

# Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16

Blatt 3

Prof. Fritzsche

**Lösung zu Afg. 9:** Im  $\mathbb{R}^2$  kann man wahlweise mit Koordinaten rechnen oder die reine Vektorschreibweise verwenden. Möchte man die affine Struktur betonen, bietet sich eher die Verwendung von Koordinaten an.

a) Die Kreisgleichung für  $K = K_r(\mathbf{a})$  mit  $\mathbf{a} = (1, 3)$  und  $r = \sqrt{10}$  lautet:

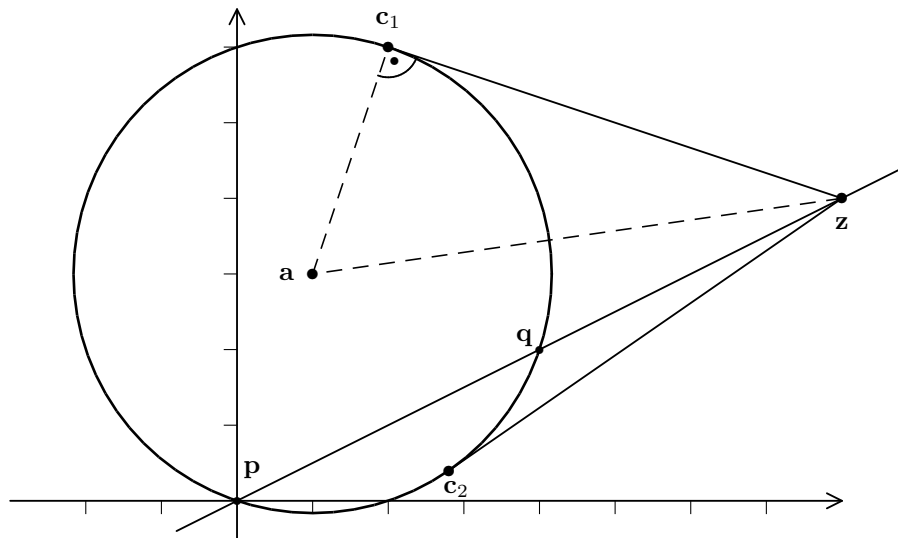
$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10 \iff x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0.$$

Man beobachtet sofort, dass  $\mathbf{p} = (0, 0)$  auf  $K$  liegt. Der Punkt  $\mathbf{z} = (8, 4)$  hat vom Kreismittelpunkt  $\mathbf{a}$  den Abstand  $d(\mathbf{z}, \mathbf{a}) = \sqrt{(8 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{50} (= 5\sqrt{2}) > \sqrt{10} = r$ , er liegt also außerhalb des Kreises.

Beschreibt man die Gerade  $L$  durch  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{z}$  durch eine Gleichung  $ax + by = c$ , so erhält man die Bedingungen  $a \cdot 0 + b \cdot 0 = c$  und  $a \cdot 8 + b \cdot 4 = c$ , und die führen zu den Gleichungen  $b = -2a$  und  $c = 0$  und damit schließlich zu der Geradengleichung

$$x - 2y = 0.$$

Gesucht wird der zweite Schnittpunkt von  $L$  und  $K$ . Wo ist der erste? Das ist natürlich der Punkt  $\mathbf{p}$ . Einsetzen der Geradengleichung in die Kreisgleichung ergibt die Gleichung  $y(y - 2) = 0$  und damit den gesuchten Punkt  $\mathbf{q} = (4, 2)$ .



b) Ist  $\mathbf{c}$  der Berührungspunkt einer Tangente an  $K$ , so bilden die Punkte  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{c}$  ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $d(\mathbf{a}, \mathbf{z}) = \sqrt{(8 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{50}$  und einer Kathete der Länge  $r = \sqrt{10}$ . Die andere Kathete  $\delta = \sqrt{50 - 10} = 2\sqrt{10}$  liefert der Abstand von  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{c}$ . Man bekommt  $\mathbf{c}$  also als Schnittpunkt von  $K_r(\mathbf{a})$  mit  $K_\delta(\mathbf{z})$ . Da sind zwei Lösungen zu erwarten.  $\mathbf{c} = (x, y)$  erfüllt die Gleichungen

