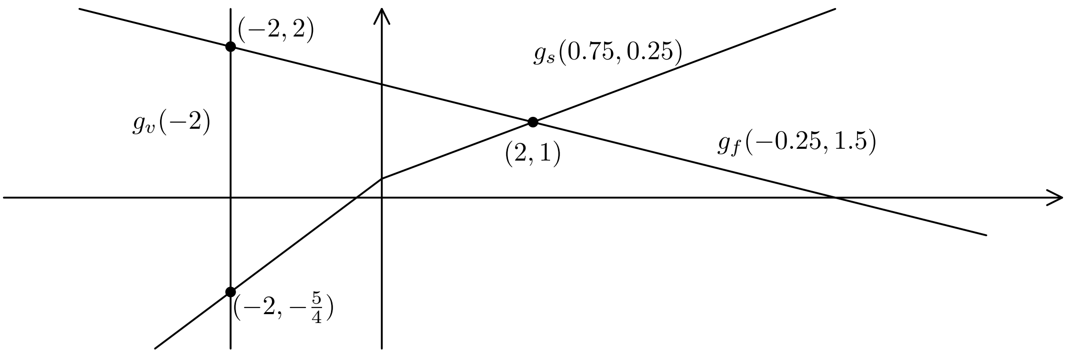
$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2).$$

b) Ist $y_1 < y_2$ und $x_1 < 0 < x_2$, so braucht man eine geknickte Gerade. Dafür erhält man die beiden Bestimmungsgleichungen $y_1 = mx_1 + b$ und $y_2 = (m/2)x_2 + b$ und daraus

$$b = \frac{2x_1y_2 - x_2y_1}{2x_1 - x_2} \quad \text{und} \quad m = \frac{2(y_1 - y_2)}{2x_1 - x_2}.$$

Ist $x_1 < x_2 < 0$ oder $0 < x_1 < x_2$, so verbinde man die Punkte mit einer klassischen Geraden und knicke diese an der y-Achse.

Ist schließlich $x_1 > x_2$, so vertausche man die Punkte.



Zur Gültigkeit von **Axiom (I.2:** „Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte“.

Auf $g_v(c)$ liegen $(c, 0)$ und $(c, 1)$.
Auf $g_f(m, b)$ liegen $(0, b)$ und $(1, m + b)$.
Auf $g_s(m, b)$ liegen $(0, b)$ und $(1, m/2 + b)$.

Zur Gültigkeit von **Axiom (I.3):** „Es gibt drei Punkte, die nicht kollinear sind“.

Die Punkte $(-1, 0)$, $(0, 0)$ und $(0, 1)$ liegen nicht auf einer Geraden. Um das nachzurechnen, muss man natürlich die einzelnen Fälle durchprobieren, aber das ist wenig spannend.

Lösung zu Afg. 18: Ein Punkt $\mathbf{p}$ in der reellen Ebene ist eine Gerade $\mathbb{R}\mathbf{a}$ durch $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^3$. Diese Gerade ist durch den Punkt $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$ bestimmt, aber man kann statt $\mathbf{a}$ auch jedes Vielfache $\lambda\mathbf{a}$ (mit $\lambda \neq 0$) benutzen. Deshalb schreibt man $\mathbf{p} = (a_0 : a_1 : a_2)$.

Eine projektive Gerade $g \subset P_2(\mathbb{R})$ hat die Gestalt

$$g = \mathbb{P}(E) := \{L \,:\, L \subset E \text{ ist eine Gerade durch } \mathbf{0}\},$$

mit einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$.

a) Gesucht ist eine Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ durch $\mathbf{0}$, die die Geraden $L_1 = \mathbb{R}\mathbf{a}_1$, $L_2 = \mathbb{R}\mathbf{a}_2$ und $L_3 = \mathbb{R}\mathbf{a}_3$ enthält, mit $\mathbf{a}_1 = (2, 5, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -3, -4)$ und $\mathbf{a}_3 = (7, 5, -2)$. Setzt man die drei Punkte in eine allgemeine Ebenengleichung $ax + by + cz = 0$ ein, so kommt die Gleichung $x - y + z = 0$ heraus. Parametrisiert man die Ebene durch $x = s$ und $z = t$, so erhält man $y = s + t$.

