

### 3.5 Das Poincaré-Modell

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie zeigte die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen der Geometrie. Für den Beweis der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie fehlte aber noch ein Modell! Man hoffte, dass sich eine nichteuklidische Ebene in den euklidischen Raum (isometrisch) einbetten ließe. Diese Hoffnung wurde später durch Hilbert zerstört, der bewies, dass das unmöglich ist.

Allerdings konnte man zumindest einen Teil der nichteuklidischen Ebene, der durch einen Horozykel und zwei Radien begrenzt wird, einbetten. Das war schon Beltrami gelungen, der die sogenannte **Pseudosphäre** untersuchte, eine Fläche, die durch Rotation einer **Traktrix** (auch als *Hundekurve* bekannt) entsteht. Allgemein ist auf Flächen von konstanter negativer Krümmung zumindest teilweise die nichteuklidische Geometrie verwirklicht.

Ein erstes vollständiges Modell war das „Bierdeckel-Modell“ von Cayley-Klein-Beltrami. Leider ist dieses Modell nicht „konform“, d.h., man kann die Winkel nicht mit einem euklidischen Winkelmesser messen. Insbesondere ist es schon schwierig, rechte Winkel als solche zu erkennen.

Ein konformes Modell stammt von Poincaré, und das soll hier vorgeführt werden. Dazu müssen wir im Komplexen zu arbeiten.

Eine (**gebrochen**) **lineare Transformation** oder **Möbius-Transformation** ist eine komplexwertige Abbildung  $T$  der Gestalt

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

die für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$  definiert ist.

Wir betrachten zwei Spezialfälle.

**1. Fall:** Ist  $c = 0$ ,  $A := a/d$  und  $B := b/d$ , so ist  $T$  eine komplexe affin-lineare Funktion:

$$T(z) = A \cdot z + B.$$

Da  $A = re^{it}$  eine komplexe Zahl und

$$x + iy \mapsto e^{it} \cdot (x + iy) = (x \cos t - y \sin t) + i(y \cos t + x \sin t)$$

eine Drehung ist, stellt die Abbildung  $z \mapsto A \cdot z$  eine Drehstreckung dar. Die Abbildung  $w \mapsto w + B$  ist natürlich eine Translation.

**2. Fall:** Die Abbildung  $I(z) := 1/z$  nennt man die **Inversion**. Sie ist auf  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  definiert und setzt sich aus zwei Abbildungen zusammen, nämlich der **Spiegelung am Einheitskreis** (gegeben durch  $re^{it} \mapsto \frac{1}{r}e^{it}$ ) und der Spiegelung an der  $x$ -Achse (gegeben durch  $z \mapsto \bar{z}$ ).

Eine beliebige Möbius-Transformation setzt sich aus affin-linearen Funktionen und der Inversion zusammen, denn es gilt:

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}.$$

Warum interessiert man sich gerade für diese Art von Transformationen? Eine lineare Abbildung  $f = f_A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  kann mit Hilfe einer  $2 \times 2$ -Matrix  $A$  beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto f_A \left( \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_0 + bz_1 \\ cz_0 + dz_1 \end{pmatrix}.$$

$f_A$  induziert eine „projektive Abbildung“  $\hat{f} : \overline{\mathbb{C}} = P_1(\mathbb{C}) \rightarrow P_1(\mathbb{C})$  durch  $\hat{f}([z]) := [f_A(\mathbf{z})]$ . Offensichtlich ist  $\hat{f}$  wohldefiniert. Speziell gilt nun:

$$\hat{f}((z : 1)) = (az + b : cz + d) = \left( \frac{az + b}{cz + d} : 1 \right) \quad \text{für } z \neq -d/c.$$

Die Möbius-Transformationen sind also eigentlich (bijektive) projektive Abbildungen von  $\overline{\mathbb{C}}$  nach  $\overline{\mathbb{C}}$ , die man aber nur auf  $\mathbb{C}$  betrachtet. Dabei kann ein Punkt von  $\mathbb{C}$  auf  $\infty$  abgebildet werden, und umgekehrt.