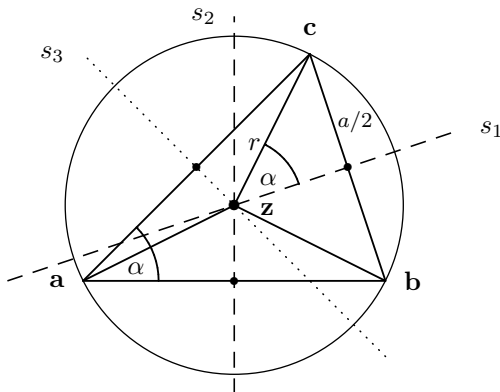
$$2x + 6y = x^2 + y^2 = 16x + 8y - 40 \quad \text{und} \quad x^2 - 2x + y^2 - 6y = 0.$$

Die erste Gleichung ergibt  $y = -7x + 20$ . Setzt man das in die zweite Gleichung ein, so erhält man die quadratische Gleichung  $5x^2 - 24x + 28 = 0$ , also  $x = 2$  oder  $x = 14/5$  (und dazu jeweils  $y = 6$  bzw.  $y = 2/5$ ). Tatsächlich ergeben sich zwei Berührungspunkte  $\mathbf{c}_1 = (2, 6)$  und  $\mathbf{c}_2 = (2.8, 0.4)$  von Tangenten durch  $\mathbf{z}$ .

Es ist  $\|\mathbf{z} - \mathbf{c}_1\|^2 = 6^2 + (-2)^2 = 40$  und  $\|\mathbf{p} - \mathbf{z}\| \cdot \|\mathbf{q} - \mathbf{z}\| = \sqrt{64 + 16} \cdot \sqrt{16 + 4} = \sqrt{80} \cdot \sqrt{20} = 40$ .  
Damit ist die Sehnen-Tangenten-Formel erfüllt.

**Lösung zu Afg. 10:** Alle Ergebnisse aus Kapitel 1 der Vorlesung können hier verwendet werden.

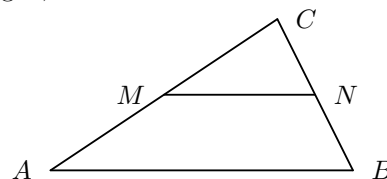
a) Die drei Mittelsenkrechten seien  $s_1, s_2, s_3$ , die sich im Mittelpunkt  $\mathbf{z}$  des Umkreises treffen.



Das Dreieck mit den Ecken  $\mathbf{z}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  wird durch die Mittelsenkrechte zur Seite  $\overline{\mathbf{bc}}$  in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt, mit Hypotenuse  $r$  und Kathete  $a/2$ . Der letzteren liegt der Winkel  $\alpha$  gegenüber (denn nach dem Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel ist  $\angle(\mathbf{bzc}) = 2\alpha$ ). Also ist  $\sin \alpha = a/2r$ , und genauso folgt, dass  $\sin \beta = b/2r$  ist.

b) Dieser Teil lässt sich gut mit Vektorrechnung erledigen, dann ist er fast trivial.

Sei  $\mathbf{x} = \overrightarrow{CM}$ ,  $\mathbf{y} = \overrightarrow{CN}$ ,  $\mathbf{v} = \overrightarrow{MN}$  und  $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$



Es ist  $\mathbf{x} + \mathbf{v} = \mathbf{y}$ , also  $2\mathbf{x} + 2\mathbf{v} = 2\mathbf{y}$ . Andererseits ist aber

$$2\mathbf{x} + \mathbf{w} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} = 2\mathbf{y},$$

