Klausur zur Geometrie – WS 2015/16 – 11.02.2016

Spätestens nach der Klausur hat wohl jeder festgestellt, dass es verschiedene Versionen gab, tatsächlich waren es vier. Hier werden die verschiedenen Aufgaben und ihre Lösungen zusammengefasst und gemeinsam vorgestellt.

Jeder hatte eine einfache Aufgabe über Geradendarstellungen zu bearbeiten, teils reell, teils komplex. Nachdem ich in den letzten Vorlesungen mehrfach intensiv darauf hingewiesen habe, dass die komplexen Zahlen eine wichtige Rolle spielen könnten, durfte das eigentlich kein Problem darstellen. Es gab ja sogar ein Übungsblatt allein zum Modell $\mathbb{C}$. Und nachdem das erste Kapitel der Vorlesung ausführlich vom Modell $\mathbb{R}^2$ gehandelt hat, dachte ich, dass jetzt jeder angehende Lehrer in der Lage wäre, Geradengleichungen aufzustellen, Senkrechte zu berechnen und lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen. Da habe ich mich leider getäuscht.

Jeder von Ihnen hat auch eine der beiden leichten Aufgaben bekommen: Eine Anwendung des Pasch-Axioms oder die Konstruktion eines Saccheri-Vierecks aus einem Dreieck gleicher Fläche.

Jeder musste aus zwei Verständnis-Fragen eine auswählen und beantworten. Das lief sogar einigermaßen. Wer regelmäßig in der Vorlesung war und sich fleißig auf die Klausur vorbereitet hatte, konnte diese Aufgabe halbwegs anständig lösen.

Zwei der Aufgaben waren etwas schwieriger. Jeder sollte eine davon lösen:

a) Die Konstruktionsaufgabe mit dem Umkreismittelpunkt war nur eine Konstruktionsaufgabe der klassischen Geometrie, die eigentlich jeder hätte lösen können müssen. Der Teufel steckte im Detail, es mussten ja genaue Begründungen etwa für die Existenz von Schnittpunkten angegeben werden. Was ich nicht erwartet hatte: Viele haben den Text nicht richtig gelesen und deshalb die Aufgabenstellung nicht richtig verstanden, oder sie haben nach einem Semester immer noch nicht den Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Geometrie verstanden.

b) Die Aufgabe, in der eine nichteuklidische Parallele mit gemeinsamer Senkrechte konstruiert werden sollte, war zunächst ohne Hilfe gedacht gewesen. Erst im letzten Augenblick habe ich einen ausführlichen Hinweis dazu formuliert, wie der Beweis in zwei Schritten ausgeführt werden könnte. Leider hat das einigen nicht geholfen, sondern sie eher verwirrt. Gründliches Lesen des Aufgabentextes hätte sehr geholfen.

Generell hatten viele immer noch Probleme damit, zwischen Voraussetzung, Behauptung und Beweis zu unterscheiden, logisch zu schließen und grundlegende mathematische Regeln zu befolgen. Sofern Sie das betrifft, befinden Sie sich zwar in guter Gesellschaft mit Politikern und Fernsehschaffenden, sollten aber als künftige Mathematiklehrer vielleicht doch noch ein wenig an sich arbeiten.

Die Bewertung habe ich sehr milde gestaltet, schon mit 15 Punkten gab es ein „Bestanden". Einige, die noch schlechter waren, konnten erfolgreich den Bonus einsetzen, um wenigstens die 4,0 zu erhalten. Obwohl ich auch beim Klausur-Bonus großzügig war, hat es nicht jeder geschafft. Für eine zu 100% erfolgreich bearbeitete Aufgabe gab es einen Bonuspunkt, zwei Bonuspunkte musste man erreichen. Für die erfolgreiche Bearbeitung einer Aufgabe habe ich erwartet,

- dass ich die Lösung lesen und formal nachvollziehen kann (auch wenn sie falsch ist),
- dass ich zu allen Aufgabenteilen Lösungsversuche vorfinde
- und dass die verwendete Argumentation nicht völlig idiotisch ist und nicht zu viele elementare Regeln mathematischer Ausdrucksweise verletzt. Sonst ist die Vergabe eines Scheins nicht zu vertreten.

In Einzelfällen konnten Mängel durch besondere mündliche Leistungen in den Übungsstunden ausgeglichen werden. Wenn nicht, bleibt immer noch eine mündliche Nachprüfung.

Die Aufgaben

Mit **(N)** sei die neutrale Geometrie bezeichnet, mit **(EP)** das euklidische und mit **(HP)** das hyperbolische Parallelenaxiom, sowie mit **(HSW)** die Hypothese vom spitzen Winkel.

1) Euklidisches Modell:

Der $\mathbb{R}^2$ ist ein Modell für die euklidische Geometrie. Bestimmen Sie in diesem Modell für die Gerade g_1 durch $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ und $(x_2, y_2) = (5, -1)$ die Gleichung $ax + by = r$ und die vektorielle Parameterform $g_1 = \{\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}_0 + t\overrightarrow{v} \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

Berechnen Sie außerdem die Geradengleichung und die Parameterform der Parallele g_2 zu g_1 durch $(x_0, y_0) = (4, 3)$, sowie die Geradengleichung und den Fußpunkt (p_0, q_0) des Lotes g_3 von $(u_0, v_0) = (6, 7)$ auf g_1.

