Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 5** **Prof. Fritzsche**

17) Man zeige, dass in dem folgenden Modell die Inzidenz-Axiome (I.1), (I.2) und (I.3) erfüllt sind. Als Ebene benutze man $\mathscr{E} := \mathbb{R}^2$, als Geraden die folgenden Mengen:

- „vertikale Geraden“ $g_v(c) = \{(x,y) \,:\, x = c\}$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$,
- „Glatte fallende Geraden“ $g_f(m,b) = \{(x,y) \,:\, y = mx + b\}$ mit $m, b \in \mathbb{R}$ und $m \leq 0$.
- „Geknickte steigende Geraden“

$$g_s(m,b) = \{(x,y) \,:\, y = mx + b \text{ für } x \leq 0, \text{ und } y = \frac{1}{2}mx + b \text{ für } x > 0\}$$

mit $m, b \in \mathbb{R}$ und $m > 0$.

Für diese Aufgabe gibt es maximal 12 Punkte.

18) Gegeben seien die drei Punkte $\mathbf{p}_1 = (2:5:3)$, $\mathbf{p}_2 = (1:-3:-4)$ und $\mathbf{p}_3 = (7:5:-2)$ in der reellen projektiven Ebene $P_2(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte kollinear sind, also auf einer projektiven Geraden g liegen.

b) Zeigen Sie, dass $j : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ mit $j(x,y) := (1:x:y)$ injektiv ist, bestimmen Sie die Menge $j^{-1}\big(g \cap j(\mathbb{R}^2)\big)$ und den Schnittpunkt von g mit der „unendlich fernen Gerade“ $g_\infty := \{(0:s:t) \in P_2(\mathbb{R}) \,:\, (s,t) \neq (0,0)\}$.

Für diese Aufgabe gibt es maximal 12 Punkte.

19) Betrachten Sie das Axiomensystem „MuKoBa“ (Multi-Kombi-Bachelor) aus der Vorlesung mit den primitiven Termen „Student“, „Fach“ und „belegt“. In der Vorlesung wurden drei Axiome formuliert und zwei Sätze bewiesen:
Satz 1: Jeder Student belegt mindestens zwei Fächer.
Satz 2: Jedes Fach wird von mindestens zwei Studenten belegt..

Beweisen Sie (den noch nicht bewiesenen) Satz 3: *Es gibt mindestens 6 Fächer.*

Hinweis: Es könnte die Suche nach der Lösung erleichtern, wenn man das Axiomensystem mal geometrisch interpretiert: „Student“=Punkt, „Fach“=Gerade, „Komplementäres Fach“=Parallele. Allerdings muss der Beweis dann trotzdem mit den Notationen des Systems MuKoBa geführt werden.

Für diese Aufgabe gibt es maximal 16 Punkte!

Abgabetermin: Montag, 7.12.2015, 10 Uhr. Es sind mindestens zwei Aufgaben zu bearbeiten.