# Übungen zur „Geometrie“

**WS 2015/16** **Blatt 4** **Prof. Fritzsche**

**13 )** In der ebenen Geometrie interessiert man sich für Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Für eine Gerade braucht man zwei Punkte, für eine Strecke die beiden Endpunkte, für einen Kreis Mittelpunkt und Radius (letzeren in Form einer vom Mittelpunkt ausgehenden Strecke). Alle Punkte, die sich als Schnittpunkte von gegebenen Geraden oder Kreisen ergeben, sind „konstruierbar“. Als bekannt darf vorausgesetzt werden, dass Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Lote und Senkrechte konstruiert werden können, und für (14), dass das Parallelenaxiom und die Strahlensätze gelten.

a) Gegeben seien ein Punkt $A$ und eine Strecke $\overline{BC}$. Weiter sei $P$ ein Punkt auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ und $D$ der Schnittpunkt des Strahls $\overrightarrow{PB}$ mit dem Kreis $K$ um $B$ mit Radius $r := d(B, C)$. Zeigen Sie: *Man kann einen Punkt $E$ auf dem Strahl $\overrightarrow{PA}$ mit $d(A, E) = d(B, C)$ konstruieren.* Was hat man damit geschafft?

b) Zeigen Sie: *Sind die Größen $a$ und $b$ als Längen von Strecken gegeben, so kann man auch die Größe $a + b$ konstruieren.*

**14 )** (Fortsetzung von Aufgabe 13). Zeige: Sind $a$ und $b$ (als Längen von Strecken) gegeben, sowie eine „Einheitsstrecke“ der Länge 1, so sind die folgenden Größen konstruierbar:

$1/a$, $a \cdot b$ und $\sqrt{a}$ (die Satz-Gruppe des Pythagoras darf benutzt werden).

**15 )** Wenn die Griechen zu Euklids Zeiten besser über die Gestalt der Erde Bescheid gewusst hätten, dann hätten sie vielleicht folgendes Modell für die ebene Geometrie gewählt:

Die „Ebene“ besteht aus den Punkten einer Kugeloberfläche

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Schneidet man $S$ mit einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt, so erhält man einen „Großkreis“ $L = S \cap E$. Solche Großkreise sollen die „Geraden“ in dieser Geometrie sein. Überprüfen Sie, ob in diesem Modell die folgenden Aussagen wahr sind (per Beweis oder Gegenbeispiel):

1. *Durch zwei Punkte $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ geht genau eine Gerade.*
2. *Die Winkelsumme im Dreieck beträgt $180°$ (also $\pi$).*
3. Schwacher Außenwinkelsatz: *Ein Außenwinkel an einem Dreieck ist echt größer als jeder der beiden nicht-anliegenden Innenwinkel.*

**16 )** Die Vollständigkeit der reellen Zahlen kann man mit folgendem Axiom von Dedekind beschreiben: *Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei nicht leere Mengen mit $A \cup B = \mathbb{R}$, so dass $a < b$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.*
(Man nennt $(A, B)$ dann einen ***Dedekind'schen Schnitt***.)

Leiten Sie aus der Gültigkeit des obigen Axioms (und der Körper- und Anordnungsaxiome für $\mathbb{R}$) folgende Aussagen her:

a) zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

b) Ist $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$ eine Folge von Intervallen mit $\alpha_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} < \beta_k$ für alle $k$ und $\lim_{k\to\infty}(\beta_k - \alpha_k) = 0$, so gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$, das in allen $I_k$ liegt.

**Abgabetermin: Montag, 30.11.2015, 10 Uhr.** Pro Aufgabe gibt es maximal 12 Punkte.