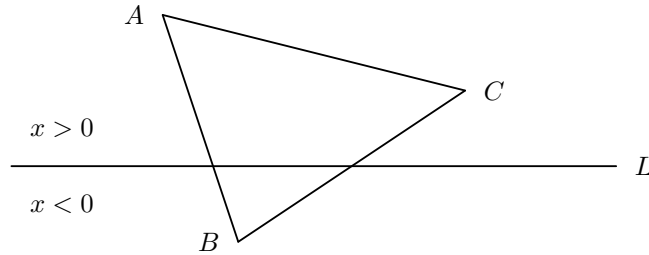
also  $\mathbf{w} = 2\mathbf{y} - 2\mathbf{x} = 2\mathbf{v}$ . Damit sind die Richtungsvektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  linear abhängig, und das bedeutet, dass die Geraden  $MN$  und  $AB$  parallel sind.

**Lösung zu Afg. 11:** In dieser Aufgabe soll die Gültigkeit des „Pasch-Axioms“ im Modell  $\mathbb{R}^2$  bewiesen werden. Es geht also **nicht** darum, das Axiom aus anderen herzuleiten (was auch gar nicht möglich wäre). Vielmehr kann man großzügig mit allen Ergebnissen aus Kapitel 1 arbeiten und die gewünschte Aussage rein rechnerisch bestätigen. Dafür können einem sogar mehrere verschiedene Lösungswege einfallen.

**1. Lösungsmöglichkeit:**

Dass eine Gerade eine gewisse Strecke trifft, ändert sich nicht, wenn man die Ebene einer Isometrie unterwirft.

Zum Beispiel kann man durch Anwendung einer geeigneten Isometrie erreichen, dass die gegebene Gerade  $L$  die  $x$ -Achse ist. Die Koordinaten der Punkte  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  und  $C = (c_1, c_2)$  können dann natürlich nicht mehr frei gewählt werden. Weil  $L$  allerdings die Seite  $\overline{AB}$  trifft, kann man annehmen, dass  $a_2 > 0$  und  $b_2 < 0$  ist.



Der Punkt  $C$  liegt entweder in der oberen oder in der unteren Halbebene. Es sei angenommen, dass  $c_2 > 0$  ist (dass also  $C$  in der oberen Halbebene liegt). Die Strecke  $\overline{BC}$  ist gegeben als

$$\overline{BC} = \{(x, y) : x = b_1 + t(c_1 - b_1) \text{ und } y = b_2 + t(c_2 - b_2), 0 \leq t \leq 1\}.$$

Die Funktion  $f(t) := b_2 + t(c_2 - b_2) = (1 - t)b_2 + tc_2$  ist auf  $[0, 1]$  stetig, und es ist  $f(0) = b_2 < 0$  und  $f(1) = c_2 > 0$ . Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein  $t_0 \in [0, 1]$  mit  $f(t_0) = 0$ . Damit trifft  $\overline{BC}$  die Gerade  $L = \{(x, y) : y = 0\}$  im Punkt  $\mathbf{x}_0 := (b_1 + t_0(c_1 - b_1), 0)$ .

Liegt  $C$  in der unteren Halbebene, so ist  $c_2 < 0$ , und man zeigt auf die gleiche Weise wie oben, dass  $L$  die Seite  $\overline{AC}$  trifft.

Folgende Beweis-Variationen sind (im Falle  $c_2 > 0$ ) noch denkbar:

- In Wirklichkeit braucht man den abstrakten Zwischenwertsatz (und den Begriff der Stetigkeit) gar nicht, denn die Funktion  $f$  ist ja eine einfache, affin-lineare Funktion, und man kann die Gleichung  $0 = f(t_0) = b_2 + t_0(c_2 - b_2)$  nach  $t_0$  auflösen:  $t_0 = -b_2 / (c_2 - b_2)$ . Dabei ist der Nenner  $\neq 0$ , denn es ist  $c_2 > 0$  und  $b_2 < 0$ , also  $c_2 - b_2 > 0$ . Der Zwischenwertsatz liefert nur abstrakt die Existenz von  $t_0$ , hier erhält man sogar den konkreten Wert.
- Ist  $c_1 = b_1$ , so ist  $BC$  die vertikale Gerade  $x = b_1$ , die die  $x$ -Achse bei  $(x_1, 0)$  trifft. Ist  $c_1 \neq b_1$ , so kann man die beiden Funktionsgleichungen  $x = b_1 + t(c_1 - b_1)$  und  $y = b_2 + t(c_2 - b_2)$  zu einer Funktion  $y = mx + q$  zusammenfassen und den  $x$ -Wert berechnen, bei dem  $y = 0$  wird.

## 2. Lösungsmöglichkeit:

Dies war meine erste Beweis-Idee, sie erwies sich aber als etwas zu kompliziert. Statt der Geraden  $L$  kann man auch die Punkte  $A, B, C$  geeignet wählen.

Wendet man eine Translation, eine Drehung und notfalls noch die Spiegelung an der  $x$ -Achse an, so erhält man:

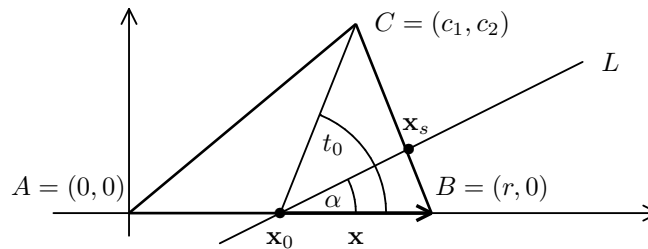
$$A = (0, 0), B = (r, 0) \text{ mit } r > 0 \text{ und } C = (c_1, c_2) \text{ mit } c_2 > 0.$$

Verwendet seien noch die Seitenvektoren  $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB} = (r, 0)$ ,  $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC} = (c_1 - r, c_2)$  und  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = (c_1, c_2)$ , sowie der Punkt  $\mathbf{x}_0 = (u, 0) \in \overline{AB} \cap L$ .

Jetzt kann natürlich die Gerade  $L$  nicht mehr speziell gewählt werden, aber man kann schreiben:

$$L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}, \text{ mit einem Vektor } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Man kann den Richtungsvektor  $\mathbf{v}$  so wählen, dass er in die obere Halbebene zeigt. Sei  $\alpha \in (0, \pi)$  der Winkel (im Bogenmaß), den  $\mathbf{v}$  mit dem Vektor  $\mathbf{x} = (r - u, 0)$  einschließt, sowie  $t_0 \in (0, \pi)$  der Winkel, den der Vektor  $(c_1 - u, c_2)$  mit  $\mathbf{x}$  einschließt.



Die Anschauung sagt: Ist  $0 < \alpha < t_0$ , so trifft  $L$  die Seite  $\overline{BC}$ . Der Fall  $\alpha = t_0$  kann nicht eintreten, und für  $t_0 < \alpha < \pi$  trifft  $L$  die Seite  $\overline{AC}$ . Jetzt muss man das „nur“ noch beweisen.

Für  $0 \leq s \leq 1$  liegt  $\mathbf{x}_s := (r, 0) + s(c_1 - r, c_2) = (r + s(c_1 - r), sc_2)$  auf der Verbindungsstrecke  $\overline{BC}$  von  $(r, 0)$  und  $(c_1, c_2)$ . Wenn  $L$  durch den Punkt  $\mathbf{x}_s$  geht, ist

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y\text{-Koordinate von } \mathbf{x}_s}{(x\text{-Koordinate von } \mathbf{x}_s) - u} = \frac{sc_2}{r + s(c_1 - r) - u}.$$

Die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, t_0]$  sei nun definiert durch

$$f(s) := \arctan \frac{sc_2}{r + s(c_1 - r) - u}.$$

Weil  $f$  stetig ist, sowie  $f(0) = 0$  und  $f(1) = t_0$  (weil  $\mathbf{x}_1 = C$  ist), wird jeder Wert zwischen 0 und  $t_0$  angenommen. Ist  $0 < \alpha < t_0$ , so gibt es also ein  $s \in (0, 1)$  mit  $f(s) = \alpha$ , und das bedeutet, dass  $L$  die Seite  $\overline{BC}$  trifft. Damit ist der erste Teil der anschaulichen Vorstellung verifiziert.