Berechnen Sie außerdem das Bild (c_0, d_0) des Punktes $(a_0, b_0) := (3, 9)$ unter der Spiegelung σ an der Geraden g_3.

Die komplexe Version:

Die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ ist ein Modell für die euklidische Geometrie.

Bestimmen Sie in diesem Modell die Parameterform $g_1 = \{z = z_0 + tv \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ der Geraden durch $z_1 = -1+3\,\mathsf{i}$ und $z_2 = 5-\mathsf{i}$, sowie die Koeffizienten $c \in \mathbb{C}$ und $\delta \in \mathbb{R}$ der Geradengleichung $cz + \overline{cz} + \delta = 0$ von g_1.

Berechnen Sie außerdem die Parallele g_2 zu g_1 durch $z_0 := 4 + 3\,\mathsf{i}$, sowie die Parameterform und den Fußpunkt p_0 des Lotes g_3 von $u_0 := 6 + 7\,\mathsf{i}$ auf g_1.

Berechnen Sie schließlich das Bild c_0 des Punktes $a_0 := 3 + 9\,\mathsf{i}$ unter der Spiegelung σ an der Geraden g_3.

Hinweis: Zwei Dinge sollte man sich beim Rechnen in $\mathbb{C}$ überlegen, weil sie helfen könnten: Was ist $z + \overline{z}$, wenn $z = x + \mathsf{i}\,y$ ist? Und wie sieht $\mathsf{i} \cdot z$ geometrisch aus, wenn man z als Vektor betrachtet?

2) Verständnis-Fragen:

(A) Euklids Postulat V wurde von Anfang an verdächtigt, gar kein Axiom, sondern eher ein Satz zu sein.

Formulieren Sie das komplette Postulat V und dann mindestens drei von Postulat V deutlich verschiedene, aber dazu äquivalente Aussagen, die bei späteren Beweisversuchen entdeckt wurden. Die Version von Playfair sollte **nicht** dazu gehören, aber eine der Aussagen sollte eine der „drei Hypothesen“ sein, die auf Omar Khayyam zurückgehen.

(B) Erklären Sie im Kontext der neutralen Geometrie, was man unter dem Parallelitätswinkel versteht, und zwar so, dass das auch jemand verstehen kann, der bei diesem Abschnitt gerade in der Vorlesung gefehlt hat.

(C) Das Axiomensystem Euklids findet man in den 300 v.Chr. entstandenen „Elementen“. Es besteht aus den fünf Postulaten und einigen sehr allgemein gehaltenen Axiomen. Schildern Sie in ca. 5 bis 6 (vollständigen deutschen) Sätzen, worin Ihrer Meinung nach die eklatantesten Lücken in diesem Axiomensystem bestehen.

(D) Erklären Sie in wenigen (vollständigen deutschen) Sätzen, was Horozykel sind und in welchem mathematischen Kontext sie auftreten. Kann ein Horozykel drei kollineare Punkte enthalten? Begründen Sie – wenn Sie können – die Antwort!

3) Anwendung des Pasch-Axioms:

Vorausgesetzt sei **(N)**. Gegeben sei ein Dreieck ABC, sowie Punkte D und E mit $A - C - D$ und $B - E - C$. Zeigen Sie, dass DE die Seite $\overline{AB}$ trifft.

Alternative (gespiegelte) Aufgabe:

Vorausgesetzt sei **(N)**. Gegeben sei ein Dreieck ABC, sowie Punkte D und E mit $B - C - D$ und $A - E - C$. Zeigen Sie, dass DE die Seite $\overline{AB}$ trifft.

4) Dreieck und Saccheri-Viereck:

Vorausgesetzt sei die neutrale Geometrie **(N)**. Zeigen Sie:

Zu einem gegebenen Dreieck ABC kann man ein Saccheri-Viereck mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

1. Das Dreieck und das Viereck haben den gleichen Flächeninhalt.
2. Die Summe der Gipfelwinkel des Saccheri-Vierecks stimmt mit der Winkelsumme des Dreiecks überein.

Hinweis: Es handelt sich hier um eine Standard-Situation aus der Vorlesung.

5) Euklidische Konstruktion:

Vorausgesetzt werden **alle** Axiome der Geometrie **einschließlich Parallelenaxiom.**

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und eine weitere Strecke $\overline{XY} > \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$, sowie ein Winkel $\alpha < \pi/2$. Zeigen Sie, dass es Punkte S und C auf der gleichen Seite von AB gibt, so dass gilt:

1. $\angle BAC = \alpha$.
2. Der Kreis um S mit Radius $\overline{XY}$ trifft alle drei Ecken des Dreiecks ABC.

(Mit anderen Worten: Ein Dreieck ABC kann aus der Seite $c = \overline{AB}$, dem Winkel $\alpha = \angle BAC$ und dem Umkreisradius r konstruiert werden. Dabei unterliegt der Radius natürlich gewissen Einschränkungen).

Ist diese Lösung eindeutig?

Machen Sie deutlich, welche Aussagen zum Schnittverhalten von Geraden und Kreisen Sie benutzen.

