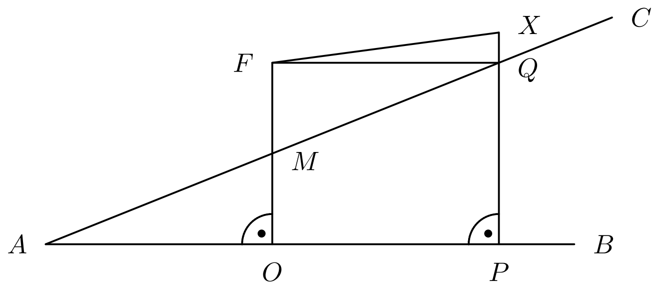
Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 10** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 30:



a) Man verlängere $\overline{OM}$ über M hinaus zu einem Punkt F, so dass $\overline{MF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OM}$ ist. Nach Voraussetzung ist $\overline{AM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MQ}$, und außerdem liegen bei M Scheitelwinkel vor. Danach ist $AOM \mathrel{\widehat{=}} MQF$ (SWS), und $\angle MFQ = \angle AOM = R$.

Annahme, $\overline{MO} > \frac{1}{2}\overline{PQ}$. Dann ist $\overline{FM} > \overline{PQ}$. Man verlängere $\overline{PQ}$ über Q hinaus zu einem Punkt X, so dass $\overline{PX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OF}$ ist.

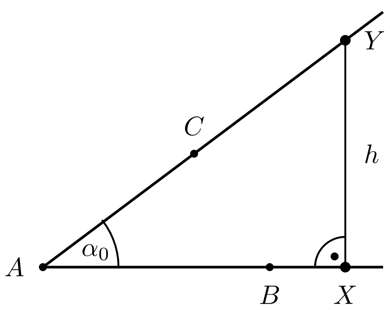
Der Winkel $\angle OFX$ ist größer als ein Rechter, weil er den rechten Winkel $\angle MFQ$ enthält. Weil das Viereck $OPXF$ ein Saccheri-Viereck ist, muss $\angle PXF = \angle OFX$ sein (Gipfelwinkel), also auch größer als ein Rechter. Damit ist die Winkelsumme in $OPXF$ größer als 4 Rechte. Nach dem 2. Satz von Saccheri-Legendre ist die Winkelsumme in jedem Dreieck $\leq 2R$, in jedem Viereck also $\leq 4R$. Das ist ein Widerspruch.

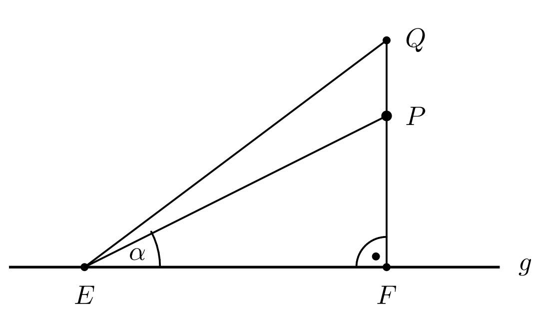
b) Sei eine Strecke $\overline{ST}$ gegeben. Nach dem Axiom von Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \cdot \overline{OM} > \overline{ST}$ ist. Trägt man die Strecke $\overline{AM}$ n-mal von A aus auf dem Strahl $\overrightarrow{AC}$ ab, so erhält man Punkte $Y_1 = M$, $Y_2 = Q$, Y_3, Y_4, $\ldots$, $Y_n =: Y$ auf dem Strahl $\overrightarrow{AC}$ mit $\overline{Y_iY_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AM}$. Sei F_i der Fußpunkt des Lotes von Y_i auf AB, für $i = 1, \ldots, n$. Speziell ist dann $F_1 = O$ und $F_2 = P$. Nach Teil (a) ist

$$\overline{F_2Y_2} \geq 2 \cdot \overline{OM}, \quad \overline{F_3Y_3} \geq 3 \cdot \overline{OM}, \quad \ldots, \quad \overline{F_nY_n} \geq n \cdot \overline{OM} > \overline{ST}.$$

Aber $\overline{F_nY_n}$ ist das Lot von Y auf AB. Also ist Y der gesuchte Punkt.

Lösung zu Afg. 31: Sei F der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Nach Aufgabe 30 gibt es einen Punkt $Y \in \overrightarrow{AC}$, so dass das Lot $h := \overline{YX}$ von Y auf AB größer als $\overline{FP}$ ist.



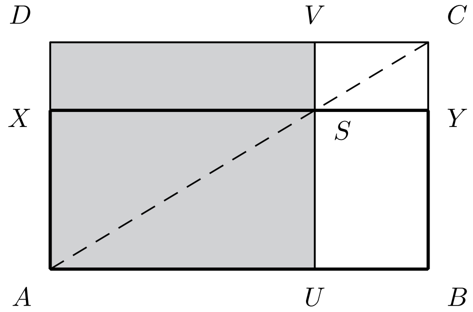


Man verlängere nun $\overline{FP}$ über P hinaus bis zu einem Punkt Q mit $F - P - Q$ und $\overline{FQ} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}$. Dann trage man $\overline{AX}$ bei F auf g ab, der Endpunkt sei mit E bezeichnet.