Ist  $t_0 < \alpha < \pi$ , so argumentiert man analog, aber man muss etwas aufpassen, weil Winkel  $> \pi/2$  auftreten können, der Tangens aber bei  $\pi/2$  nicht definiert ist. Für  $0 \leq z \leq 1$  liegt  $\mathbf{y}_z := ((1-z)c_1, (1-z)c_2)$  auf  $\overline{AC}$ , wobei  $\mathbf{y}_0 = C$  und  $\mathbf{y}_1 = A$  ist. Man definiere  $g : [0, 1] \rightarrow [t_0, \pi]$  durch

$$g(z) := \begin{cases} \arctan((1-z)c_2/((1-z)c_1 - u)) & \text{falls } (1-z)c_1 > u, \\ \arctan((1-z)c_2/((1-z)c_1 - u)) + \pi & \text{falls } (1-z)c_1 < u. \end{cases}$$

In diesem Fall ist  $g(0) = t_0$  und  $g(1) = \pi$ . Für  $(x, y) \rightarrow (0, 1)$  und  $x > 0, y > 0$  strebt  $\arctan(y/x)$  gegen  $\pi/2$ , für  $x < 0$  und  $y > 0$  gegen  $-\pi/2$ . Addiert man im zweiten Fall die Zahl  $\pi$ , so erhält man bei Annäherung von links und von rechts den gleichen Grenzwert  $\pi/2$ . Deshalb ist  $g$  auch bei  $z = 1 - u/c_1$  stetig, und man kann wie oben argumentieren.

Da  $\alpha$  einen Wert zwischen 0 und  $\pi$  annehmen muss, aber nicht den Wert  $t_0$ , trifft  $L$  auf jeden Fall eine der Seiten  $\overline{BC}$  oder  $\overline{AC}$ .

**Lösung zu Afg. 12:** Bei dieser Aufgabe hatten viele ein Problem damit, überhaupt die Fragestellung zu verstehen. Dabei handelt es sich eher um eine der einfacheren Aufgaben, wenn nicht sogar eine Rechenaufgabe.

Was liefert die Aufgabenstellung? Zunächst wird erklärt, was man im  $\mathbb{R}^2$  (in dem man mit all den Mitteln aus Kapitel 1 arbeiten darf) unter einer Spiegelung an einer Geraden versteht. Die Schwierigkeit liegt vielleicht in dem Umstand, dass die Spiegelung hier nur indirekt über ihre Eigenschaften definiert wird, aber andererseits macht nur so die Aufgabenstellung Sinn. Eine Spiegelung an der Geraden  $L$  wird wie folgt erklärt:

- Die Spiegelung an  $L$  ist eine bijektive Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die Abstände erhält.
- $F$  lässt die Gerade  $L$  punktweise fest.
- Wendet man  $F$  auf ein beliebiges  $\mathbf{x}$  zweimal hintereinander an, so erhält man wieder  $\mathbf{x}$ .

- Liegt  $\mathbf{x}$  **nicht** auf  $L$ , so ist die Verbindungsstrecke von  $\mathbf{x}$  und  $F(\mathbf{x})$  orthogonal zu  $L$ , und ihr Schnittpunkt halbiert diese Strecke. (Diese Bedingung ist nur sinnvoll, wenn  $F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$  für  $\mathbf{x} \notin L$  gilt; das hätte ich vielleicht noch extra als Forderung formulieren sollen).

