Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 3** **Prof. Fritzsche**

Die affine Standardebene $\mathbb{A}^2$ wird hier mit dem zugehörigen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Alles findet in $\mathbb{A}^2$ statt. Sie können alle Ergebnisse aus Kapitel 1 verwenden.

9) Sei $K = K_r(\mathbf{a})$ der Kreis mit Mittelpunkt $\mathbf{a} = (1, 3)$ und Radius $r = \sqrt{10}$.

a) *Berechnen Sie den zweiten Schnittpunkt* $\mathbf{q}$ *der Geraden* L *durch* $\mathbf{p} = (0, 0)$ *und* $\mathbf{z} = (8, 4)$ *mit dem Kreis* K.

b) *Bestimmen Sie die Tangente(n) an* K *durch* $\mathbf{z}$ *und überprüfen Sie an diesem Beispiel die Gültigkeit des Sehnen-Tangenten-Satzes.*

10) a) Gegeben sei ein Dreieck mit den Ecken $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$, den Seitenlängen $a := \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|$, $b := \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\|$ und $c := \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$, sowie den Winkeln α (bei $\mathbf{a}$), β (bei $\mathbf{b}$) und γ (bei $\mathbf{c}$). Sei r der Radius des Umkreises des Dreiecks (dessen Mittelpunkt $\mathbf{z}$ der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der drei Seiten ist). *Zeigen Sie, dass* $a = 2r \sin \alpha$ *und* $b = 2r \sin \beta$ *ist.*

b) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. *Zeigen Sie, dass* MN *parallel zu* AB *ist.*

11) Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Gerade L treffe die Seite $\overline{AB}$, aber keine der drei Ecken A, B und C. *Zeigen Sie, dass* L *entweder die Seite* $\overline{AC}$ *oder die Seite* $\overline{BC}$ *trifft.*

Hinweis: Es ist legitim, eine Isometrie anzuwenden, so dass entweder das Dreieck ABC oder die Gerade L im Koordinatensystem besonders einfach dargestellt werden kann.

12) Ist $L \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, so versteht man unter einer ***Spiegelung an*** L eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für alle $\mathbf{x} \in L$ ist $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
2. Es ist $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.
3. Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus L$ ist die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}$ und $F(\mathbf{x})$ orthogonal zu L, und ihr Mittelpunkt liegt auf L.

Zeigen Sie:

Zu jeder Geraden $L \subset \mathbb{R}^2$ *gibt es genau eine Spiegelung an* L.

Abgabetermin: Montag, 23.11.2015, 10 Uhr. Pro Aufgabe gibt es maximal 12 Punkte.