

# Hinweise zur Klausur

Wie soll ein ernsthafter Versuch, die Klausur zu bearbeiten, aussehen?

1) **Fragen** sollen natürlich beantwortet werden, knapp und klar. Dass Sie die Antwort nicht in allen Fällen wissen, ist dann nicht so schlimm. Man sollte aber nicht den Eindruck haben, dass die Vorlesung völlig spurlos an Ihnen vorüber gegangen ist.

2) Die **Aufgaben** sind – hoffentlich – nicht zu schwer und auch nicht zu umfangreich, und sie stammen aus ganz verschiedenen Gebieten der Vorlesung. Suchen Sie sich zunächst die Aufgaben aus, von denen Sie glauben, dass Sie mit ihnen am besten zurechtkommen. Halten Sie sich nicht zu lange an einer Aufgabe auf, wenn Sie feststecken, sondern versuchen Sie es dann lieber mit der nächsten. Im einzelnen gehen Sie bitte folgendermaßen vor:

- Wer auch immer Ihre Klausur korrigiert, er wird freundlicher gestimmt sein, wenn er verstehen kann, was Sie da aufgeschrieben hat. Schreiben Sie deutlich und verwenden Sie ordentliche Bezeichnungen (zum Beispiel Großbuchstaben für Punkte, Kleinbuchstaben für Geraden und Schreibschrift-Buchstaben für Ebenen und Teilmengen von Ebenen; im Modell  $\mathbb{R}^2$  werden allerdings umgekehrt Punkte mit Kleinbuchstaben und Mengen mit Großbuchstaben bezeichnet).
- Beginnen Sie mit dem Wort „Behauptung“ und formulieren Sie diese Behauptung klar. Wenn Sie die so abändern, dass der Beweis trivial wird, so ist das eine unzulässige Arbeitserleichterung.
- Leiten Sie einen Beweis mit dem Wort „Beweis“ ein und beenden Sie ihn mit irgend einem geeigneten Symbol.
- Schreiben Sie nicht zu ausführlich, Sie dürfen auch (verständliche) Abkürzungen verwenden und sollten so viele Formeln wie möglich benutzen. Allerdings sind auch verbindende Worte oder Sätze nötig, sonst wird der Text unverständlich.
- Skizzen sind in der Geometrie fast unverzichtbar, Sie helfen Ihnen genauso wie dem Korrektor. Zeichnen Sie sorgfältig. Sie brauchen aber weder Zirkel noch Lineal zu verwenden, Sie sollen ja die Skizze nicht als Beweismittel benutzen. Aber sparen Sie nicht mit (verständlichen) Skizzen.
- Unterscheiden Sie um Himmels willen zwischen logischen Aussagen und mathematischen Termen! So etwas wie „ $g$  schneidet  $h \implies C$ “ ist Kauderwelsch und keine Mathematik.
- Wenn Sie am Ende des Semesters nichts können und nichts verstanden haben, dann wird es natürlich schwer mit Beweisen. Aber das wollen wir ja nicht hoffen. Hier ein paar Tipps:
  - Immer mal wieder prüfen, ob man schon alle Voraussetzungen benutzt hat! Kommt eine neue Voraussetzung ins Spiel, so kann es hilfreich sein, diese auf verschiedene Weise zu formulieren, und dann möglichst viele Folgerungen daraus zu ziehen.

- Kommt man an einer Stelle nicht weiter, so überlege man, ob es vielleicht verschiedene (sich gegenseitig ausschließende) Möglichkeiten gibt. Dann bietet sich die Beweismethode „Fallunterscheidung“ an.
- Letzter Ausweg (und in der Geometrie sehr beliebt) ist der Widerspruchsbeweis. Dazu muss man die gewünschte Aussage korrekt verneinen und dann einen Widerspruch herleiten. Kurze Widerspruchsbeweise sind besonders leicht zu führen, lange können auch sehr schwer sein.
- Manchmal hilft es, neue Begriffe einzuführen. Das müssen klare Definitionen sein. Der Beweis von Aussagen vom Typ „Für alle  $X$  gilt: ...“ beginnt in der Regel mit dem Satz „Sei  $X$  beliebig vorgegeben“. Eine Aussage vom Typ „Es gibt ein  $X$  mit ...“ beweist man, indem man ein passendes  $X$  einführt und dessen gewünschte Eigenschaften nachweist. Oft ist es schwierig, dieses  $X$  zu finden. Dann versucht man, das mit Hilfe der gewünschten Eigenschaften herzuleiten. Wenn man Glück hat, dann ist damit schon die Eindeutigkeit von  $X$  bewiesen. Geht man nicht auf diese Weise vor, so zeigt man die Eindeutigkeit, indem man annimmt, dass es zwei derartige Objekte gibt, und dann einen Widerspruch erzeugt. Beim Beweis einer Äquivalenz von zwei Aussagen darf man nicht vergessen, dass diese aus zwei Implikationen besteht.
- Zitate von Axiomen, Definitionen oder Sätzen sind immer gut und steigern das Verständnis. Die Angabe „nach einem Satz der Vorlesung gilt ...“ ist in der Regel zu dünn. Die Angaben „nach dem Satz über Winkelbeziehungen an Parallelen“ oder „nach dem Satz von der Existenz der Spiegelung an einer Geraden“ wären aber zum Beispiel für mich ausreichend, Sie müssen dann den Satz nicht mit allen Details zitieren. Hauptsache ist, Sie wenden ihn richtig an.

