Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 6** **Prof. Fritzsche**

In **Aufgabe 20** und **Aufgabe 21** sei eine Ebene $\mathscr{E}$ gegeben, in der die Inzidenz-Axiome (I.1) bis (I.3) und die Anordnungsaxiome (A.1) bis (A.5) erfüllt sind. Die daraus in der Vorlesung im Abschnitt 2.4 abgeleiteten Sätze und die dort eingeführten Definitionen können verwendet werden, sollten aber zumindest kurz zitiert werden.

20) Gegeben seien vier Punkte $P, Q, R, S \in \mathscr{E}$. Zeigen Sie:

Gilt $P - Q - R$ und $P - S - Q$, so gilt auch $S - Q - R$.

Hinweis: P, Q, R und S liegen auf einer Geraden g. Man finde eine Hilfsgerade h, die g im Punkt Q trifft, und argumentiere mit den beiden „Seiten“ von h.

21) Die Punkte $A, B, C \in \mathscr{E}$ seien nicht-kollinear, und es gelte $A - X - B$, $B - Y - C$ und $A - Z - C$. Zeigen Sie, dass auch X, Y, Z nicht-kollinear sind. (Diese Aussage bedeutet, dass es keine Gerade g gibt, die alle drei Seiten eines Dreiecks trifft).

22) In dieser Aufgabe seien die Axiome (I.1) bis (I.3) und (A.1) bis (A.4) vorausgesetzt. In der Vorlesung wurde aus dem Pasch-Axiom (Axiom A.5) folgende Aussage hergeleitet: Jede Gerade $g \subset \mathscr{E}$ zerlegt den Rest $\mathscr{E} \setminus g$ in zwei disjunkte, nicht leere, konvexe Teilmengen $\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$, so dass für alle $X \in \mathscr{H}_1$ und $Y \in \mathscr{H}_2$ gilt: $\overline{XY} \cap g \neq \varnothing$.

Hier soll nun die Umkehrung bewiesen werden: In $\mathscr{E}$ gelte die Eigenschaft (P^*):

Zu jeder Geraden $g \subset \mathscr{E}$ gebe es eine Zerlegung $\mathscr{E} \setminus g = \mathscr{H}_1 \cup \mathscr{H}_2$, so dass gilt:

1. *$\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$ sind nicht leer und konvex.*
2. $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2 = \varnothing$.
3. $\forall\, X \in \mathscr{H}_1, Y \in \mathscr{H}_2\ \exists\, Z \in g$ *mit* $X - Z - Y$.

Zeigen Sie, dass aus (P^*) das Pasch-Axiom A.5 folgt.

Abgabetermin: Montag, 14.12.2015, 10 Uhr. Pro Aufgabe gibt es maximal 12 Punkte.