Gezeigt werden soll, dass es zu jeder Geraden genau eine Spiegelung gibt. Und diese Aussage setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Es muss erst mal gezeigt werden, dass überhaupt eine Spiegelung existiert (was die Hauptaufgabe ist) und dann, dass diese Spiegelung eindeutig bestimmt ist.

Standardmäßig würde man erst die Existenz beweisen, indem man eine Spiegelung konstruiert, und dann die Eindeutigkeit, indem man annimmt, dass mindestens zwei verschiedene Spiegelungen existieren, und das zum Widerspruch bringt.

In der synthetischen Mathematik (wie man die axiomatische Mathematikauch nennt) geht man aber gerne ganz anders vor. Zum Beweis der Existenz reicht es, das fertige Ergebnis (hier also die fertige Spiegelung) anzugeben, während man die Eindeutigkeit beweist, indem man zeigt, dass einem die Bedingungen keine andere Wahl darüber lassen, wie – in diesem Beispiel – die Spiegelung aussieht.

Da man nicht erwarten kann, dass bei jedem das Ergebnis vom Himmel fällt, ist es besser, mit der Eindeutigkeit zu beginnen, auf diesem Wege zu sehen, wie man eine Spiegelung konkret definieren muss, und dann die Existenz zu zeigen, indem man von der gefundenen Abbildung nachweist, dass sie die oben abstrakt vorgegebenen Eigenschaften besitzt. So gehe ich in meinem „Muster“-Beweis vor:

#### **Eindeutigkeit:**

Die gegebene Gerade habe die Gestalt  $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v} : t \in \mathbb{R}\}$ , mit  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ . Ist  $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ , so ist  $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Man braucht einen solchen Vektor  $\mathbf{w}$ , weil man die zu  $L$  orthogonale Richtung braucht.

Die Spiegelung soll  $L$  punktweise festlassen, ist damit also auf den Punkten von  $L$  schon festgelegt. Spannend ist höchstens die Frage, wie  $F(\mathbf{x}_0)$  für  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  aussieht.

Sei also ein  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  gegeben. Die Idee ist nun die Folgende: Man suche einen Punkt  $\mathbf{x} \in L$  und einen zu  $L$  orthogonalen Vektor  $\mathbf{y}$ , so dass  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  ist. Dann versuche man, den Punkt  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  als den Spiegelpunkt von  $\mathbf{x}_0$  zu identifizieren. Das geht so:

Es gibt eindeutig bestimmte Koeffizienten  $s_0, t_0$  mit  $\mathbf{x}_0 - \mathbf{a} = t_0\mathbf{v} + s_0\mathbf{w}$ , also  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{a} + t_0\mathbf{v}) + s_0\mathbf{w}$ . Die zu  $L$  senkrechte Gerade  $L_0$  durch  $\mathbf{x}_0$  besteht aus den Punkten

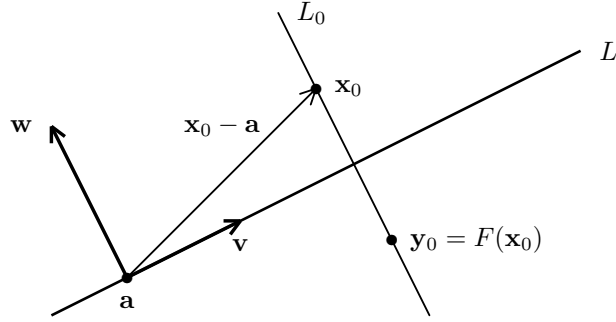
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{w} = (\mathbf{a} + t_0\mathbf{v}) + (s + s_0)\mathbf{w}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$\mathbf{x}$  liegt genau dann in  $L \cap L_0$ , wenn  $s = -s_0$  ist, also  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t_0\mathbf{v}$ . Dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{a} + t_0\mathbf{v}) + s_0\mathbf{w}$  und  $\mathbf{y}_0 := (\mathbf{a} + t_0\mathbf{v}) - s_0\mathbf{w}$ . Wenn es die Spiegelung  $F$  an  $L$  gibt, dann muss  $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$  sein. Das ergibt die Eindeutigkeit.