Ist  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , so setzt man  $T(-d/c) := \infty$  und  $T(\infty) := a/c$ .

**Hilfssatz:** Jede Gerade und jeder Kreis in  $\mathbb{C}$  kann durch eine Menge der Gestalt

$$M = \{\alpha z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0\}$$

mit  $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{C}$  und  $c\bar{c} > \alpha\delta$  beschrieben werden.

Ist  $\alpha = 0$ , so liegt eine Gerade vor, andernfalls ein Kreis.

Beweis: Einfache Rechenaufgabe. Ist  $\alpha = 0$  und  $c = a + ib$ , so ist

$$cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0 \iff ax - by = -\delta/2.$$

Ist  $\alpha = 1$  (was man im Falle  $\alpha \neq 0$  annehmen kann),  $u = -\bar{c}$  und  $r = \sqrt{c\bar{c} - \delta}$ , so ist

$$z\bar{z} + cz + \bar{c}\bar{z} + \delta = 0 \iff |z - u| = r.$$

■

Damit folgt:

**Satz:** Eine Möbius-Transformation  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  mit  $ad - bc \neq 0$  bildet Kreise und Geraden wieder auf Kreise oder Geraden ab.

Zum BEWEIS betrachtet man am besten affin-lineare Funktionen und die Inversion getrennt. Dann muss man nur noch rechnen.

Die Menge der **Möbius-Transformationen** bildet eine Gruppe, die **Möbius-gruppe**  $\text{Möb}^+$ . Auch das zeigt eine einfache Rechnung.

Man kann zu drei beliebigen Punkten und drei vorgegebenen Bildern eine lineare Transformation bestimmen, die genau die gegebenen Punkte auf die gegebenen Bilder abbildet.

Dazu suche man zunächst zu den paarweise verschiedenen Punkten  $z_1, z_2, z_3$  eine Möbiustransformation  $T$  mit  $T(z_1) = 0$ ,  $T(z_2) = 1$  und  $T(z_3) = \infty$ . Offensichtlich bildet

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

schon die Punkte  $z_1$  und  $z_3$  richtig ab. Allerdings ist

$$T(z_2) = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

Dividiert man  $T(z)$  noch durch diesen Bruch, so erhält man die gewünschte Transformation.

### Definition

Als **Doppelverhältnis** der Punkte  $z, z_1, z_2, z_3$  bezeichnet man die Größe

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}.$$

**Bemerkung:** Ist einer der drei Punkte  $z_1, z_2, z_3$  gleich Unendlich, so vereinfacht sich die Formel. Im Falle  $z_1 = \infty$  gilt z.B.

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}.$$

Der fehlende Bruch

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{(z/z_1) - 1}{(z_2/z_1) - 1}$$

geht gegen Eins, wenn  $z_1$  nach Unendlich geht.

**Satz:** Sind  $z_1, z_2, z_3$  und  $w_1, w_2, w_3$  jeweils paarweise verschieden, so gibt es genau eine Möbius-Transformation  $T$  mit  $T(z_i) = w_i$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Beweis: Seien  $T_1(z) := DV(z, z_1, z_2, z_3)$  und  $T_2(z) := DV(z, w_1, w_2, w_3)$ . Dann erfüllt die Verkettung

$$T(z) := T_2^{-1} \circ T_1(z)$$

die Forderung. Dass die Transformation  $T$  eindeutig bestimmt ist, liegt daran, dass eine Möbius-Transformation mit drei Fixpunkten schon die Identität ist (denn die Gleichung  $T(z) = z$  führt auf eine quadratische Gleichung, die höchstens zwei Lösungen besitzt). ■

**Satz:** Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ . Ein Punkt  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  liegt genau dann auf der durch  $z_1, z_2, z_3$  bestimmten Kreislinie (alle  $z_i \in \mathbb{C}$ ) oder Geraden (ein  $z_i = \infty$ ), falls das Doppelverhältnis  $DV(z, z_1, z_2, z_3)$  eine reelle Zahl oder Unendlich ist.