Die Dreiecke AXY und EFQ sind kongruent (SWS). Insbesondere ist $\angle FEQ \mathrel{\widehat{=}} \angle BAC = \alpha_0$. Der Winkel $\alpha = \angle FEP$ ist in α_0 enthalten, also kleiner als α_0. Und die Gerade $g' = EP$ durch P trifft g in E unter dem Winkel α.

Lösung zu Afg. 32: a) Gegeben sei das Rechteck $ABCD$, sowie ein Punkt S auf der Diagonale $\overline{AC}$ (mit $A - S - C$).

i) Die Parallelen zu den Seiten des Rechtecks durch S führen zu einer Aufteilung in vier Teil-Rechtecke $AUSX$, $UBYS$, $XSVD$ und $SYCV$. Dazu muss man allerdings wissen, dass sich die Schnittpunkte der Parallelen mit den Seiten des Ausgangs-Rechtecks dort befinden, wo sie laut Skizze zu sein scheinen.



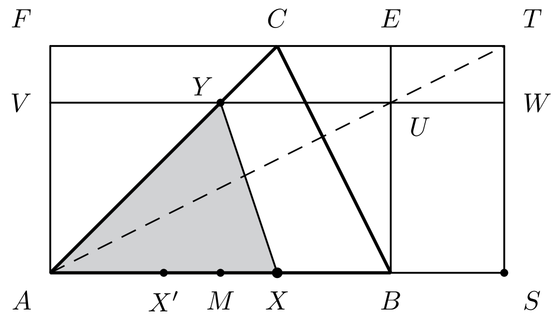
Man kann zum Beispiel so argumentieren:

Die Parallele ℓ_1 zu AD durch S trifft die Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ACD in S, muss nach Pasch also noch eine weitere Seite dieses Dreiecks treffen. Wegen der Parallelität von AD und ℓ_1 kann dies nur die Seite $\overline{DC}$ sein (denn ℓ_1 trifft natürlich keinen der Punkte A, C oder D). Also gilt $D - V - C$. Nach dem Satz über Winkelbeziehungen an Parallelen wird DC von ℓ_1 unter einem rechten Winkel getroffen.

Analog beweist man die entsprechenden Aussagen über den Schnittpunkt U von ℓ_1 mit AB und die Schnittpunkte X und Y von ℓ_2 (der Parallele zu AB durch S) mit AD bzw. BC. Offensichtlich sind die Vierecke $XSVD$ und $UBYS$ Parallelogramme mit drei (und damit auch vier) rechten Winkeln, also Rechtecke.

ii) Die Dreiecke ABC und ACD sind kongruent, aber auch die Dreiecke AUS und ASX bzw. SYC und SCV. Nach dem Prinzip von der Ergänzungsgleichheit haben dann die Rechtecke $XSVD$ und $UBYS$ die gleiche Fläche. Und nach dem gleichen Prinzip folgt daraus, dass $ABYX$ und $AUVD$ die gleiche Fläche haben.

b) Nun zum eigentlichen Problem:



1. Fall: Ist $X = M$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, so haben AMC und MBC den gleichen Flächeninhalt, man kann also $Y = C$ setzen.

2.Fall: Ist $X \neq M$, so kann man o.B.d.A. annehmen, dass $M - X - B$ gilt. Dann spiegele man X an der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, man erhält X' mit $A - X' - M$ und $\overline{X'M} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MX}$.

Anschließend verlängere man $\overline{AB}$ über B hinaus zu einem Punkt S mit $A - B - S$ und $\overline{BS} \mathrel{\widehat{=}} \overline{X'X}$.

Nun errichte man über $\overline{AB}$ ein Rechteck $ABEF$, dessen obere Seite $\overline{FE}$ durch C geht, sowie über $\overline{AS}$ ein Rechteck $ASWV$ mit gleichem Flächeninhalt. Dieses erhält man nach (a), indem man zunächst über $\overline{AS}$ das Rechteck $ASTF$ (mit der gleichen Höhe wie der des Rechtecks $ABEF$) errichtet und dann die Senkrechte BE zu AS in B mit der Diagonalen $\overline{AT}$ zum Schnitt bringt. Der Schnittpunkt sei mit U bezeichnet, und die Punkte W und V sind dann die Schnittpunkte der Parallelen zu AS durch U mit ST bzw. AF.

Dann sei Y der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ mit $\overline{VW}$. Der existiert, weil A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden VW liegen.

Für Punkte K, L sei wie in der Vorlesung $[KL]$ die Länge der Strecke $\overline{KL}$ (also die Äquivalenzklasse bezüglich der Relation „gleich lang"). Dann ist

$$[AX] = [AX'] + [X'X] = \big([AM] - [X'M]\big) + [X'X] = \big([MB] - [MX]\big) + [BS] = [XB] + [BS] = [XS],$$

also X der Mittelpunkt von $\overline{AS}$. Daraus folgt:

$$\mu(AXY) = \frac{1}{2}[AX] \cdot [AV] = \frac{1}{4}[AM] \cdot [AV] = \frac{1}{4}\mu(ASWV) = \frac{1}{4}\mu(ABEF) = \frac{1}{2}\mu(ABC).$$