#### **Existenz:**

Für die Existenz definiert man dann  $F$  natürlich durch

$$F(\mathbf{a} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w}) := \mathbf{a} + t\mathbf{v} - s\mathbf{w}.$$



Offensichtlich erfüllt  $F$  die abstrakt an eine Spiegelung gestellten Bedingungen (wie z.B.  $F \circ F = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$  usw.). Es muss nur noch gezeigt werden, dass  $F$  eine Isometrie ist.

Ist  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{v} + s_1 \mathbf{w}$  und  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + t_2 \mathbf{v} + s_2 \mathbf{w}$ , so ist

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^2 = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 = \|(t_2 - t_1)\mathbf{v} + (s_2 - s_1)\mathbf{w}\|^2 = (t_2 - t_1)^2 \|\mathbf{v}\|^2 + (s_2 - s_1)^2 \|\mathbf{w}\|^2$$

und  $d(F(\mathbf{x}_1), F(\mathbf{x}_2))^2$  besitzt den gleichen Wert. Also erhält  $F$  die Abstände.

Für den Fall, dass doch jemand einen klassischen Existenz- und Eindeutigkeitsatz sehen will, habe ich versucht, einen solchen aufzuschreiben. Das erwies sich als deutlich mühsamer als beim oben gegebenen Beweis.

#### Alternativer Beweis, 1. Teil (Existenz):

Man wähle eine Translation  $T$ , die  $\mathbf{a}$  zum Nullpunkt verschiebt, sowie eine Drehung  $R$  um den Nullpunkt, die die Gerade  $T(L)$  auf die  $x$ -Achse dreht. Weiter sei  $S(x, y) = (x, -y)$  die Spiegelung an der  $x$ -Achse. Dann setze man  $F := T^{-1} \circ R^{-1} \circ S \circ R \circ T$ .

Offensichtlich ist  $F$  eine Isometrie,  $F|_L = \text{id}_L$  und  $F \circ F = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ . Ist  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ , so ist  $\mathbf{x}_1 := R \circ T(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus L_0$ , wenn man mit  $L_0$  die  $x$ -Achse bezeichnet. Ist  $L' = \{(x, y) : x = x_1\}$  die zur  $x$ -Achse orthogonale Gerade durch  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ , so ist  $\mathbf{y}_1 := S(\mathbf{x}_1) = (x_1, -y_1) \in L'$  und  $\mathbf{m}_1 := (x_1, 0)$  der Schnittpunkt von  $L_0$  und  $L'$ . Offensichtlich ist  $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{m}_1) = \|(0, y_1)\| = |y_1| = d(\mathbf{m}_1, \mathbf{y}_1)$ ,

Der Schnittpunkt von  $L$  und der zu  $L$  orthogonalen Gerade  $L'' := T^{-1} \circ R^{-1}(L')$  ist der Punkt  $\mathbf{m}_0 = T^{-1} \circ R^{-1}(\mathbf{m}_1)$ . Die Punkte  $\mathbf{x}_0 = T^{-1} \circ R^{-1}(\mathbf{x}_1)$  und  $F(\mathbf{x}_0) = T^{-1} \circ R^{-1}(\mathbf{y}_1)$  liegen auf  $L''$ . Und weil  $F$  eine Isometrie ist, die zudem alle Punkte auf  $L$  fest lässt, ist  $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{m}_0) = d(F(\mathbf{x}_0), F(\mathbf{m}_0)) = d(F(\mathbf{x}_0), \mathbf{m}_0)$ . Also ist  $F$  die (oder besser: eine) Spiegelung an  $L$ .