6) Parallelen und Saccheri-Vierecke:

Vorausgesetzt werde die neutrale Geometrie **(N)** und die Hypothese vom spitzen Winkel **(HSW)**. Insbesondere beträgt dann die Winkelsumme in jedem Dreieck weniger als 180°.

Sei g eine Gerade, $P \notin g$ ein Punkt, F der Fußpunkt des Lotes von P auf g, sowie $\overrightarrow{PQ}$ ein Strahl, der auf PF senkrecht steht.

Zeigen Sie, dass es einen Strahl $\overrightarrow{PL}$ gibt, der ins Innere des Winkels $\angle FPQ$ zeigt, so dass g und $g' := PL$ eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Abstand zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und g bei Q größer als bei P ist und folgern Sie daraus, dass es unterhalb von PQ ein auf g stehendes Saccheri-Viereck mit Seitenlinie $\overline{FP}$ gibt. Benutzen Sie notfalls die erste Aussage ohne Beweis, um wenigstens die zweite Aussage beweisen zu können. Und denken Sie daran, dass ein Widerspruchsbeweis oft weiterhilft.

Lösung zu Afg. 1: Die Parameter-Darstellung einer Geraden ist besonders einfach zu finden, sie gehört zum Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Offensichtlich ist $\overrightarrow{v} := (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (5, -1) - (-1, 3) = (6, -4)$ ein Richtungsvektor für g_1, also $g_1 = \{\overrightarrow{x} = (-1, 3) + t \cdot (6, -4) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

Was die Geradengleichung ist, wurde in der Aufgabe angegeben, obwohl man das auch so aus der Vorlesung wissen konnte. Die Darstellung $y = mx + b$ der Geraden als Funktion war jedenfalls nicht gemeint, denn die kann man nicht bei jeder Geraden verwenden. Die richtige Gleichung, nämlich $ax + by = r$, führt – wenn man die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) einsetzt – zu den beiden Gleichungen $-a + 3b = r$ und $5a - b = r$, also $b = 3r/7$ und $a = 2r/7$. Die Variable r ist zwar immer noch da, aber wenn man a und b in die ursprüngliche Geradengleichung einsetzt, dann kürzt sich r heraus. Damit erhält man schließlich die gesuchte Gleichung: $2x + 3y = 7$.

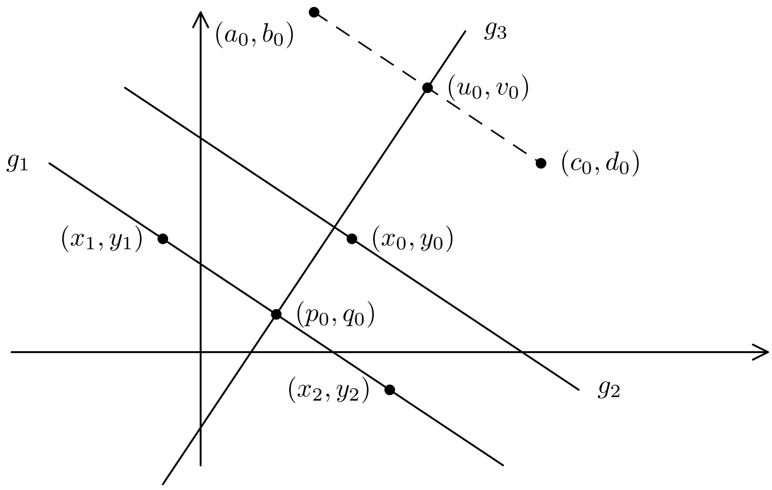
Jede Parallele zu g_1 erfüllt eine Gleichung $2x + 3y = s$, mit einer neuen rechten Seite. Weil g_2 durch $(x_0, y_0) = (4, 3)$ gehen soll, ist $s = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$. Damit hat man schon mal die Geradengleichung für g_2, nämlich $2x + 3y = 17$. Als Richtungsvektor für g_2 kann man wieder $\overrightarrow{v}$ verwenden. Also ist

$$g_2 = \{\overrightarrow{x} = (4, 3) + t \cdot (6, -4) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Als nächstes soll das Lot g_3 von $(u_0, v_0) = (6, 7)$ auf g_1 berechnet werden.[1] Der Richtungsvektor von g_3 muss auf $\overrightarrow{v} = (6, -4)$ senkrecht stehen. Da bietet sich der Vektor $(4, 6)$ an (denn es ist $(6, -4) \bullet (4, 6) = 24 - 24 = 0$), es ist also

$$g_3 = \{\overrightarrow{x} = (4, 4) + t \cdot (4, 6) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Gerade geht durch die Punkte $(4, 4)$ (bei $t = 0$) und $(8, 10)$ (bei $t = 1$) und wird durch eine Gleichung der Form $3x - 2y = m$ beschrieben, weil $(3, -2) \bullet (2, 3) = 0$ ist. Setzt man den Punkt $(4, 4)$ ein, so erhält man $m = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 4$, also die Geradengleichung $3x - 2y = 4$. Den Fußpunkt (p_0, q_0) des Lotes erhält man als Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_3, also durch das Gleichungssystem $2x + 3y = 7$ und $3x - 2y = 4$. Multipliziert man die erste Gleichung mit 3 und die zweite mit 2, so ergibt die anschließende Subtraktion die Gleichung $y = 1$. Setzt man das wieder ein, so erhält man die Lösung $(p_0, q_0) = (2, 1)$.



