Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 8** **Prof. Fritzsche**

Benutzt werden können die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome, sowie alle Sätze der neutralen Geometrie. Die Ebene wird wie üblich mit $\mathscr{E}$ bezeichnet.

24) In der Vorlesung wurde der Vergleich und die Addition von Strecken behandelt. In diesem Sinne ist es zu verstehen, wenn davon gesprochen wird, dass eine Strecke kürzer als eine andere ist, oder wenn es etwa um Ungleichungen der Form $\overline{AB} + \overline{BC} < \overline{XY}$ geht.

Sei nun ℓ eine Gerade, die ein Flussufer symbolisieren soll. Ein Bauer startet in einem Punkt $A \notin \ell$, läuft zum Fluss, um Wasser zu holen und dieses zu einem Ort B zu bringen, der sich auf der gleichen Seite von ℓ befindet. Bestimmen Sie den kürzesten Weg für den Bauern.

Anmerkung: Natürlich soll mit den Mitteln der axiomatischen Geometrie **bewiesen** werden, dass der gefundene Weg tatsächlich der kürzeste ist.

Für Aufgabe 24 gibt es maximal 10 Punkte.

25) Für eine Bewegung $\varphi \in \mathscr{B}$ sei $\mathrm{Fix}(\varphi) := \{X \in \mathscr{E} : \varphi(X) = X\}$ ihre „Fixpunktmenge“.

Zeigen Sie: *Enthält* $\mathrm{Fix}(\varphi)$ *zwei Punkte $X_1 \neq X_2$, so ist $\varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ oder φ ist die Spiegelung an der Geraden $\ell := X_1X_2$.*

Freiwillige Zusatzaufgabe:
Bestimmen Sie alle möglichen Fixpunktmengen von Bewegungen $\varphi \in \mathscr{B}$.

Für Aufgabe 25 gibt es maximal 6 Punkte, für die Zusatzaufgabe 2 + 2 + 4 + 4 = 12 Punkte.

26) Es sei $P \in \mathscr{E}$ ein fester Punkt und $\varphi \in \mathscr{B}$ eine Bewegung mit $\mathrm{Fix}(\varphi) = \{P\}$ und $X - P - \varphi(X)$ für alle $X \neq P$ (Die Existenz einer solchen Bewegung braucht zunächst nicht bewiesen zu werden, sie ergibt sich später von selbst). Zeigen Sie:

1. *Es ist $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.*
2. *Die Bewegung φ ist durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt.*
3. *Für jede Gerade $\ell \subset \mathscr{E}$ ist $\varphi(\ell)$ parallel zu ℓ.*
4. *Sind g und h zwei Geraden, die sich in P unter einem rechten Winkel treffen, so ist $\varphi = \mu \circ \lambda$, wenn man die Spiegelungen an g bzw. h mit μ bzw. λ bezeichnet.*

Für Aufgabe 26 gibt es maximal 4 × 3 = 12 Punkte.

Abgabetermin: Donnerstag, 07.01.2016, 12 Uhr. Es sollten 2 von 3 Aufgaben bearbeitet werden, ohne die Zusatzaufgabe.

Allen Teilnehmern wünsche ich frohe Festtage und ein gutes neues Jahr!