Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 2** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 5:
„$\Longrightarrow$“: Liegt $\mathbf{x}$ auf L, so gibt es $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$. Dann ist

$$(1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2 + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \text{ mit } (1-t, t, -1) \neq (0,0,0).$$

Außerdem ist $(1-t) + t + (-1) = 0$.

„$\Longleftarrow$“: Gegeben seien die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit den im Kriterium angegebenen Eigenschaften. Es gibt zwei Fälle:

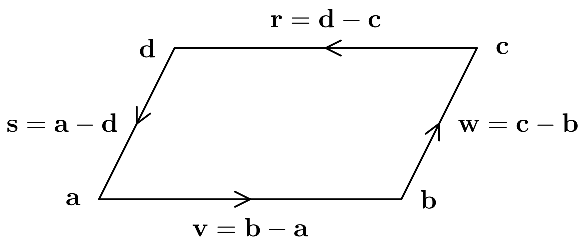
Fall (a): Ist $\lambda_3 = 0$, so ist $\lambda_2 = -\lambda_1 \neq 0$ und daher $\lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$. Daraus folgt, dass $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ ist, und das kann nicht sein.

Fall (b): Ist $\lambda_3 \neq 0$, so ist $-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} = 1$ und daher

$$\mathbf{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\mathbf{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \Big(-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} - 1\Big)\mathbf{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\big(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\big).$$

Das bedeutet, dass $\mathbf{x}$ auf L liegt.

Lösung zu Afg. 6:



Es ist $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{v}$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \mathbf{w}$.

Ein Punkt auf der Diagonalen von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{c}$ hat die Gestalt $\mathbf{a} + t(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + t(\mathbf{v} + \mathbf{w})$, ein Punkt auf der Diagonalen von $\mathbf{b}$ nach $\mathbf{d}$ hat die Gestalt $\mathbf{b} + s(\mathbf{d} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{v} + s(\mathbf{w} - \mathbf{v})$.

Die Diagonalen treffen sich genau dann, wenn es relle Zahlen t und s gibt, so dass folgende Gleichung gilt:

$$\mathbf{a} + t(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{a} + \mathbf{v} + s(\mathbf{w} - \mathbf{v}).$$

Dann ist

$$t\mathbf{v} + t\mathbf{w} = (1-s)\mathbf{v} + s\mathbf{w}, \text{ also } (t+s-1)\mathbf{v} = (s-t)\mathbf{w}.$$

Da $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ linear unabhängig sind, muss $s = t$ und $t + s = 1$ sein, also $t = s = 1/2$. Der Schnittpunkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{v})$ teilt die Diagonalen im Verhältnis $1:1$.

Lösung zu Afg. 7: Aus Aufgabe (6) entnehme man die Diagonalen $\mathbf{d}_1 := \mathbf{v} + \mathbf{w}$ und $\mathbf{d}_2 := \mathbf{w} - \mathbf{v}$.

a) Es ist

$$(\mathbf{w} + \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} - \mathbf{v}) = \mathbf{w} \bullet \mathbf{w} - \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2.$$

Also ist $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| \iff \mathbf{d}_1 \bullet \mathbf{d}_2 = 0$.

b) Es gilt:

$$d_1^2 - d_2^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) - (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} - \mathbf{v}) = 4\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}.$$

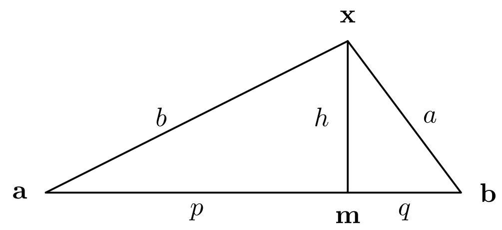
Also ist $d_1 = d_2 \iff \mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$.

Lösung zu Afg. 8: a) Sei $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ein Vektor mit $\mathbf{v} \bullet (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$. Ist dann $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t\mathbf{v}$ ein beliebiger Punkt auf der Mittelsenkrechten, so gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 &= \Big(\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t\mathbf{v}\Big) \bullet \Big(\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + t\mathbf{v}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 + t^2\|\mathbf{v}\|^2 + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{4}\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 + t^2\|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass $\|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ den gleichen Wert hat, dass also $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ ist.

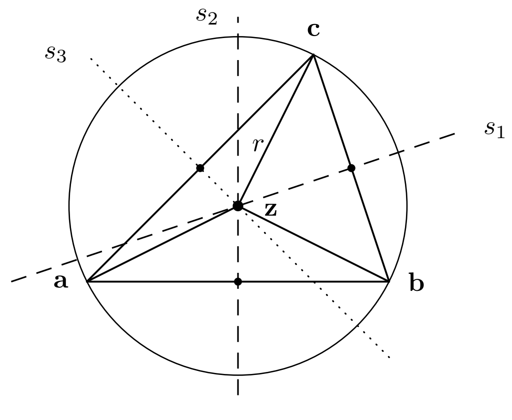
Ist umgekehrt $\mathbf{x}$ ein Punkt außerhalb der Geraden L durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$, so kann man das Lot von $\mathbf{x}$ auf L fällen, der Fußpunkt sei mit $\mathbf{m}$ bezeichnet.



Sei $a := \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$, $b := \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, $p := \|\mathbf{m} - \mathbf{a}\|$, $q := \|\mathbf{b} - \mathbf{m}\|$ und $h := \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$. Es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten b, p, h bzw. h, q, a. Weil nach Voraussetzung $a = b$ ist, folgt mit dem Satz des Pythagoras, dass $p^2 = b^2 - h^2 = a^2 - h^2 = q^2$ ist, also $p = q$. Damit liegt $\mathbf{x}$ auf der Mittelsenkrechten von $\overline{\mathbf{ab}}$.

Anmerkung: Mit Kongruenzsätzen würde vieles einfacher gehen, aber die stehen zu diesem Zeitpunkt eventuell noch nicht zur Verfügung.

b) Zunächst betrachtet man die zwei Mittelsenkrechten s_1, s_2, die sich natürlich in einem Punkt $\mathbf{z}$ treffen (denn sie können nicht parallel sein).



Dann hat $\mathbf{z}$ von allen drei Ecken des Dreiecks den gleichen Abstand r (weil s_1 aus allen Punkten besteht, die von $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ den gleichen Abstand besitzen, und s_2 aus den Punkten, die den gleichen Abstand von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ haben). Dann hat $\mathbf{z}$ auch von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$ den gleichen Abstand und liegt deshalb auf der dritten Mittelsenkrechte s_3. Der Kreis um $\mathbf{z}$ mit Radius r geht also durch die drei Ecken. Diesen Kreis nennt man den ***Umkreis*** des Dreiecks.