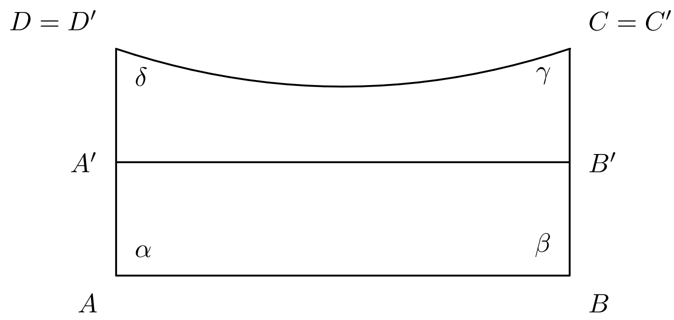
Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 11** **Prof. Fritzsche**

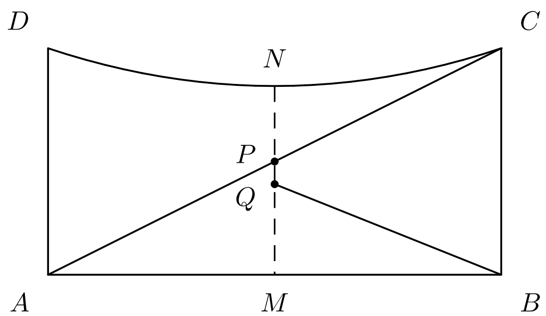
Lösung zu Afg. 33: a) Wenn $ABCD$ und $A'B'C'D'$ nicht kongruent sind, dann müssen die Seitenlinien verschieden lang sein. O.B.d.A. sei $\overline{A'D'} < \overline{AD}$. Dann legt man $A'B'C'D'$ (per Bewegungen) so auf $ABCD$, dass sich die Gipfellinien decken:



Dann ist $ABB'A'$ ein Rechteck. Das ist aber unter (HSW) nicht möglich. Also muss die Annahme falsch sein, und die beiden Saccheri-Vierecke sind kongruent.

Gilt die Hypothese vom rechten Winkel, so sind $ABCD$ und $A'B'C'D'$ beides Rechtecke. Ein Rechteck ist aber durch eine Seite allein keineswegs festgelegt. In diesem Fall gilt die Behauptung nicht.

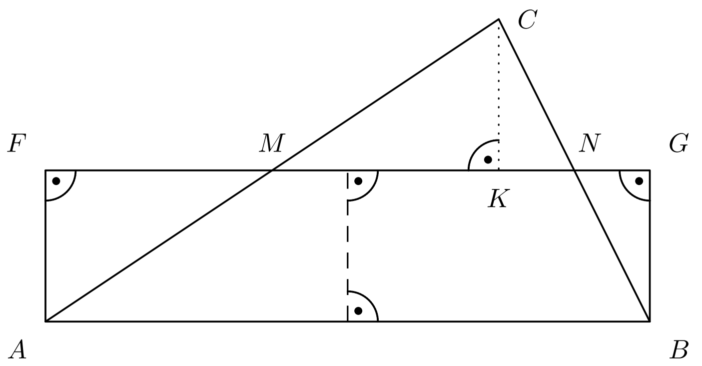
b) Im Saccheri-Viereck $ABCD$ halbiert die Mittellinie MN die Basis und die Gipfellinie, und sie steht auf beiden Geraden senkrecht.



Mit der Diagonale $\overline{AC}$ erhält man das Dreieck ABC. Die Gerade MN trifft die Seite $\overline{AB}$ in M. Wegen der rechten Winkel ist klar, dass MN parallel zu AD und BC ist. Also trifft MN keine der Ecken von ABC und muss nach Pasch die Seite $\overline{AC}$ treffen, in einem Punkt P.

Genauso trifft MN die Diagonale $\overline{BQ}$ in einem Punkt Q. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Dreiecke ABC und ABD kongruent sind, also insbesondere auch die Winkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$. Daraus folgt, dass die Dreiecke AMP und MBQ kongruent sind (WSW). (Man beachte, dass der WSW-Kongruenzsatz auch in der neutralen Geometrie gilt, während die Konstruktion eines Dreiecks aus $W-S-W$ nur mit Hilfe von Postulat V möglich wäre). Also ist $\overline{MQ} \,\widehat{=}\, \overline{MP}$, und das geht nur, wenn $P = Q$ ist.

Lösung zu Afg. 34: a) Zu einem Dreieck ABC gewinnt man das zugehörige Saccheri-Viereck $GFAB$, indem man die Mittelpunkte M von $\overline{AC}$ und N von $\overline{BC}$ durch eine Gerade g verbindet und von A das Lot auf g (mit Fußpunkt F) und von B das Lot auf g (mit Fußpunkt G) fällt.