Um den Spiegelpunkt von $(a_0, b_0) = (3, 9)$ an der Geraden g_3 zu berechnen, braucht man die Senkrechte g_4 zu g_3 durch (a_0, b_0). Ein Richtungsvektor von g_4 ist natürlich der Richtungsvektor $(6, -4)$ von g_1. Also ist

$$g_4 = \{\overrightarrow{x} = (3, 9) + t \cdot (6, -4) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

[1] Eigentlich sollte $(u_0, v_0) = (4, 4)$ sein, aber irgendwie hat sich das bei der Klausurvorbereitung in $(6, 7)$ verwandelt. Weil beide Punkte auf g_3 liegen, macht das nichts.

Die Geradengleichung von g_4 hat die Form $2x + 3y = n$, und weil g_4 durch den Punkt $(3, 9)$ geht, ist $n = 33$. Der Schnittpunkt von g_4 und g_3 ist die Lösung (s_0, t_0) des Gleichungssystems $3x - 2y = 4$ und $2x + 3y = 33$. Man erhält $(s_0, t_0) = (6, 7)$.

Nun ist $(a_0, b_0) = (6, 7) + (-3, 2)$, also $(c_0, d_0) = (6, 7) - (-3, 2) = (9, 5)$ der gesuchte Spiegelpunkt.

Die komplexe Version:

Der Hinweis zielt auf Folgendes: Ist $z = x + \mathrm{i}\, y$, so ist $z + \overline{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z)$. Stellt man sich z als Vektor (x, y) vor, so ist $\mathrm{i} \cdot z$ der um $90°$ gedrehte Vektor $(-y, x)$.

$v := z_2 - z_1 = (5 - \mathrm{i}\,) - (-1 + 3\,\mathrm{i}\,) = 6 - 4\,\mathrm{i}$ ist ein Richtungsvektor für g_1, und deshalb ist

$$g_1 = \{z = -1 + 3\,\mathrm{i} + t \cdot (6 - 4\,\mathrm{i}\,) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Geradengleichung $2\,\mathrm{Re}(cz) + \delta = 0$ wird von z_1 und z_2 erfüllt. Schreibt man $c = a + \mathrm{i}\, b$, so erhält man $0 = \mathrm{Re}\big(c(z_2 - z_1)\big) = \mathrm{Re}\big((a + \mathrm{i}\, b)(6 - 4\,\mathrm{i}\,)\big) = 6a + 4b$, also $(3, 2) \bullet (a, b) = 0$. Das bedeutet, dass man $c = -2 + 3\,\mathrm{i}$ wählen kann (die Geradengleichung ist nur bis auf einen reellen Faktor eindeutig bestimmt). Und dann ist $\delta = -2\,\mathrm{Re}(cz_1) = 14$. Die gesuchte Geradengleichung ist $(-2 + 3\,\mathrm{i}\,) \cdot z + (-2 - 3\,\mathrm{i}\,) \cdot \overline{z} = 14$.

Weil die Geradengleichung im Komplexen etwas schwieriger zu berechnen ist, wird bei den anderen Geraden nur noch die Parameterform nachgefragt. Die Parallele zu g_1 soll durch $z_0 = 4 + 3\,\mathrm{i}$ gehen und besitzt wie g_1 den Richtungsvektor v. Also ist

$$g_2 = \{z = 4 + 3\,\mathrm{i} + t \cdot (6 - 4\,\mathrm{i}\,) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

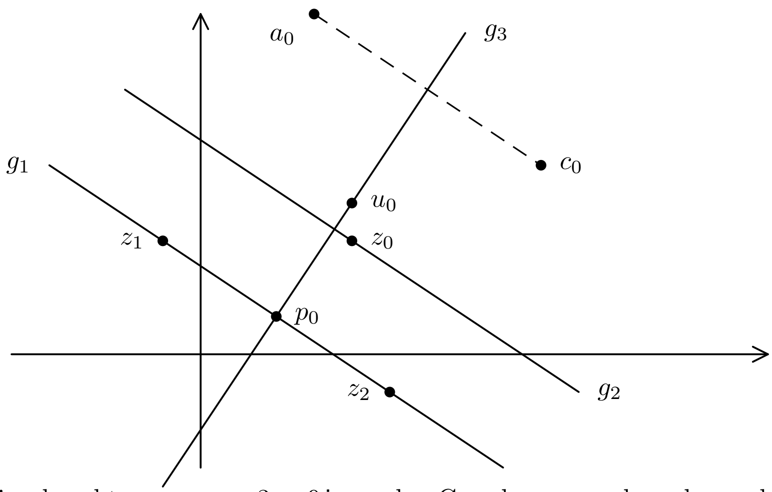
Als nächstes soll das Lot g_3 von $u_0 = 6 + 7\,\mathrm{i}$ auf g_1 berechnet werden. Der Richtungsvektor von g_3 muss auf v senkrecht stehen. Das trifft auf $w = \mathrm{i}\, v = 4 + 6\,\mathrm{i}$ zu, es ist also

$$g_3 = \{z = 6 + 7\,\mathrm{i} + s \cdot (4 + 6\,\mathrm{i}\,) \,:\, s \in \mathbb{R}\}.$$

