Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 7** **Prof. Fritzsche**

23) Die Ebene $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen $z = x + \mathrm{i}\,y$ ist besonders gut als Modell für die ebene Geometrie geeignet. Hier sollen ein paar Dinge dazu berechnet werden.

Zur Erinnerung: Ist $z = x + \mathrm{i}\,y$, so ist $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$ und $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ gibt es eine Polardarstellung $z = |z| \cdot e^{\mathrm{i}\,\theta}$ mit $e^{\mathrm{i}\,\theta} := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ und $\theta \in [0, 2\pi)$.

(A) Eine ***Gerade*** in $\mathbb{C}$ ist eine Menge der Gestalt $L = \{z = z_0 + tv \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ mit $z_0, v \in \mathbb{C}$ und $v \neq 0$. Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_+ &:= \{z = z_0 + uv \,:\, u \in \mathbb{C} \text{ und } \operatorname{Im}(u) > 0\} \\ \text{und} \quad \mathscr{H}_- &:= \{z = z_0 + uv \,:\, u \in \mathbb{C} \text{ und } \operatorname{Im}(u) < 0\} \end{aligned}$$

nennt man die beiden durch L definierten ***Halbebenen***. Außerdem sagt man, dass ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ ***zwischen*** den Punkten z_1 und z_2 liegt, wenn es ein $t \in (0,1)$ mit $z = (1-t)z_1 + tz_2$ gibt.

Zeigen Sie:

a) $\mathscr{H}_+$ ist konvex und $\mathbb{C}$ ist Vereinigung von $\mathscr{H}_+$, $\mathscr{H}_-$ und L.

b) Ist $z_1 \in \mathscr{H}_+$ und $z_2 \in \mathscr{H}_-$, so gibt ein $z \in L$, das zwischen z_1 und z_2 liegt.

Für a) und b) gibt es jeweils maximal 4 Punkte.

(B) Es darf als bekannt vorausgesetzt werden. dass die Inzidenz- und Anordnungsaxiome in $\mathbb{C}$ erfüllt sind. Als ***Bewegungen*** benutzt man dann beliebige Verknüpfungen von

$$\begin{aligned} \text{Translationen} \quad T_a(z &:= z + a, \\ \text{Drehungen um den Nullpunkt} \quad D_\theta(z) &:= e^{\mathrm{i}\,\theta} \cdot z \\ \text{und der Spiegelung} \quad S(z) &:= \overline{z}. \end{aligned}$$

Man beweise, dass im Modell $\mathbb{C}$ die Bewegungsaxiome (B.1) bis (B.5) erfüllt sind.

Pro Axiom gibt es maximal 3 Punkte.

Hinweis: Es kann **nicht** vorausgesetzt werden, dass die Bewegungs-Axiome im $\mathbb{R}^2$ erfüllt sind, vielmehr würde diese Tatsache aus dem Ergebnis der vorliegenden Aufgabe folgen.

Achtung: Abgabetermin am Donnerstag, den 17.12.2015, 12 Uhr.

Der Abgabetermin wird künftig immer Donnertag 12 Uhr sein.