Beweis: Sei  $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$ ,  $K$  die Gerade oder Kreislinie durch die  $z_i$ . Dann ist  $T(K)$  Kreis oder Gerade durch 0, 1 und Unendlich, also  $T(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , und damit ist  $z \in K$  genau dann, wenn  $T(z)$  reell ist oder Unendlich. ■

### Definition

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ist die **Einheitskreisscheibe**,  
 $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  die **obere Halbebene**.

Eine offene Teilmenge  $G \subset \mathbb{C}$  heißt ein **Gebiet**, falls je zwei Punkte aus  $G$  durch einen stetigen Weg innerhalb von  $G$  verbunden werden können.<sup>1</sup> Man kann zeigen: *Möbius-Transformationen bilden Gebiete wieder auf Gebiete ab. Wird ein Gebiet  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  von einer Geraden oder einer Kreislinie berandet, so gibt es eine Möbius-Transformation  $T$  mit  $T(G) = \mathbb{H}$ .*

**Beispiel:** Die Abbildung

$$C(z) := i \cdot \frac{1+z}{1-z} = DV(z, -1, -i, 1)$$

bildet die Einheitskreislinie  $\partial\mathbb{D}$  auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ab, denn  $-1, -i$  und  $1$  liegen alle auf  $\partial\mathbb{D}$ , und es ist  $C(0) = i$ . Das Bild von  $\mathbb{D}$  unter  $C$  wird also von der reellen Achse berandet und enthält den Punkt  $i$ . das ist nur möglich, wenn  $C(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$  ist. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$w = \frac{i + iz}{1 - z}, \quad \text{also } z = C^{-1}(w) = \frac{w - i}{w + i}.$$

Man spricht auch von der **Cayley-Abbildung**.

<sup>1</sup>Die komplexe Ebene kann ja mit dem  $\mathbb{R}^2$  identifiziert werden. Eine Teilmenge  $G \subset \mathbb{C}$  heißt **offen**, falls zu jedem Punkt  $z_0 \in G$  ein  $\varepsilon > 0$  mit  $D_\varepsilon(z_0) \subset G$  existiert. Ein stetiger Weg in  $G$  ist eine Abbildung  $\varphi : [0, 1] \rightarrow G$ , so dass es zu jedem  $t_0 \in [0, 1]$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \varepsilon$  für  $|t - t_0| < \delta$  gilt. Der Weg verbindet die Punkte  $z_1$  und  $z_2$ , falls  $\varphi(0) = z_1$  und  $\varphi(1) = z_2$  ist.

**Satz:** Eine Möbius-Transformation  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  bildet genau dann  $\mathbb{H}$  bijektiv auf sich ab, wenn  $a, b, c, d$  reell sind und  $ad - bc > 0$  ist.

Beweis:  $T$  bildet genau dann  $\mathbb{H}$  auf sich ab, wenn  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  auf sich und  $i$  nach  $\mathbb{H}$  abgebildet wird.

a) Sei  $T(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$  (und deshalb  $T(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$ ). Dann gibt es Punkte  $z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{H}$ , die auf 0, 1 und  $\infty$  abgebildet werden, und die müssen dann natürlich reell oder  $= \infty$  sein. Weil  $T(z) = DV(z, z_1, z_2, z_3)$  ist, müssen die Koeffizienten  $a, b, c, d$  von  $T$  reell sein. Außerdem ist

$$\operatorname{Im}\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(ai + b)(d - ci)}{(d + ci)(d - ci)}\right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}.$$

Also liegt  $T(i)$  genau dann in  $\mathbb{H}$ , wenn  $ad - bc > 0$  ist.

b) Sind umgekehrt  $a, b, c, d$  reell, so wird  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  durch  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  nach  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  abgebildet, also  $\mathbb{H}$  nach  $\mathbb{H}$  oder  $-\mathbb{H}$ . Die Bedingung  $ad - bc > 0$  sorgt dafür, dass Ersteres der Fall ist. ■

Wir betrachten nun **Spiegelungen an Kreisen**.

