Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 1** **Prof. Fritzsche**

Lösung zu Afg. 1: Die Aufgabenstellung war vielleicht für die Studierenden etwas unklar, deshalb hole ich hier etwas weiter aus.

Sei M eine Menge und G eine Gruppe. Eine ***Operation*** der Gruppe G auf M ist eine Abbildung

$$\tau : G \times M \to M, \quad (g, x) \mapsto \tau(g, x) = g \cdot x,$$

mit $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ und $e \cdot x = x$ (wobei e das neutrale Element von G ist).

Man hat dann für jedes $g \in G$ eine bijektive Abbildung $\tau_g : M \to M$ mit $\tau_g(x) = \tau(g, x) = g \cdot x$, und die Abbildung $G \to S(M)$ mit $g \mapsto \tau_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Ein Spezialfall ist die Konstruktion des ***affinen Raumes***. Als Menge hat man da auch eine beliebige Menge A, und die Gruppe ist ein Vektorraum V, aufgefasst als additive Gruppe. Die Gruppenelemente operieren als Translationen: Ist $\mathbf{v} \in V$, so sorgt $\tau_\mathbf{v}$ dafür, dass die Punkte $x \in A$ mit Hilfe von $\mathbf{v}$ ein Stück weitertransportiert werden, zu einem Punkt $y = x + \mathbf{v}$. Man darf dann auch schreiben: $\mathbf{v} = y - x$. Bei dieser Notation ist $y - x$ **nicht** die Subtraktion zweier Punkte, das wäre Blödsinn, sondern nur ein neues Symbol für $\mathbf{v}$, das man nicht trennen darf. Das Symbol ist aber besonders eingängig, weil dann $x + (y - x) = y$ ist. Die Abbildung $\mathbf{v} \mapsto \tau_\mathbf{v}$ wird in der Vorlesung mit τ bezeichnet (was ein kleiner Notations-Missbrauch gegenüber dem hier weiter oben eingeführten Gebrauch von τ ist).

Ist $A = V$, so stimmt die neue Bedeutung von $y - x$ mit der schon vorhandenen Bedeutung als Differenz von Vektoren überein.

Nun zur Aufgabe: In der Aufgabenstellung wird zunächst definiert, wann eine Teilmenge B des affinen Raumes A ein ***affiner Unterraum*** von A genannt wird. Natürlich operiert V auch auf der Teilmenge B, aber es kann passieren, dass einige Vektoren aus V die Punkte von B aus B heraustransportieren. Deshalb braucht man als Vektorraum der Translationen für B in der Regel einen echten Unterraum $W \subset V$, dessen Elemente die Menge B in sich überführen. Die Operation σ von W auf B soll aber nichts völlig Neues sein, sondern einfach die Einschränkung von $\tau : V \to S(A)$ auf W, in Zeichen: $\sigma = \tau|_W : W \to S(B)$.

Jetzt soll der spezielle affine Raum $(\mathbb{A}, V, \tau)$ mit $\mathbb{A} = V = \mathbb{R}^n$ und $\tau_\mathbf{v}(x) = x + \mathbf{v}$ betrachtet werden. Dann kann man die Punkte x in $\mathbb{A}$ auch als Vektoren $\mathbf{x}$ in V auffassen, und $x + \mathbf{v}$ ist nicht nur das Symbol für die Translation, sondern auch eine Vektor-Addition im $\mathbb{R}^n$. Nun sei ein affiner Unterraum (B, W, σ) des affinen Raumes $(\mathbb{A}, V, \tau)$ vorgegeben, sowie Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{A}$, und zwar derart, dass B der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{A}$ ist, der die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_k$ enthält. Außerdem sei schon bekannt, dass $\dim(W) = k$ ist. Diese Zahl wird auch als Dimension von B bezeichnet. Gezeigt werden soll, dass jeder Punkt $x \in B$ eine Darstellung

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \quad \text{mit} \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$$

besitzt, wobei man alle Punkte auch als Vektoren schreiben kann und die Linearkombination natürlich nur im Vektorraum zu verstehen ist. Weil das Ganze wie eine Schwerpunktbildung aussieht (wobei bei einem echten Schwerpunkt noch $0 \le \lambda_i \le 1$ für alle i zu fordern wäre), spricht man auch vom „baryzentrischen Kalkül“.

