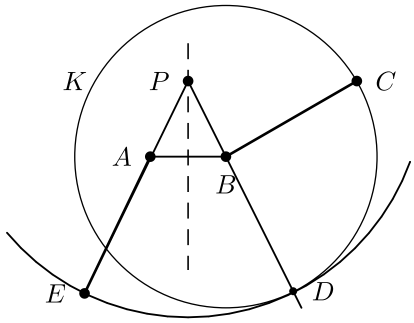
Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 4** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 13: a) Der erste Teil der Aufgabe entspricht mehr oder weniger der Proposition 2 im ersten Buch der „Elemente“: *An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke anzulegen.*

Da kein exaktes, modernes Axiomensystem als Grundlage angegeben ist, kann man mit Schulkenntnissen arbeiten. Es ist nur zu beachten, dass man kein Lineal mit Maßeinteilung benutzen darf, und dass der Zirkel zusammengeklappt werden muss, wenn man ihn hochhebt.



Gegeben ist der Punkt A und die Strecke $\overline{BC}$, die zunächst nichts mit A zu tun hat. Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ kann mit Hilfe zweier Kreise konstruiert werden, und dann wählt man darauf einen Punkt P (bei Euklid wird stattdessen gemäß Proposition 1 ein gleichseitiges Dreieck ABP über $\overline{AB}$ errichtet). Auf jeden Fall ist $\overline{AP} \,\widehat{=}\, \overline{BP}$. Der Kreis K um B mit Radius $r = d(B,C)$ besteht aus allen Punkten X mit $d(B,X) = r$. Eigentlich darf man in der konstruktiven Geometrie nicht mit gemessenen Längen arbeiten. Den Kreis um B durch C kann man aber mit einem Zirkel problemlos zeichnen.

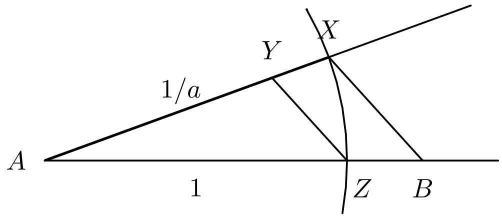
Der Strahl $\overrightarrow{PB}$ trifft jenseits von B den Kreis K in einem Punkt D, und dann ist $\overline{BD} \,\widehat{=}\, \overline{BC}$, also $d(B,D) = r$.

Nun zeichne man den Strahl $\overrightarrow{PA}$ und den Kreis K^* um P mit Radius $R := d(P,D)$ (indem man den Kreis um P durch D zeichnet). Die beiden Linien treffen sich in einem Punkt E, und dann ist $\overline{PE} \,\widehat{=}\, \overline{PD}$, also $d(P,E) = R = d(P,D)$. Außerdem ist $d(P,A) = d(P,B)$. Daraus folgt: $\overline{AE} \,\widehat{=}\, \overline{BD}$, also $d(A,E) = d(B,D = r$. Damit hat man bei A eine Strecke angelegt, die zu $\overline{BC}$ kongruent ist.

b) Ist $a = d(A,B)$ und $b = d(C,D)$, so lege man mit Hilfe der Konstruktion aus (a) bei B eine Strecke $\overline{BE}$ der Länge b an. Dann verlängert man die Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus, und man zeichnet einen Kreis um B mit Radius b (der auch durch E geht). Beide Linien treffen sich in einem Punkt F. Dann ist $d(B,F) = b$ und damit $d(A,F) = a + b$.

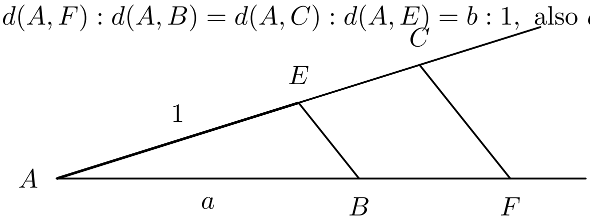
Lösung zu Afg. 14: Gegeben sind die Strecke $\overline{AB}$ der Länge a, die Strecke $\overline{CD}$ der Länge b und die Einheitsstrecke $\overline{EF}$ der Länge 1.

1) Man lege bei A die Einheitsstrecke als $\overline{AX}$ mit $d(A,X) = d(E,F) = 1$ an. Der Strahl $\overrightarrow{AB}$ trifft den Kreis K um A durch X (mit Radius 1) in einem Punkt Z. Die Parallele zu XB durch Z trifft den Strahl AX in einem Punkt Y. Dann kann man die Strahlensätze anwenden. Es ist $a : 1 = d(A,B) : d(A,Z) = d(A,X) : d(A,Y) = 1 : d(A,Y)$, also $d(A,Y) = 1/a$.