Den Fußpunkt p_0 des Lotes erhält man als Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_3. Man sucht also Parameter t und s, so dass gilt:

$$-1 + 3\,\mathrm{i} + t(6 - 4\,\mathrm{i}\,) = p_0 = 6 + 7\,\mathrm{i} + s(4 + 6\,\mathrm{i}\,).$$

Vergleicht man Real- und Imaginärteil, so führt das zu dem Gleichungssystem $6t - 4s = 7$ und $2t + 3s = -2$ und der Lösung $s = -1$ und $t = 1/2$, also $p_0 = 2 + \mathrm{i}$.



Um den Spiegelpunkt von $a_0 = 3 + 9\,\mathrm{i}$ an der Geraden g_3 zu berechnen, braucht man die Senkrechte g_4 zu g_3 durch a_0. Ein Richtungsvektor von g_4 ist natürlich der Richtungsvektor $6 - 4\,\mathrm{i}$ von g_1. Also ist

$$g_4 = \{z = 3 + 9\,\mathrm{i} + t \cdot (6 - 4\,\mathrm{i}\,) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Der Schnittpunkt von g_4 und g_3 ist ein Punkt s_0, zu dem es Parameter s und t gibt, so dass gilt:

$$3 + 9\,\mathrm{i} + t(6 - 4\,\mathrm{i}) = s_0 = 6 + 7\,\mathrm{i} + s(4 + 6\,\mathrm{i}).$$

Das führt zu dem Gleichungssystem $6t - 4s = 3$ und $2t + 3s = 1$, also $s = 0$ und $s_0 = 6 + 7\,\mathrm{i}$. Es ist $a_0 = s_0 + (-3 + 2\,\mathrm{i})$ und daher $c_0 = s_0 - (-3 + 2\,\mathrm{i}) = 9 + 5\,\mathrm{i}$ der gesuchte Spiegelpunkt.

Lösung zu Afg. 2: Teilaufgabe (A): Postulat V und äquivalente Aussagen.

Postulat V lautet: Wenn eine Gerade beim Schnitt mit zwei Geraden (innen) auf derselben Seite Winkel einschließt, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so treffen sich diese Geraden bei beliebiger Verlängerung auf der Seite, auf der die (genannten) Winkel liegen.

Äquivalente Bedingungen:

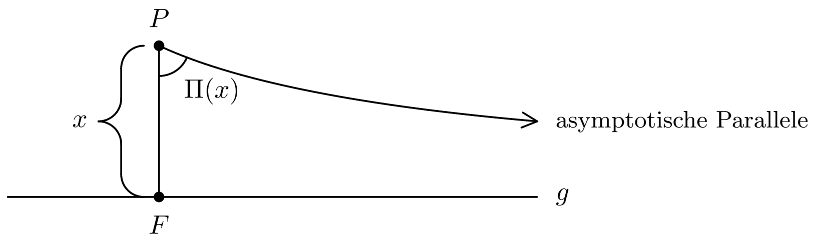
1. Parallele Geraden sind äquidistant.
2. Zu jedem Dreieck gibt es ähnliche Dreiecke beliebiger Größe (Wallis).
3. Werden parallele Geraden von einer dritten geschnitten, so gelten die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z).
4. Khayyams „Hypothese vom rechten Winkel“: In jedem Saccheri-Viereck sind die Gipfelwinkel Rechte.
5. In jedem Dreieck beträgt die Winkelsumme 180°.

Teilaufgabe (B): Was ist der Parallelitätswinkel?

1) Sei g eine Gerade und $P \notin g$ ein Punkt. Ein Strahl $\overrightarrow{PQ}$ heißt asymptotisch parallel zu g, falls gilt: $\overrightarrow{PQ}$ trifft g nicht, aber jeder Strahl $\overrightarrow{PR}$, der ins Innere des Winkels $\angle FPQ$ zeigt, schneidet g. Die asymptotische Parallele ist eindeutig bestimmt.

2) Sei g eine Gerade, $F \in g$ und h die Senkrechte zu g in F. Zu jedem Punkt $P \in h$, der nicht auf g liegt, gibt es einen eindeutig bestimmten zu g asymptotisch parallelen Strahl $\overrightarrow{PQ}$. Den Winkel $\angle QPF$ bezeichnet man als den ***Parallelitätswinkel*** zur Strecke $\overline{FP}$.

Wählt man eine Längenfunktion, so kann man jeder reellen Zahl $x > 0$ den Parallelitätswinkel $\Pi(x) \in (0, \pi/2]$ zuordnen. Gilt das euklidische Parallelenaxiom, so ist $\Pi(x) \equiv \pi/2$. Gilt es nicht, so kommt jeder Winkel $\in (0, \pi/2)$ als Parallelitätswinkel vor.



Teilaufgabe (C): Lücken bei Euklid.