Die Mittellinie des Saccheri-Vierecks steht auf der Basis und der Gipfellinie senkrecht. Daraus folgt, dass die Basis $\overline{GF}$ und die Gipfellinie $\overline{BA}$ parallel sind.

b) Hier ist es nützlich, erst mal folgende Hilfsaussage zu beweisen:

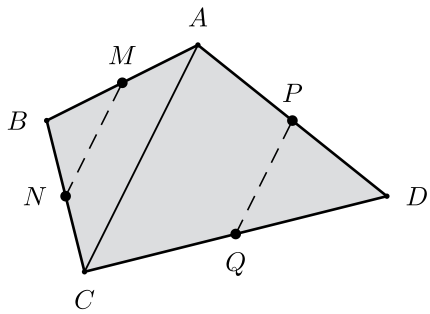
Beh.: Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$, sowie zwei Punkte C und C', die nicht auf AB, aber auf der gleichen Seite von AB liegen. Sind M und N bzw. M' und N' die Mittelpunkte von $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bzw. von $\overline{AC'}$ und $\overline{BC'}$, so ist MN parallel zu $M'N'$.

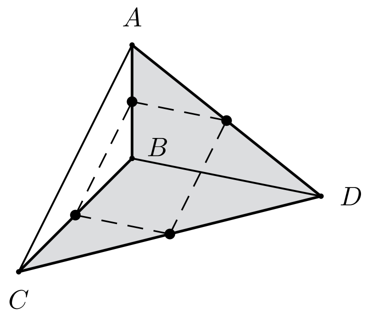
Beweis dafür: Fällt man die Lote von A auf MN (mit Fußpunkt F) und auf $M'N'$ (mit Fußpunkt F') bzw. von B auf MN (mit Fußpunkt G) und auf $M'N'$ (mit Fußpunkt G'), so entstehen zwei Saccheri-Vierecke $GFAB$ (mit Basis $\overline{GF}$) bzw. $G'F'AB$ (mit Basis $\overline{G'F'}$). Die beiden Vierecke teilen sich ihre Gipfellinie $\overline{AB}$.

Sei nun P der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und h die Senkrechte zu AB in P. Dann ist h die Mittellinie der beiden Saccheri-Vierecke (weil die die Gipfellinie in ihrem Mittelpunkt senkrecht trifft). Das bedeutet aber, dass h auch die Basen dieser Vierecke senkrecht trifft. Damit ist h eine gemeinsame Senkrechte von $GF = MN$ und $G'F' = M'N'$, und das wiederum bedeutet, dass MN und $M'N'$ parallel sind. ∎

Genauso kann man schließen, wenn C und C' auf verschiedenen Seiten von AB liegen.

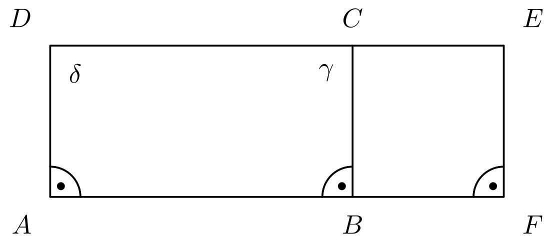
Sei nun $ABCD$ das gegebene Viereck. Die Mittelpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ seien mit M bzw. N bezeichnet, die von $\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ mit P bzw. Q.





Nach der Hilfsaussage ist $\overline{MN}$ parallel zu $\overline{PQ}$, aber auch $\overline{MP}$ parallel zu $\overline{NQ}$. Ein Viereck, bei dem gegenüberliegende Seiten parallel sind, ist ein Parallelogramm. Es spielt dabei keine Rolle, ob das Ausgangs-Viereck $ABCD$ konvex ist oder nicht.

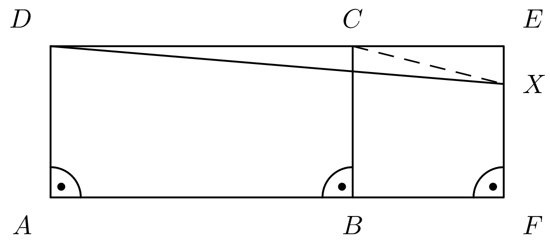
Lösung zu Afg. 35: Folgende Situation liegt vor:



Nach Voraussetzung ist $\overline{AD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$ und $\delta = \gamma$.

Man hat drei Fälle zu unterscheiden:

- Ist $\overline{EF} > \overline{BC}$, so gibt es X mit $E - X - F$ und $\overline{FX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$

  Dann ist $AFXD$ ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{AF}$, und auch $BFXC$ ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{BF}$. Dann ist $\angle BCX = \angle FXC > \angle FXD = \angle ADX$. Außerdem ist $\angle XCE > \angle XDC$ (Außenwinkelsatz). Dann folgt:

  $$\angle BCE = \angle BCX + \angle XCE > \angle ADX + \angle XDC = \angle ADC = \angle BCD.$$

  Das bedeutet, dass $\angle BCD$ spitz ist, und damit auch $\angle ADC$.

- Ist $\overline{EF} = \overline{BC}$, so ist $BFEC$ ein Saccheri-Viereck über $\overline{BF}$, aber auch $AFED$. Also ist $\angle BCD = \angle ADC = \angle FEC = \angle BCE$. Weil es sich bei $\angle BCD$ und $\angle BCE$ um Nebenwinkel handelt, sind alle diese Winkel Rechte.

- Ist $\overline{EF} < \overline{BC}$, so geht man ähnlich wie bei „>“ vor, man benutzt einen Punkt Y mit $F - E - Y$ und $\overline{FY} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$.

Da sich die drei Möglichkeiten gegenseitig ausschließen, folgt die Umkehrung ganz einfach per Widerspruch.