Im Falle des Einheitskreises ist die Spiegelung an  $\partial\mathbb{D}$  gegeben durch

$$z = re^{it} \mapsto \frac{1}{r} e^{it} = \frac{1}{re^{-it}} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Die Spiegelung an einem beliebigen Kreis  $K = \partial D_r(z_0)$  ist dann analog gegeben durch

$$z = z_0 + \varrho e^{it} = z_0 + s(re^{it}) \mapsto z_0 + \frac{1}{s}(re^{it}) = z_0 + \frac{r^2}{\varrho e^{-it}} = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0},$$

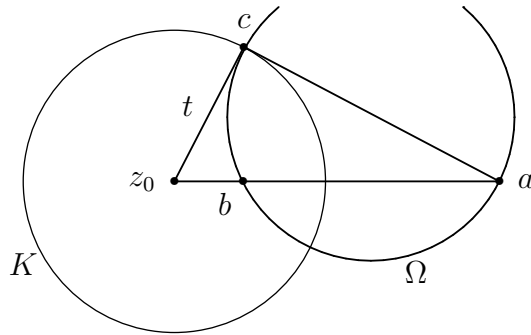
mit  $s := \varrho/r$ . Diese Spiegelung sei mit  $\sigma$  (im Falle des Einheitskreises) und mit  $\sigma_K$  (im Falle eines beliebigen Kreises  $K$ ) bezeichnet.

Es folgt übrigens:  $|z - z_0| \cdot |\sigma_K(z) - z_0| = r^2$ .

**Satz:** Sei  $K = \partial D_r(z_0)$ ,  $a$  ein Punkt außerhalb von  $K$  und  $b = \sigma_K(a)$  die Spiegelung von  $a$  an  $K$ . Ein Kreis  $\Omega$  durch  $a$  geht genau dann auch durch  $b$ , wenn er  $K$  in zwei Punkten orthogonal trifft. In diesem Falle bildet  $\sigma_K$  den Kreis  $\Omega$  auf sich ab.

Beweis: 1) Der Kreis  $\Omega$  gehe durch  $a$  und  $b$ . Dann sei  $t$  die Tangente durch  $z_0$  an  $\Omega$ ,  $c$  der Punkt, an dem  $t$  den Kreis  $\Omega$  berührt. Bis hierhin weiß man noch nicht, wo  $c$  liegt. Nach dem Sehnen-Tangenten-Satz ist aber

$$|c - z_0|^2 = |b - z_0| \cdot |a - z_0| = r^2, \quad \text{also } c \in K.$$



Die Strecke von  $z_0$  nach  $c$  steht in  $c$  auf der Tangente an  $K$  senkrecht, und zugleich ist sie Tangente an  $\Omega$ . Das bedeutet, dass  $\Omega$  und  $K$  in  $c$  (und aus Symmetriegründen auch in dem zweiten Schnittpunkt) zueinander orthogonal sind.

2) Ist umgekehrt  $\Omega$  ein Kreis durch  $a$ , der  $K$  orthogonal schneidet, sowie  $b$  der zweite Schnittpunkt der Verbindungsstrecke von  $z_0$  und  $a$ , so folgt aus dem Sehnentangenten-Satz, dass  $|b - z_0| \cdot |a - z_0| = r^2$  ist, und das bedeutet, dass  $b$  bezüglich  $K$  der Spiegelpunkt von  $a$  ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\Omega$  in der gegebenen Situation durch  $\sigma_K$  auf sich abgebildet wird. Aber das folgt wieder aus dem Sehnentangenten-Satz, angewandt auf beliebige Geraden durch  $z_0$ . ■

### Definition

Sei  $G$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ . Eine Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **konform**, falls sie injektiv, winkeltreu und orientierungserhaltend ist.