1) Sehr häufig setzt Euklid etwas über die Lage der Dinge zueinander voraus. In modernen Axiomensystemen wird das durch die Anordnungsaxiome geklärt (Bestimmung der beiden Seiten einer Geraden, sowie des Inneren eines Winkels und eines Dreiecks).

2) Ganz unklar ist bei Euklid der Begriff der Deckungsgleichheit. Heute regelt man das mit den Bewegungsaxiomen und dem Begriff der Kongruenz.

3) Schon in seinem ersten Satz nimmt Euklid an, dass sich zwei Kreise in bestimmter Lage schneiden. Dazu braucht man aber das Kreisaxiom oder andere Stetigkeits- oder Vollständigkeitsaxiome.

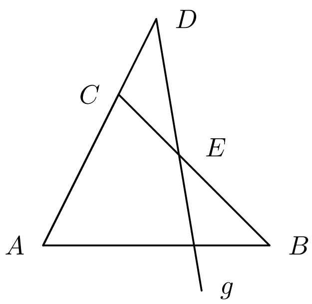
Teilaufgabe (D): Horozykel.

Betrachtet man ein Büschel Σ von Geraden, so nennt man Punkte A und B (auf zwei verschiedenen Geraden von Σ) ***korrespondierend***, falls die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ ebenfalls zu Σ gehört. Dabei interessiert hier der Fall des Büschels $\Sigma(l, \Omega)$ aller Geraden, die in einer festen Richtung Ω zueinander (oder zu der Geraden l) asymptotisch parallel sind. A und B sind genau dann korrespondierend, wenn $\angle BA\Omega \mathrel{\widehat{=}} \angle AB\Omega$ ist.

Die Menge aller Punkte, die bezüglich $\Sigma(l, \Omega)$ zu einem festen Punkt korrespondierend sind, nennt man einen ***Horozykel***.

Drei kollineare Punkte A, B, C können nicht auf einem Horozykel liegen. Begründung: Sei g die Gerade, auf der A, B und C liegen. Die Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sind Parallele mit der gemeinsamen Senkrechten g, also überparallel. Lägen die Punkte auf einem Horozykel, so müssten diese Mittelsenkrechten aber asymptotisch parallel zu den Geraden des Büschels und damit zueinander sein. Das ist nicht möglich.

Lösung zu Afg. 3: Es geht um folgende Situation:



Sei g die Gerade DE.

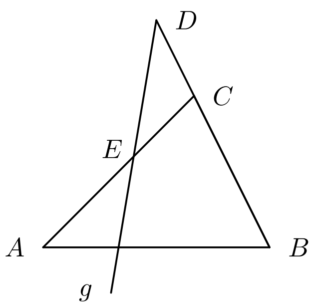
1) Wäre $g = BC$, so wäre $AC = CD = g = BC$, und das kann bei einem Dreieck nicht sein. Analog kann auch $g = AC$ nicht gelten, weil sonst $BC = EC = g = AC$ wäre.

2) g trifft $\overline{BC}$ im Punkt E, wegen (1) aber in keinem anderen Punkt, insbesondere nicht in B oder C. Analog trifft g auch die Gerade AC nur in D und damit $\overline{AC}$ nirgends, insbesondere nicht in A.

3) Das Pasch-Axiom besagt: Trifft eine Gerade eine Seite eines Dreiecks, aber keine der Ecken des Dreiecks, so muss diese Gerade auch noch wenigstens eine zweite Seite des Dreiecks treffen. Nach einem Satz, der als Übungsaufgabe zu beweisen war, können nicht alle drei Seiten getroffen werden.[2] Da in (1) und (2) gezeigt wurde, dass g keine Ecke des Dreiecks trifft, muss g nach Pasch eine der Seiten $\overline{AB}$ oder $\overline{AC}$ treffen. Wegen (2) kann g nur $\overline{AB}$ (in einem inneren Punkt der Strecke) treffen.

Lösung der alternativen Aufgabe:

Es geht um folgende Situation:



Sei g die Gerade DE.

[2] In der Axiomensammlung, die in der Klausur benutzt werden durfte, fand sich leider eine andere Version des Pasch-Axioms. Allerdings haben das die meisten gar nicht gelesen, und bei den anderen führte es nicht zu Punktverlusten.

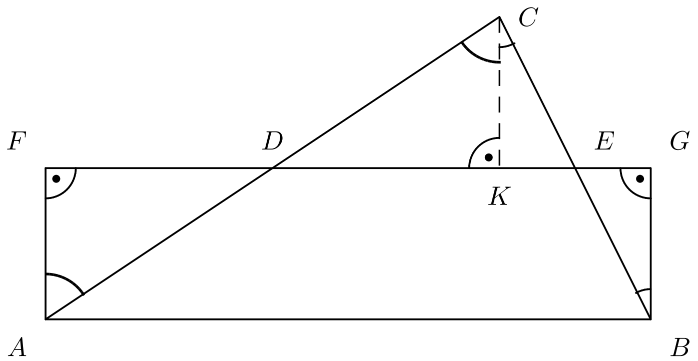
1) Wäre $g = AC$, so wäre $BC = CD = g = AC$, und das kann bei einem Dreieck nicht sein. Analog kann auch $g = BC$ nicht gelten, weil sonst $AC = EC = g = BC$ wäre.