Um eine Idee für die Lösung zu bekommen, ist es vielleicht kein schlechter Gedanke, einfache Beispiele zu betrachten, etwa im Falle $\mathbb{A} = V = \mathbb{R}^2$.

- Liegt nur **ein** Punkt x_0 vor, so ist $B := \{x_0\}$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$, mit dem Nullraum $\mathbf{0}$ als zugehörigem Vektorraum. Die Gleichung $x_0 = 1 \cdot x_0$ ist trivialerweise erfüllt, und einen kleineren affinen Raum als B wird man nicht finden.

- Sind **zwei** Punkte $x_0, x_1 \in \mathbb{A}$ gegeben, so muss man versuchen, den kleinsten affinen Unterraum des $\mathbb{R}^2$ zu finden, der diese Punkte enthält. Der zugehörige Vektorraum der Translationen muss zumindest den Vektor $\mathbf{v}_1 := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ enthalten, also auch den 1-dimensionalen Raum $\mathbb{R}\mathbf{v}_1$. Und dann umfasst B zumindest die affine Gerade

$$L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}_1 \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Offensichtlich ist das sogar der kleinste affine Raum, der das Gewünschte leistet. Ist $\mathbf{x} \in L$, so ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = (1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1.$$

Weil $(1-t) + t = 1$ ist, hat man damit die gesuchte Darstellung.

Nun kann man ahnen, wie der Hase läuft.

Sei U der von den Vektoren $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Dann ist $C := \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u} \,:\, \mathbf{u} \in U\}$ ein affiner Raum, mit U als Vektorraum der Translationen, und sogar ein affiner Unterraum von (A, V, τ), denn es gilt:

1. C ist eine Menge und U ein Vektorraum. Die Abbildung $\varrho : U \to \mathrm{Aut}(C)$ mit $\varrho(\mathbf{u}')(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) := \mathbf{x}_0 + (\mathbf{u} + \mathbf{u}')$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. Sind $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_1$ und $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_2$ zwei Punkte von C, so ist $\mathbf{u} := \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \in U$ der eindeutig bestimmte Vektor mit

$$\varrho_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{u} = \mathbf{x}_2.$$

Und offensichtlich ist $\varrho = \tau|_U$.

Außerdem liegen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{0}$ und die Punkte $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_i$ alle in C. Um zu sehen, dass $C = B$ ist, muss man zeigen, dass C der kleinste Raum ist, der $x_0, x_1, \ldots, x_k$ enthält.

Ein echter affiner Unterraum von C hätte einen echten Untervektorraum $U_1 \subset U$ als Vektorraum der Translationen. Weil dann $\dim(U_1) < \dim(U) \le k$ wäre, muss schon C der gesuchte kleinste affine Raum B sein. Weil dann $\dim U = k$ sein muss, sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ linear unabhängig. Das bedeutet: Zu jedem $\mathbf{x} \in C$ gibt es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, so dass gilt:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0).$$

Setzt man $\lambda_0 := 1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k$, so ist $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ und

$$\mathbf{x} = \lambda_0\mathbf{x}_0 + \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{x}_k.$$

Lösung zu Afg. 2: Sei $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ mit $0 < t < 1$ ein Punkt zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Dann ist

$$\frac{d(\mathbf{a},\mathbf{x})}{d(\mathbf{x},\mathbf{b})} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b} - \mathbf{x}\|} = \frac{t\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|}{|t-1| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|} = \frac{t}{1-t}\,,$$

weil $(t-1)\mathbf{a} = t\mathbf{b} - \mathbf{x} = \mathbf{b} + (t-1)\mathbf{b} - \mathbf{x} = (\mathbf{b} - \mathbf{x}) + (t-1)\mathbf{b}$ ist.