Die Begriffe „winkeltreu“ und „orientierungserhaltend“ sind mit den hier zur Verfügung stehenden Mitteln schwer zu erklären. Man kann aber zeigen, dass die Möbiustransformationen konform sind. Das bedeutet, schneiden sich zwei Kreise unter einem gewissen Winkel, so versteht man darunter den Winkel zwischen den Tangenten in dem betrachteten Schnittpunkt. Die Möbiustransformation bildet die beiden Kreise wieder auf zwei Kreise oder Geraden ab, und der Winkel bleibt dabei unverändert.

**Hilfssatz:** Sei  $K$  ein fester Kreis und  $T$  eine Möbiustransformation. Liegen  $z$  und  $w$  spiegelbildlich bezüglich  $K$ , so liegen auch  $z^* = T(z)$  und  $w^* = T(w)$  spiegelbildlich bezüglich  $K' = T(K)$ .

Beweis: Ist  $K = \{z = z_0 + re^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ , so ist die Spiegelung an  $K$  gegeben durch  $\sigma_K : z \mapsto w = z_0 + r^2/(\bar{z} - \bar{z}_0)$ .

Sei  $w$  der Spiegelpunkt zu  $z$  (bezüglich  $K$ ). Ist  $\Omega$  ein Kreis durch  $z$ , der orthogonal zu  $K$  ist, so trifft die Gerade durch  $z_0$  und  $z$  den Kreis  $\Omega$  in  $w = \sigma_K(z)$  (gemäß Sehnentangenten-Satz). Seien nun  $\Omega_1, \Omega_2$  zwei solche zu  $K$  orthogonale Kreise durch  $z$ . Dann treffen sich diese beiden Kreise auch in  $w$ .

Weil  $T$  konform ist, schneiden die Bildkreise  $T(\Omega_1)$  und  $T(\Omega_2)$  den Kreis  $K' = T(K)$  wieder orthogonal, und sie schneiden sich außerdem gegenseitig in den Punkten  $z^*$  und  $w^*$ . Offensichtlich ist  $w^*$  Spiegelpunkt zu  $z^*$  bezüglich  $K'$  (wieder gemäß Sehnen-Tangenten-Satz). ■

**Satz** Die Möbius-Transformationen, die  $\mathbb{D}$  auf sich abbilden, sind genau die Transformationen der Gestalt

$$T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \text{ mit } \theta \in [0, 2\pi) \text{ und } \alpha \in \mathbb{D}.$$

Beweis: a) Durch  $w \mapsto e^{i\theta} \cdot w$  wird eine Drehung um den Nullpunkt definiert, die offensichtlich  $\mathbb{D}$  auf  $\mathbb{D}$  abbildet. Ist  $\alpha \in \mathbb{D}$  und  $f(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ , so gilt für  $z \in \partial\mathbb{D}$ :

$$z\bar{z} = 1 \text{ und } f(z)\overline{f(z)} = \frac{(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{(1 - \bar{\alpha}z)(1 - \alpha\bar{z})} = \frac{1 + \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{z} - z\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}} = 1.$$

Also ist  $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ , und weil außerdem  $f(\alpha) = 0$  ist, ist  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ . Das heißt, dass alle Transformationen der Gestalt  $T(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$  (mit  $\alpha \in \mathbb{D}$ ) den Einheitskreis auf sich abbilden.