2) g trifft $\overline{AC}$ im Punkt E, wegen (1) aber in keinem anderen Punkt, insbesondere nicht in A oder C. Analog trifft g auch die Gerade BC nur in D und damit $\overline{BC}$ nirgends, insbesondere nicht in B.

3) Nach Pasch muss g eine der Seiten $\overline{AB}$ oder $\overline{BC}$ treffen. Wegen (2) kann g nur $\overline{AB}$ in einem inneren Punkt treffen.

Lösung zu Afg. 4: Sei ABC das gegebene Dreieck. O.B.d.A. sei ABC spitzwinklig (denn der gleiche Beweis funktioniert auch bei stumpfwinkligen Dreiecken). Ein dazu passendes Saccheri-Viereck konstruiert man wie folgt:

1) D sei der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Fällt man noch das Lot von A auf DE mit Fußpunkt F, das Lot von B auf DE mit Fußpunkt G und das Lot von C auf DE mit Fußpunkt K, so erhält man folgende Figur:



Dann gilt:

Es ist $ADF \widehat{=} KDC$ und $BEG \widehat{=} KEC$ (jeweils nach SWW: halbierte Seite, Scheitelwinkel und rechter Winkel).

Also ist $\overline{AF} \widehat{=} \overline{KC} \widehat{=} \overline{BG}$, und $GFAB$ ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{GF}$. Die Summe der beiden Gipfelwinkel $\angle FAB$ und $\angle GBA$ stimmt mit der Summe der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC überein, denn es ist

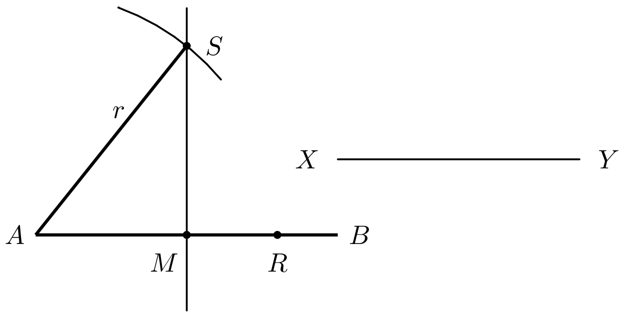
$$\begin{aligned}
\angle BAF + \angle ABG &= (\angle BAC + \angle FAD) + (\angle ABC + \angle EBG) \\
&= \angle BAC + \angle ABC + (\angle DCK + \angle KCE) \\
&= \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB.
\end{aligned}$$

Das Saccheri-Viereck $GFAB$ setzt sich aus dem Viereck $ABED$ und den Dreiecken ADF und EBG zusammen, und das Dreieck ABC setzt sich aus kongruenten Figuren zusammen. Also sind $GFAB$ und ABC zerlegungsgleich und besitzen demnach den gleichen Flächeninhalt.

Lösung zu Afg. 5: In der euklidischen Geometrie schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines Dreiecks im Umkreismittelpunkt S. Hier ist nun allerdings das Dreieck nicht gegeben, sondern nur die Seite $\overline{AB}$, der Winkel α und eine Strecke, die kongruent zum Umkreisradius ist. Der dritte Punkt C des Dreiecks und der Mittelpunkt S des Umkreises müssen konstruiert werden, und zwar mit den Mitteln der synthetischen Geometrie.

Man konstruiert erst mal den Punkt S. Zu diesem Zweck errichtet man die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ im Mittelpunkt M dieser Seite. Dann trägt man die Strecke $\overline{XY}$ bei A auf dem Strahl $\overrightarrow{AB}$ an. Das führt zu einem Punkt R auf $\overrightarrow{AB}$ mit $A - M - R$ und $\overline{AR} \widehat{=} \overline{XY}$.

Der Punkt M liegt im Innern der Kreises $\mathscr{K} = \{Z : \overline{ZA} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}\}$ um A mit Radius $\overline{XY}$, weil R auf dem Kreis liegt und $\overline{AM} < \overline{AR}$ ist. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ geht durch M und muss demnach den Kreis $\mathscr{K}$ in zwei Punkten S_1 und S_2 auf den beiden Seiten von AB treffen (nach einem in der Vorlesung zitierten Satz, der aus dem Kreisaxiom folgt). Sei $S := S_1$. Dann ist $\overline{AS} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}$.

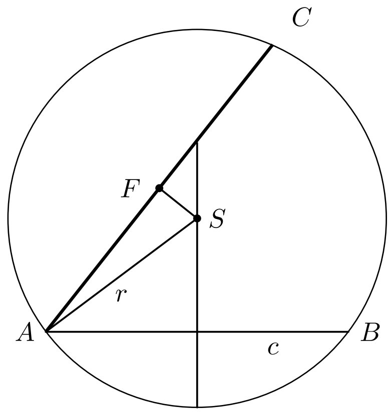


Im zweiten Schritt trägt man den Winkel α bei A an $\overrightarrow{AB}$ an. Sei g die Gerade, die den freien Schenkel von α enthält. Man muss nun zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Liegt S auf g, so enthält g den Mittelpunkt des Kreises $\mathscr{K}_0$ um S mit Radius $\overline{XY}$. Man setze dann $F := S$.

