Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 10** **Prof. Fritzsche**

Mit **(N)** sei die Gesamtheit der Axiome der **neutralen Geometrie** bezeichnet, mit **(E-P)** das euklidische Parallelenaxiom (also Postulat V).

30) Es gelte **(N)**, und es sei als bekannt vorausgesetzt, dass dann die Aussagen des 2. Satzes von Saccheri-Legendre wahr sind (siehe Vorlesung am Do, 14.1.).

Gegeben sei ein spitzer Winkel $\angle BAC$, sowie zwei Punkte $M, Q \in \overrightarrow{AC}$ mit $A - M - Q$ und $\overline{AM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MQ}$. Weiter sei O der Fußpunkt des Lotes von M auf AB und P der Fußpunkt des Lotes von Q auf AB. Zeigen Sie:

a) Es ist $\overline{PQ} \geq 2 \cdot \overline{OM}$. **(8 Punkte)**.

b) Ist eine beliebige Strecke $\overline{ST}$ gegeben, so gibt es einen Punkt $Y \in \overrightarrow{AC}$, so dass das Lot von Y auf AB größer als $\overline{ST}$ ist. **(4 Punkte)**.

31) Vorausgesetzt sei **(N)**. Gegeben sei ein Winkel $\alpha_0 = \angle BAC$, so wie eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$. Zeigen Sie, dass es eine Gerade g' durch P gibt, die g unter einem Winkel $\alpha < \alpha_0$ schneidet. **(12 Punkte)**.

Hinweis: Diese Aufgabe wirkt auf den ersten Blick sehr einfach, aber man beachte, dass es manchmal schwer zu entscheiden ist, ob eine Gerade durch P die Gerade g trifft. Ein nützliches Hilfsmittel könnte das Ergebnis von Aufgabe (30b) sein.

32) Für diese Aufgabe sei **(N)** und zusätzlich **(E-P)** vorausgesetzt, und es sei außerdem eine **Längenfunktion** ℓ und eine **Flächenfunktion** μ gewählt, so dass $\mu(\mathscr{Q}) = a^2$ für jedes Quadrat $\mathscr{Q}$ mit Seitenlänge a gilt.

a) Sei $ABCD$ ein Rechteck und S ein Punkt mit $A - S - C$. Zeigen Sie:

(i) Die Parallele zu AB durch S trifft die Seite $\overline{AD}$ in einem Punkt X und $\overline{BC}$ in einem Punkt Y. Analog trifft die Parallele zu AD durch S die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt U und $\overline{DC}$ in einem Punkt V. (Es reicht, eine dieser Aussagen zu beweisen).

(ii) Es ist $\mu(ABYX) = \mu(AUVD)$.

b) Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und ein Punkt X mit $A - X - B$. Zeigen Sie, dass man einen Punkt $Y \in \overline{AC}$ (oder $\in \overline{BC}$) konstruieren kann, so dass $\overline{XY}$ das Innere des Dreiecks in zwei Gebiete mit gleichem Flächeninhalt zerlegt.

Dieser Teil ist eine etwas schwierigere Knobelaufgabe! Aber man bewegt sich komplett im Bereich der vertrauten (aber axiomatischen) euklidischen Geometrie. Man kann insbesondere benutzen, dass die Fläche eines spitzwinkligen Dreiecks gleich der Hälfte der Fläche des umbeschriebenen Rechtecks ist.

6 Punkte für Teil (a) und **10 Punkte für Teil (b)**.

Abgabetermin: Donnerstag, 21.01.2016, 12 Uhr.