Ist $\alpha/\beta = t/(1-t)$, so ist $(1-t)\alpha = t\beta$ und $t = \alpha/(\alpha+\beta)$, sowie $1 - t = \beta/(\alpha+\beta)$. Daraus folgt:

$$\mathbf{x} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,\mathbf{b}\,.$$

Lösung zu Afg. 3: a) Nach Voraussetzung ist $d(\mathbf{a},\mathbf{x}) : d(\mathbf{x},\mathbf{b}) = \alpha/\beta$ mit $\alpha = \beta = 1$. Nach Aufgabe (2) ist dann $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, also

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

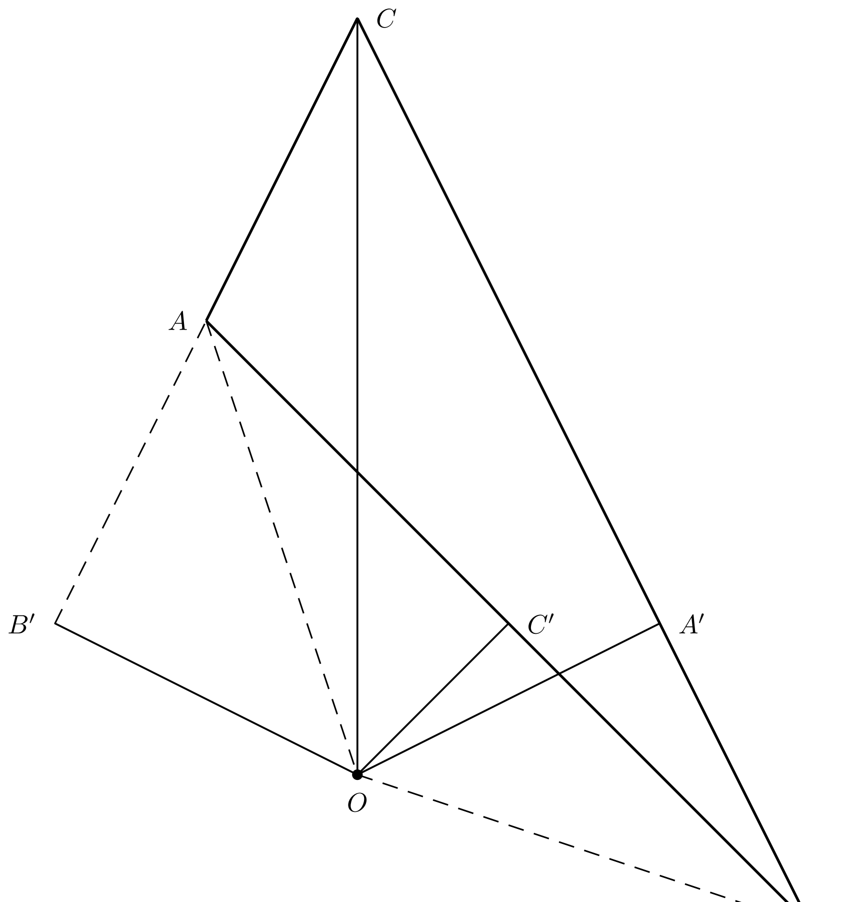
b) Die Seitenmitte der Seite $\overline{\mathbf{bc}}$ ist der Punkt $\mathbf{m}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$. Die Verbindungsstrecke von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{m}_a$ ist die Menge

$$\begin{aligned} S_a &:= \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{m}_a - \mathbf{a}) \,:\, 0 \le t \le 1\} \\ &= \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t \cdot \big(\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\big) \,:\, 0 \le t \le 1\} \\ &= \{\mathbf{x} = (1-t)\cdot \mathbf{a} + \frac{t}{2}\mathbf{b} + \frac{t}{2}\mathbf{c} \,:\, 0 \le t \le 1\}. \end{aligned}$$

Setzt man $t := 2/3$ ein, so erhält man, dass der Schwerpunkt $\mathbf{s} := \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ auf S_a liegt.

Da die analoge Rechnung für die beiden anderen Seitenhalbierenden zum gleichen Ergebnis führt, ist $\mathbf{s}$ der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden.

Lösung zu Afg. 4: Der Beweis ist fast korrekt, inklusive der Anwendung von SSW. Der Fehler liegt ganz am Anfang (in der Skizze) und ganz am Schluss (in der Anwendung der Anschauung aus der Skizze). Wenn das Dreieck nicht sowieso gleichschenklig ist, trifft von den beiden Loten OA' und OB' immer eins die Dreiecksseite im Innern und eins im Äußeren. Deshalb muss einmal die Summe und einmal die Differenz zweier Strecken berechnet werden.



Hier ist $OA = OB$, $B'C = A'C$, $OB' = OA'$ und $AB' = BA'$, aber $AC = B'C - AB'$ und $BC = A'C + BA'$. Um zu zeigen, dass der Original-Beweis falsch war, genügt die Angabe dieses einen Gegenbeispiels.