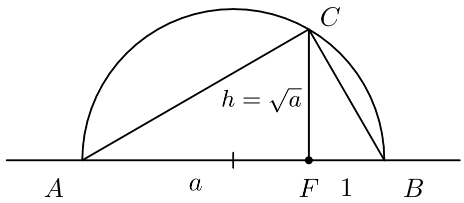


2) Hier trage man bei A die Strecken $\overline{AB}$ mit $d(A,B) = a$ und $\overline{AC}$ mit $d(A,C) = b$ an, sowie die Einheitsstrecke $\overline{AE}$. Zieht man die Parallele zu BE durch C, so erhält man den Schnittpunkt F auf dem Strahl $\overrightarrow{AB}$. Die Strahlensätze liefern

$$d(A,F) : a = d(A,F) : d(A,B) = d(A,C) : d(A,E) = b : 1, \text{ also } d(A,F) = a \cdot b.$$



3) Der hier benutzte Trick wurde schon in der Vorlesung angesprochen.



Nach dem Höhensatz gilt in dem rechtwinkligen Dreieck ABC die Gleichung $h^2 = a \cdot 1$, also $h = \sqrt{a}$. Gegeben ist $\overline{AF}$ mit $d(A,F) = a$. Man muss also zunächst die Einheitsstrecke so bei F antragen, dass man die Größe $a+1$ als Länge der Strecke $\overline{AB}$ erhält (in Verlängerung von $\overline{AF}$). Dann bestimmt man den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und zeichnet den Thaleskreis ein. Da F der Fußpunkt der Höhe von C auf die Hypotenuse und das Ende der Strecke der Länge a ist, muss man in F die Senkrechte errichten und mit dem Thaleskreis schneiden. Das ergibt den Punkt C, und es ist $d(C,F) = \sqrt{a}$.

Lösung zu Afg. 15: Eine Ebene E durch den Nullpunkt ist ein 2-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Der Schnitt zweier solcher Unterräume ist ein 1-dimensionaler Unterraum, also eine Gerade L durch den Nullpunkt, denn es ist

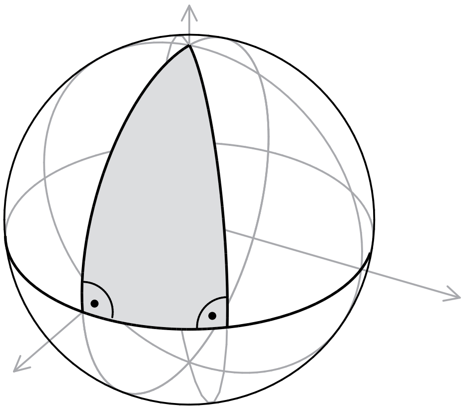
$$\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 + E_2) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Ist $L = \{\mathbf{x} = t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$, so kann man den Richtungsvektor $\mathbf{v}$ so wählen, dass $\|\mathbf{v}\| = 1$ ist. Dann ist $L \cap S = \{t\mathbf{v} \,:\, \|t\mathbf{v}\| = 1\} = \{t\mathbf{v} \,:\, |t| = 1\} = \{\mathbf{v}, -\mathbf{v}\}$. Das sind zwei sogenannte „Antipoden-Punkte“, und man sieht, dass sich zwei Großkreise immer genau in zwei Antipoden-Punkten treffen.

1) Sind zwei verschiedene Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S$ gegeben, die nicht Antipoden-Punkte sind, so sind sie (als Vektoren) linear unabhängig und spannen eine Ebene E (durch den Nullpunkt) auf. Der Großkreis $E \cap S$ ist die „Gerade“ durch $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$. Eine zweite „Gerade“ kann nicht durch diese Punkte gehen, weil es keine Antipoden-Punkte sind. Aber: Durch zwei Antipoden-Punkte gehen dann sogar unendlich viele Großkreise.

2) Man betrachte zwei Großkreise (Meridiane in der Sprache der Geographen), die durch den Südpol und den Nordpol gehen. Diese Meridiane treffen einen dritten Großkreis, den Äquator, und bilden mit ihm rechte Winkel. So entstehen Dreiecke mit zwei rechten Winkeln, also einer Winkelsumme, die größer als π ist.