Wenn das alles nicht funktioniert, wechseln Sie vielleicht besser zur nächsten Aufgabe! Wenn ein Widerspruchsbeweis richtig angelegt ist, aber am Schluss trotz ernsthafter Bemühungen doch nicht zum gewünschten Widerspruch führt, so kann das wahrscheinlich als gültiger Versuch gewertet werden. Wenn eine Fallunterscheidung funktioniert, aber ein wichtiger Fall übersehen wurde, dann reicht es vielleicht trotzdem.

**Hier ist ein Beispiel eines nicht-ernsthafte Versuchs.** Stellen Sie sich vor, ein Student von Euklid hätte versucht, Postulat V folgendermaßen zu beweisen:

1. Sei  $g$  eine Gerade, sei  $P$  ein Punkt.
2. Jede Gerade  $g'$  durch  $P$  enthält zwei Punkte.
3. Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt.
4. Also ist  $g'$  eindeutig bestimmt.
5. Also gilt Postulat V.

Das ist natürlich völliger Quatsch und kein ernsthafter Versuch. Versetzen Sie sich in die Lage des Lehrers, der das korrigieren soll! Wenn dieser antike Student allerdings die obigen Hinweise gelesen hätte, dann hätte er es vielleicht folgendermaßen versucht:

1. **Voraussetzung:** Es gelten alle Sätze, die vor der ersten Verwendung von Postulat V bewiesen wurden.
2. **Behauptung:** Wenn eine Gerade  $h$  von zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  geschnitten wird und mit diesen auf einer Seite innere Winkel  $< 2R$  bildet, dann schneiden sich  $g_1$  und  $g_2$  auf dieser Seite.
3. **Beweis** (durch Widerspruch): Annahme,  $g_1$  und  $g_2$  schneiden sich nicht.
4. Seien  $A$  bzw.  $B$  die Schnittpunkte von  $h$  mit  $g_1$  bzw.  $g_2$ . Sei  $X$  ein Punkt auf  $g_1$ , der nicht auf  $h$  liegt.
5. Sei  $\ell$  die Senkrechte zu  $g_1$  in  $X$ . Die muss auch  $g_2$  in einem Punkt  $Y$  treffen. (Hier würde eine Skizze folgen).
6. Weil  $g_1$  und  $g_2$  parallel sind, trifft  $\ell$  auch  $g_2$  unter einem rechten Winkel (Winkel an Parallelen).
7. Das Viereck  $AXYB$  hat nun eine Winkelsumme  $< 4R$ . Die Diagonale teilt das Viereck in zwei Dreiecke, und eins davon hat eine Winkelsumme  $< 2R$ . Widerspruch zum Satz über die Winkelsumme im Dreieck!
8. Also war die Annahme falsch, und die Behauptung ist richtig. Was zu beweisen war!

Auch dieser Beweis ist natürlich Unsinn, die Behauptung lässt sich überhaupt nicht aus der Voraussetzung herleiten. Es gibt Fehler in Schritt (4), (5) und (6), aber der falsche Beweis ist richtig strukturiert und sieht nach einem ernsthaften Versuch aus. Die Fehler bestehen darin, dass Postulat V, das ja eigentlich bewiesen werden soll, in Wirklichkeit mehrfach benutzt wird, und das erkennt man vielleicht erst auf den zweiten Blick. Ein korrekter Beweis wäre natürlich – wenn er denn möglich wäre – schöner, aber zur Not reicht's noch zur Bonus-Erfüllung. Man darf nur nicht den Eindruck erwecken, dass man es absichtlich so falsch gemacht hat, denn dann würden die Korrektoren sehr ungnädig reagieren. Übrigens: Wenn ein Beweis mit derartigen Fehlern bei zwei Studierenden auftaucht, womöglich gleich formuliert, dann gehen wir von einem Betrugsversuch aus.