$E := \{(s, s + t, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}$ ist eine Ebene durch $(0, 0, 0)$, also ein 2-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Also ist $g := \mathbb{P}(E) = \{(s : s + t : t) \in P_2(\mathbb{R}) \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}$ eine projektive Gerade, und offensichtlich liegen $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1$ auf g.

b) Ist $j(x_1, y_1) = j(x_2, y_2)$, so ist $(1 : x_1 : y_1) = (1 : x_2 : y_2)$, also $(1, x_2, y_2) = \lambda \cdot (1, x_1, y_1)$ mit einem Faktor $\lambda \neq 0$. Dann muss $\lambda = 1$ sein, also $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Damit ist j injektiv.

Es ist

$$
\begin{aligned}
j^{-1}\big(g \cap j(\mathbb{R}^2)\big) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ j(x, y) \in g \cap j(\mathbb{R}^2)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (1 : x : y) \in \mathbb{P}(E)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (1, x, y) \in E\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x - 1\}
\end{aligned}
$$

der „affine Teil" der Geraden g.

Weiter ist

$$g \cap g_\infty = \{(0 : s : t) \in P_2(\mathbb{R}) \ : \ 0 + t = s\} = \{(0 : 1 : 1)\}$$

der „unendlich ferne Punkt" von g.

Lösung zu Afg. 19: Die drei Axiome lauten:

Axiom (I): Jeder Student belegt **mindestens** ein Fach.

Axiom (II): Zwei verschiedene Studenten belegen immer **genau** ein gemeinsames Fach.

Axiom (III): Zu jedem Fach gibt es **genau** ein „Komplementärfach" mit der Eigenschaft, dass kein Student diese beiden Fächer belegt.

Beweis von Satz 3:

(1) Es sei S ein beliebiger Student.

(2) Nach Satz 1 belegt S zwei Fächer $A \neq B$.

(3) Nach Satz 2 gibt es einen Studenten $T \neq S$, der auch A belegt, und wegen Axiom II kann T das Fach B nicht belegen.

(4) Nach Satz 2 gibt es einen Studenten $Q \neq S$, der auch das Fach B belegt, und wegen Axiom II kann Q das Fach A nicht belegen.

(5) Es ist $Q \neq T$ (logische Folgerung).

(6) Nach Axiom II gibt es genau ein Fach F, das von Q und T belegt wird. Dann ist $F \neq A$ und $F \neq B$.

(7) Nach Axiom III gibt es genau ein Komplementärfach C zu A und genau ein Komplementärfach D zu B.

(8) C ist nicht das Komplementärfach zu D, denn sonst wäre $A = D$ und $B = C$ (nach (7)), aber gemäß (2) sind A und B nicht komplementär zueinander.

(9) Es ist unmöglich, dass $C = D$ ist, denn dann wäre $A = B$, und das kann nach (2) nicht gelten.

(10) Also ist $C \neq D$, und es gibt einen Studenten R, der C und D belegt hat.

(11) Sei E das Komplementärfach zu F. Es muss nun gezeigt werden, dass A, B, C, D, E und F paarweise verschieden sind.

(12) A ist das erste Fach. Nach (2) ist $B \neq A$. Nach (6) ist $F \neq A$ und $F \neq B$. Das sind schon drei Fächer.

(13) Nach (7) ist $C \neq A$, und weil S sowohl A als auch B belegt hat und C komplementär zu A ist, ist $C \neq B$. Weil T das Fach F belegt hat, nicht aber das Fach C (denn T hat A belegt, und A ist komplementär zu C), ist $C \neq F$. Analog findet man, dass $D \neq A, B, F$ ist. Außerdem weiß man von (10), dass $C \neq D$ ist. Damit hat man 5 Fächer gefunden.

(14) $E \neq F$ ist das sechste Fach. Es ist $E \neq A$, denn T hat A und das zu E komplementäre Fach F belegt. Analog ist $E \neq B$, denn Q hat B und F belegt. Wäre $E = C$, so wäre F komplementär zu C, also $F = A$, und das kann nicht sein. Damit ist $E \neq C$, und analog folgt, dass $E \neq D$ ist. Also sind die 6 Fächer paarweise verschieden.

Hier ist ein geometrisches Modell mit 4 Punkten (= Studenten) und 6 Geraden (=Fächern).