Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 9** **Prof. Fritzsche**

27) Die Bezeichnungen und Ergebnisse von Aufgabe 23 können übernommen werden, d.h., es geht hier noch einmal um das Modell $\mathbb{C}$, aber diesmal um den Begriff des Kreises und das Kreisaxiom.

a) Zeigen Sie: Der Kreis um $u \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$ wird in $\mathbb{C}$ durch die Gleichung $z\overline{z} + cz + \overline{cz} + \delta = 0$ mit $c := -\overline{u}$ und $\delta := u\overline{u} - r^2$ beschrieben.

b) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{C}$ das Kreisaxiom erfüllt ist.

Hinweise: Zur Vereinfachung kann man sich die Mittelpunkte der beiden beteiligten Kreise geschickt auf besonders einfache Positionen legen. Man suche dann Punkte $z_1, z_2 \in \mathscr{K}_2$, einen im Inneren und einen im Äußeren von $\mathscr{K}_1$, und zeige, – zum Beispiel mit einem wohlbegründeten Stetigkeits-Argument – dass der Kreisbogen von $\mathscr{K}_2$ zwischen z_1 und z_2 einen Punkt von $\mathscr{K}_1$ enthalten muss. **Es gibt 4 Punkte für (a), 8 Punkte für (b).**

28) Beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Welches Modell zeigt, dass das Kreisaxiom unabhängig von den Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiomen ist?

b) In der axiomatischen Geometrie steht – zumindest **vor** Einführung des Archimedes-Axiom – der Begriff der „Länge“ einer Strecke nicht zur Verfügung. Wie kann man den Mittelpunkt einer Strecke ohne Längenbegriff exakt definieren?

c) In der Vorlesung wurde – als Anwendung der Anordnungsaxiome – erklärt, was man unter den beiden Seiten einer Gerade in der Ebene versteht. Finden Sie entsprechend eine Definition der beiden Seiten eines Punktes auf einer Geraden.

d) Nach Axiom (B.4) gibt es zu Punkten $A \neq B$ stets eine Bewegung φ, die A und B vertauscht. Damit kann man dann die Eindeutigkeit der Strecken-Abtragung beweisen. Warum muss man in diesem Zusammenhang die Existenz von φ axiomatisch fordern? Reicht es nicht, einfach die Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ zu benutzen?

29) Gegeben sei eine Ebene $\mathscr{E}$, in der die Inzidenz-Axiome (I.1) bis (I.3) und die Anordnungsaxiome (A.1) bis (A.5) erfüllt sind.

Für Punkte $P \neq Q$ sei $I(\overline{PQ}) := \{X \,:\, P - X - Q\}$ das „Innere“ der Strecke $\overline{PQ}$. Ein „konvexes Viereck“ ist gegeben durch vier paarweise verschiedene Punkte $A, B, C, D \in \mathscr{E}$, so dass gilt:

a) Keine drei Punkte liegen auf einer Geraden.
b) Die Mengen $I(\overline{AB})$, $I(\overline{BC})$, $I(\overline{CD})$ und $I(\overline{DA})$ sind paarweise disjunkt.
c) Jede der vier „Ecken“ A, B, C, D liegt im Innern des gegenüberliegenden Winkels („gegenüberliegend“ ist so zu verstehen, dass z.B. $\angle BCD$ der A gegenüberliegende Winkel ist).

Zeigen Sie, dass sich die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in einem Punkt treffen.

Hinweise: Wenn man nur Winkel zulässt, die kleiner als zwei Rechte sind, dann kann es bei einem nicht-konvexen Viereck passieren, dass der Winkel bei einer Ecke außerhalb des Vierecks liegt. Bedingung (c) bezieht sich allerdings auf die Winkel „im Innern“ des Vierecks. Man muss also immer darauf achten, ob man tatsächlich einen Winkel vor sich hat, der kleiner als zwei Rechte ist und ein wohldefiniertes Inneres besitzt.

Bei dem **konvexen** Viereck sollte man vielleicht zum Beispiel erst mal zeigen, dass D nicht im Innern des Dreiecks ABC liegt.

Abgabetermin: Mittwoch, 14.01.2016, 12 Uhr. Pro Aufgabe gibt es maximal 12 Punkte.