#### Alternativer Beweis, 2. Teil (Eindeutigkeit):

Es gebe zwei Spiegelungen  $F_1, F_2$  an der Geraden  $L$ . Bekannt ist dann, dass  $F_1$  und  $F_2$  beide die Gerade  $L$  punktweise festlassen und dass für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  die Punkte  $\mathbf{x}$  und  $F_i(\mathbf{x})$  auf einer zu  $L$  senkrechten Geraden liegen, deren Schnittpunkt mit  $L$  die Verbindungsstrecke von  $\mathbf{x}$  und  $F_i(\mathbf{x})$  halbiert, für  $i = 1, 2$ . Gezeigt werden soll, dass  $F_1 = F_2$  ist.

Dazu wähle man eine Translation  $T$  und eine Drehung  $R$ , so dass  $R \circ T$  die Gerade  $L$  auf die  $x$ -Achse abbildet. Das geht auf jeden Fall. Dann sei  $F_i^* := R \circ T \circ F_i \circ T^{-1} \circ R^{-1}$  für  $i = 1, 2$ . Was tun die beiden Abbildungen  $F_1^*$  und  $F_2^*$ , die natürlich Isometrien sind?

1. Die  $x$ -Achse sei mit  $L_0$  bezeichnet. Ist  $\mathbf{x} \in L_0$ , so liegt  $T^{-1} \circ R^{-1}(\mathbf{x})$  auf  $L$ . Und weil  $F_i$  die Gerade  $L$  punktweise fest lässt, ist auch  $F_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .
2. Ist  $\mathbf{x} = (x, y)$  mit  $y > 0$ , also  $\mathbf{x} \notin L_0$ , so liegt auch  $\mathbf{x}_1 := T^{-1} \circ R^{-1}(\mathbf{x})$  nicht auf  $L$ . Das bedeutet, dass  $\mathbf{x}_1$  und  $F_i(\mathbf{x}_1)$  auf einer zu  $L$  senkrechten Geraden  $S_i$  liegen, deren Schnittpunkt  $\mathbf{m}_i$  mit  $L$  in der Mitte zwischen  $\mathbf{x}_1$  und  $F_i(\mathbf{x}_1)$  liegt.

Die Gerade  $S_i^* := R \circ T(S_i)$  steht auf  $L_0$  senkrecht (ist also von der Gestalt  $x = c$ ) und enthält die Punkte  $\mathbf{x}$  und  $F_i^*(\mathbf{x})$ . Der Schnittpunkt  $\mathbf{m}_i^* = R \circ T(\mathbf{m}_i)$  der Geraden  $S_i^*$  und  $L_0$  liegt dann auch in der Mitte der Verbindungsstrecke von  $\mathbf{x}$  und  $F_i^*(\mathbf{x})$ .

Ist  $F_i^*(x, y) = (x, y_i^*)$ , so muss – weil Isometrien Abstände erhalten –  $|y| = |y_i^*|$  gelten, also  $y_i^* = \pm y$ . Weil  $F_1(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{x}_1$  ist, muss auch  $F_i^*(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$  sein, also  $y_i^* = -y$ . Das bedeutet, dass  $F_1^* = F_2^* = S$  ist, und damit  $F_1 = F_2$ . Fertig!

Die ganze Zeit hat man das Gefühl, dass man die zwei Abbildungen  $F_1$  und  $F_2$  bzw.  $F_1^*$  und  $F_2^*$  unnötig mitschleppt. Woher kommt das unguete Gefühl? Tatsächlich braucht man zwei Abbildungen, um einen Widerspruchsbeweis führen zu können. Dieser Widerspruchsbeweis wird hier aber gar nicht ausgeführt und ist auch unnötig: Es reicht, von **einer** Spiegelung  $F$  an  $L$  auszugehen, daraus wie oben die Abbildung  $F^*$  zu konstruieren und dann zu zeigen, dass  $F^*$  automatisch die Standard-Spiegelung  $S(x, y) = (x, -y)$  ist. Damit ist  $F$  automatisch die Spiegelung, die im Existenz-Teil des Beweises konstruiert wurde, und die Eindeutigkeit ist bewiesen.