Der Winkel zwischen zwei Großkreisen ist eigentlich noch nicht definiert. Man kann sich aber überlegen, wie man das wohl machen sollte. Ein fester Großkreis L entsteht als Schnitt der Sphäre mit einer Ebene E durch den Nullpunkt. Ist $\mathbf{p}$ ein Punkt auf L, so ist die Tangente an L in $\mathbf{p}$ diejenige Gerade in E, die dort auf der Gerade durch $\mathbf{0}$ und $\mathbf{p}$ senkrecht steht. Der Winkel zwischen zwei Großkreisen ist der Winkel zwischen den entsprechenden Tangenten. Im Raum spannen zwei Geraden durch einen Punkt eindeutig eine Ebene auf, im Falle zweier Tangenten in einem Punkt $\mathbf{p}$ ist das die Tangentialebene an die Sphäre in $\mathbf{p}$. Deshalb ist der so definierte Winkel zwischen Großkreisen in Wirklichkeit ein ebener Winkel.



3) Bei dem gleichen Dreieck taucht ein Außenwinkel auf, der 90° umfasst. Weil einer der gegenüberliegenden Innenwinkel ebenfalls ein rechter Winkel ist, ist der schwache Außenwinkelsatz nicht erfüllt.

Lösung zu Afg. 16: Wenn man bei einem Axiomensystem für die ebene Geometrie erreichen will, dass die Ebene $\mathbb{R}^2$ das einzige Modell ist, dann braucht man ein Axiom, das die „Vollständigkeit“ sichert. Als Vorbereitung darauf soll man sich hier mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen beschäftigen. Die taucht in vielerlei Gestalt auf. Zum Beispiel ist das Dedekind-Axiom äquivalent zu einer Gruppe von zwei Axiomen, bestehend aus dem Archimedes- und dem Intervallschachtelungs-Axiom. Hier soll nur eine Richtung dieser Äquivalenz gezeigt werden.

Es sei das Dedekind-Axiom vorausgesetzt.

a) Beweis der Archimedes-Eigenschaft: Man definiere die Mengen

$$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > x\} \quad \text{und} \quad B := \{x \in \mathbb{R} : \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ ist } n \le x\}.$$

Offensichtlich ist $A \cup B = \mathbb{R}$ und $A \cap B = \varnothing$. Ist $a \in A$ und $b \in B$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a < n \le b$, es ist also $a < b$. Offensichtlich ist $A \neq \varnothing$. Zu zeigen ist, dass $A = \mathbb{R}$ ist, dann ist man fertig.

Widerspruchsbeweis: Man nehme an, dass $B \neq \varnothing$ ist. Dann stellt (A, B) einen „Dedekind'schen Schnitt“ dar, und es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $x \le c \le y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Dann liegt aber $c - 1$ in A (denn andernfalls wäre $c \le c - 1$), und es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $c - 1 < n$. Daraus folgt: $c < n + 1$. Weil $n + 1$ auch in A liegt, kann das nicht sein. WS!

b) Beweis der Konvergenz einer Intervallschachtelung: Ist eine Intervallschachtelung $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$ gegeben, so setze man

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x < \beta_k \text{ für alle } k\} \text{ und } B := \{x \in \mathbb{R} : \exists\, k \text{ mit } \beta_k \le x\}.$$

Offensichtlich liegt jedes α_n in A (denn für jedes k und $N := \max(n, k)$ ist $\alpha_n \le \alpha_N < \beta_N \le \beta_k$), und analog liegt jedes β_n in B. Damit sind A und B nicht leer. Definitionsgemäß ist außerdem $A \cup B = \mathbb{R}$ und $A \cap B = \varnothing$. Ist schließlich $x \in A$ und $y \in B$, so gibt es ein k mit $x < \beta_k \le y$. Damit ist (A, B) ein Dedekind'scher Schnitt, und es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $x \le c \le y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Weil jedes α_n in A und jedes β_n in B liegt, gehört c zu allen Intervallen I_n. Gäbe es zwei Zahlen $c_1 < c_2$, die in allen Intervallen I_k liegen, so wäre $c_2 - c_1 \leq \beta_k - \alpha_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weil $\beta_k - \alpha_k$ gegen null konvergiert, muss $c_1 = c_2$ sein.

Anmerkung: Wie oben angedeutet, kann man auch umgekehrt zeigen, dass aus (a) und (b) das Dedekind-Axiom folgt. Aber das gehört nicht mehr zur Aufgabe.