2. Fall: Liegt S nicht auf g, so fälle man das Lot von S auf g und nenne den Fußpunkt F. Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck ASF mit Hypotenuse $\overline{AS}$. Daher ist $\overline{FS} < \overline{AS} \mathrel{\widehat{=}} \overline{XY}$, und F liegt zumindest im Innern von $\mathscr{K}_0$.

Also trifft g auf jeden Fall den Kreis $\mathscr{K}_0$ in zwei Punkten T_1 und T_2 auf verschiedenen Seiten von F. Da $A = T_1$ einer dieser beiden Punkte ist, setze man $C := T_2$.



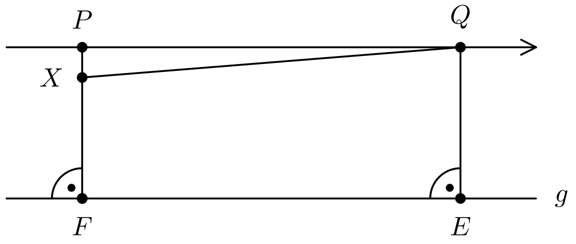
Dann ist $\angle BAC = \alpha$, und offensichtlich trifft der Kreis $\mathscr{K}_0$ die drei Punkte A, B und C. Also ist ABC das gesuchte Dreieck.

Die Lösung ist natürlich nicht eindeutig, weil es für den Punkt S zwei Kandidaten gibt.

Lösung zu Afg. 6: Gegeben ist eine Gerade g, ein Punkt $P \notin g$ und der Fußpunkt F des Lotes von P auf g. Außerdem sei $\overrightarrow{PQ}$ ein Strahl, der in P auf FP senkrecht steht. Nach Konstruktion ist PQ eine Parallele zu g, die mit g eine gemeinsame Senkrechte besitzt, nämlich $h := PF$.

Zu konstruieren ist eine Parallele g' zu g durch P, die in P mit h einen Winkel $< \pi/2$ einschließt, aber trotzdem mit g eine gemeinsame Senkrechte besitzt. In der Aufgabenstellung wird in einem Hinweis ein Beweis in zwei Schritten vorgeschlagen.

1. Teil der Lösung: Es soll gezeigt werden, dass PQ in Q einen größeren Abstand von g aufweist als in P. Fällt man zu diesem Zweck von Q aus das Lot auf g mit Fußpunkt E, so entsteht ein Viereck $FEQP$ mit drei rechten Winkeln (bei E, F und P).



Es soll gezeigt werden, dass $\overline{EQ} > \overline{FP}$ ist. Diese Aussage geht eigentlich aus einem Satz der Vorlesung hervor, aber hier sollte sie doch bewiesen werden. Das geht am besten durch Widerspruch. **Annahme**, es ist $\overline{EQ} \leq \overline{FP}$.

Gilt sogar die Gleichheit, so ist $FEQP$ ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{FE}$ und einem rechten Gipfelwinkel, also ein Rechteck. Das ist unter der Hypothese des spitzen Winkels nicht möglich. Also ist $\overline{EQ} < \overline{FP}$, und es gibt einen Punkt X mit $F - X - P$ und $\overline{FX} \mathrel{\widehat{=}} \overline{EQ}$.

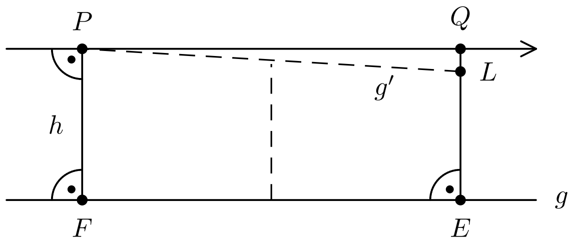
Dann ist $FEQX$ ein Saccheri-Viereck und

$$\angle EQP > \angle EQX = \angle FXQ > \angle FPQ = \frac{\pi}{2},$$

denn $\angle FXQ$ ist Außenwinkel am Dreieck PXQ. Damit ist die Winkelsumme im Viereck $FEQP$ größer als 2π. Auch das kann unter der Hypothese des spitzen Winkels nicht sein.

2. Teil der Lösung: Im ersten Teil wurde gezeigt, dass $\overline{EQ} > \overline{FP}$ ist $(*)$. Das hätte man laut Aufgabenstellung auch als bekannt voraussetzen dürfen, wenn man den ersten Teil nicht geschafft hätte, aber doch wenigstens Punkte für den zweiten Teil bekommen wollte.

Die Aussage $(*)$ kann man nun wie folgt ausnutzen: Man kann einen Punkt L mit $E - L - Q$ finden, so dass $\overline{EL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{FP}$ ist.



Dann ist $FELP$ ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{FE}$. Die Mittellinie dieses Vierecks steht auf $FE = g$ und $PL = g'$ senkrecht (wurde in der Vorlesung bewiesen). Damit besitzen g und g' eine gemeinsame Senkrechte.

Der Winkel $\angle FPL$ ist als Gipfelwinkel in einem Saccheri-Viereck $\leq \pi/2$, also zeigt $\overrightarrow{PL}$ ins Innere des Winkels $\angle FPQ$. Damit ist alles gezeigt.