Axiomensysteme der Geometrie

Das Axiomensystem (V)

Die ***Ebene*** ist eine Menge $\mathscr{E}$, ihre Elemente heißen *Punkte*. Gewisse Teilmengen von $\mathscr{E}$ werden ***Geraden*** genannt. Ist X ein Punkt, g eine Gerade und $X \in g$, so sagt man: X ***liegt auf*** g.

Inzidenz-Axiome:

(I.1): Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte.
(I.2): Je zwei verschiedene Punkte liegen auf genau einer Geraden (mit AB bezeichnet).
(I.3): Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen.

Anordnungs-Axiome:

Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathscr{E}$ besteht eine Beziehung $A - B - C$ (gesprochen „B liegt ***zwischen*** A und C").

(A.1): Gilt $A - B - C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschieden und ***kollinear*** (d.h., sie liegen auf einer gemeinsamen Geraden).
(A.2): Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.
(A.3): Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau eine der drei Beziehungen $A - B - C$, $B - C - A$ oder $C - A - B$.
(A.4): Für alle $A, B \in \mathscr{E}$ mit $A \neq B$ gibt es ein C mit $A - B - C$.
Pasch-Axiom (A.5): Sei ℓ eine Gerade und A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf ℓ liegen. Ist $\overline{AB} \cap \ell \neq \varnothing$, so ist $\overline{AC} \cap \ell = \varnothing$ oder $\overline{BC} \cap \ell = \varnothing$.

Bewegungs-Axiome:

Es gibt gewisse bijektive Abbildungen von $\mathscr{E}$ auf sich, die ***Bewegungen*** genannt werden.

(B.1): Die Menge $\mathscr{B}$ aller Bewegungen bildet eine Gruppe.
(B.2): Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathscr{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.
(B.3): Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q drei ebenfalls nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es genau eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften: $\quad \varphi(A) = O, \quad \varphi(B) \in \overrightarrow{OP} \quad$ und $\quad \overline{\varphi(C)Q} \cap OP = \varnothing$.

(B.4): Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.

(B.5): Zu jedem Winkel $\alpha = \angle BAC$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}$.

Zwei Figuren (Teilmengen von $\mathscr{E}$) $\mathscr{M}_1$ und $\mathscr{M}_2$ heißen ***kongruent*** (in Zeichen $\mathscr{M}_1 \mathrel{\widehat{=}} \mathscr{M}_2$), falls eine Bewegung φ mit $\varphi(\mathscr{M}_1) = \mathscr{M}_2$ existiert.

Stetigkeits-Axiome:

Das Kreis-Axiom (S.1): Sind $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ Kreise um die Punkte A bzw. B und enthält $\mathscr{K}_2$ sowohl einen Punkt aus dem Inneren als auch aus dem Äußeren von $\mathscr{K}_1$, so gibt es auf beiden Seiten von AB je einen Schnittpunkt der beiden Kreise.

Das Archimedes-Axiom (S.2): Zu zwei Strecken $\overline{PQ} < \overline{AB}$ gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$.

In den meisten modernen Axiomensystemen ersetzt man das Kreis-Axiom durch das (stärkere)
Cantor-Axiom (C): Es sei eine Gerade g und eine Folge von Strecken $s_i = \overline{A_iB_i} \subset g$ gegeben, so dass jeweils $s_{i+1} \subset s_i$ ist und zu jeder Strecke $\overline{PQ}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{A_nB_n} < \overline{PQ}$ existiert. Dann gibt es einen Punkt $X \in g$ mit $X \in s_i$ für alle i.

Die beiden Stetigkeitsaxiome (C) und (S.2) können ersetzt werden durch das gleichwertige
Dedekind-Axiom (D): Sind ein Punkt O, ein von O ausgehender Strahl $\vec{s}$ und zwei Teilmengen $m_u, m_o \subset \vec{s}$ gegeben, so dass für alle $X \in m_u$ und alle $Y \in m_o$ die Beziehung $O - X - Y$ gilt, so gibt es einen Punkt S mit folgender Eigenschaft: Für alle $X \in m_u \setminus \{S\}$ und alle $Y \in m_o \setminus \{S\}$ ist $X - S - Y$.

Parallelen-Axiome:

Es gilt entweder
das euklidische Parallelenaxiom (E-P): Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so geht durch P genau eine Parallele zu g (dies Axiom ist äquivalent zum Postualt V von Euklid).

oder
das hyperbolische Parallelenaxiom (H-P): Es gibt eine Gerade g und einen Punkt $P \notin g$, so dass durch P mindestens zwei verschiedene Parallelen gehen.

Klausur Geometrie WS 2015/16

Matr.-Nr.	Name	Vorname