Übungen zur „Geometrie“

WS 2015/16 **Blatt 1** **Prof. Fritzsche**

1) Sei $(\mathbb{A}, V, \tau)$ der affine Raum mit $\mathbb{A} = V = \mathbb{R}^n$, so dass $\tau(\mathbf{v})$ die Translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$ ist. Ein Tripel (B, W, σ) heißt ***affiner Unterraum*** von $(\mathbb{A}, V, \tau)$, falls $B \subset \mathbb{A}$ eine Teilmenge, $W \subset V$ ein Untervektorraum und $\sigma = \tau|_W$ ist. Als ***Dimension*** des affinen Raumes B (in Zeichen: $\dim(B)$) bezeichnet man die Dimension des zugehörigen Vektorraumes W.

Gegeben seien Punkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{A}$, so dass B der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{A}$ ist, der diese Punkte enthält. Außerdem sei $k = \dim(B) = \dim(W)$. Zeigen Sie: *Zu jedem Punkt* $\mathbf{x} \in B$ *gibt es eindeutig bestimmte Zahlen* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *mit* $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, *so dass* $\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k$ *ist.*

In Aufgabe (2) und (3) soll immer die affine Standard-Ebene $\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2$ mit zugehörigem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachtet werden. Es braucht also nicht zwischen Punkten A, B, C (im affinen Raum) und Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (im Vektorraum) unterschieden zu werden.

2) Von drei Punkten $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aus $\mathbb{A}^2$ ***liegt*** $\mathbf{x}$ ***zwischen*** $\mathbf{a}$ ***und*** $\mathbf{b}$, wenn es eine reelle Zahl t mit $0 < t < 1$ und $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ gibt. Zeigen Sie: *Ist* $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) : d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \alpha/\beta$, *so ist*

$$\mathbf{x} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \mathbf{a} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \mathbf{b}\,.$$

3) a) $\mathbf{x}$ heißt ***Mittelpunkt*** der Strecke $\overline{\mathbf{ab}}$, falls $\mathbf{x}$ zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ liegt und

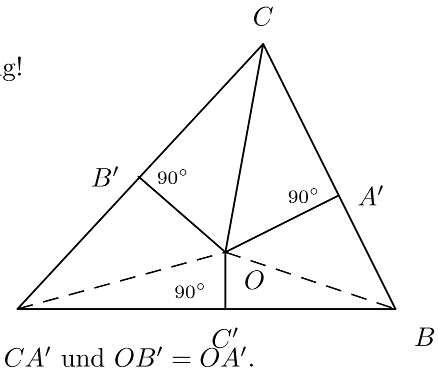
$$d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) : d(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 1$$

ist. *Zeigen Sie, dass dann* $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ *ist.*

b) Die Punkte $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{A}^2$ seien die Ecken eines Dreiecks. Zeigen Sie: *Die drei Seitenhalbierenden (also die Strecken von einer Ecke des Dreiecks zur gegenüberliegenden Seitenmitte) treffen sich im Schwerpunkt* $\mathbf{s} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Aufgabe (4) soll mit den Geometrie-Kenntnissen aus der Schule gelöst werden! Das Zeichen $\widehat{=}$ bedeutet „kongruent“, die Kongruenzsätze (SWS), (WSW) und (SSW) werden als bekannt vorausgesetzt.

4) **Behauptung:** Jedes Dreieck ist gleichschenklig!



„Beweis:“ Im Dreieck ABC wird der Schnittpunkt O der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ mit der Mittelsenkrechten zu AB ermittelt, und von dort aus wird jeweils das Lot auf AC und auf BC gefällt.

1) Es ist $AC'O \mathrel{\widehat{=}} C'BO$ (SWS), und daher $OA = OB$.

2) Es ist $CB'O \mathrel{\widehat{=}} COA'$ (SWW), und daher $CB' = CA'$ und $OB' = OA'$.

3) Es ist $OB'A \mathrel{\widehat{=}} OA'B$ (SSW), also $AB' = BA'$. Nun folgt:
$AC = AB' + B'C = BA' + A'C = BC$. Q.e.d.!

Arbeiten Sie den Beweis nach und finden und begründen Sie den Fehler!

Abgabetermin: Mittwoch, 4.11.2015, 10 Uhr. Pro Aufgabe gibt es maximal 12 Punkte.