b) Sei nun  $T$  eine Möbius-Transformation, die  $\mathbb{D}$  auf sich abbildet. Dann gibt es ein  $\alpha \in \mathbb{D}$  mit  $T(\alpha) = 0$ . Wir setzen  $T_\alpha(z) := (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$ . Dann ist auch  $T \circ T_\alpha^{-1}$  eine Möbius-Transformation mit  $T \circ T_\alpha^{-1}(0) = 0$ . Nach dem Hilfssatz muss der Spiegelpunkt von 0 bezüglich  $\partial\mathbb{D}$  (also der Punkt  $\infty$ ) auf den Spiegelpunkt des Bildes von 0 abgebildet werden, d.h. es ist  $T \circ T_\alpha^{-1}(\infty) = \infty$ .

Setzt man  $S(w) := T \circ T_\alpha^{-1}(w)$  in der Form  $(aw + b)/(cw + d)$  an, so folgt aus den Eigenschaften  $S(0) = 0$  und  $S(\infty) = \infty$ , dass es eine Konstante  $q \neq 0$  mit  $S(w) = qw$  gibt. Weil  $T \circ T_\alpha^{-1}$  den Einheitskreis auf sich abbildet, muss  $|q| = 1$  sein, also  $q$  von der Gestalt  $q = e^{i\theta}$ . Setzt man  $w = T_\alpha(z)$  ein, so folgt:  $T(z) = T \circ T_\alpha^{-1} \circ T_\alpha(z) = S \circ T_\alpha(z) = q \cdot T_\alpha(z)$ . ■

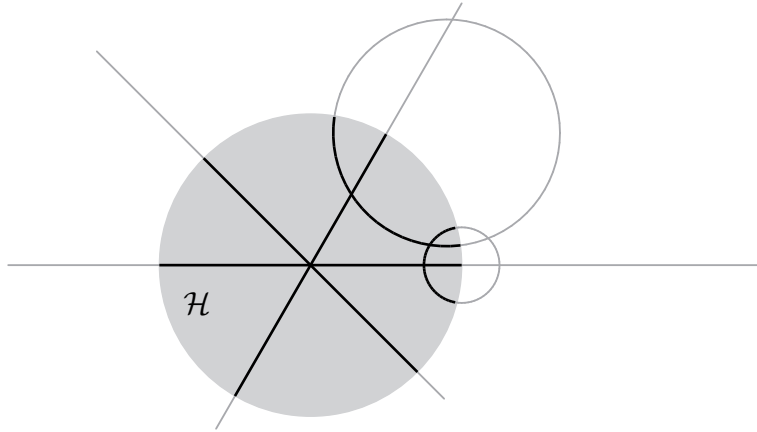
Wir nennen die gefundenen Abbildungen die **Automorphismen des Einheitskreises**.

**Satz** Zu je zwei Punkten  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  gibt es einen Automorphismus  $T$  des Einheitskreises mit  $T(z_1) = z_2$ .

Beweis: Für  $\alpha \in \mathbb{D}$  sei  $T_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$ . Dann ist  $T := T_{z_2}^{-1} \circ T_{z_1}$  ein Automorphismus von  $\mathbb{D}$  mit  $T(z_1) = T_{z_2}^{-1}(0) = z_2$ . ■

Als Modell für die **hyperbolische Ebene**  $\mathcal{H}$  benutzen wir das Innere des Einheitskreises  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

Eine **hyperbolische Gerade** ist eine Menge  $g = K \cap \mathbb{D}$ , wobei  $K$  ein sogenannter „Orthokreis“ ist, also ein Kreis, der  $\partial\mathbb{D}$  in zwei Punkten orthogonal trifft. Dazu gehören auch die in  $\mathbb{D}$  gelegenen Stücke von Geraden durch den Nullpunkt.



Wir sprechen von  $h$ -Punkten und  $h$ -Geraden. Untersuchen wir die Gültigkeit der Inzidenz-Axiome:

(I-1) Gegeben seien zwei  $h$ -Punkte  $z$  und  $w$ . Wir müssen zeigen, dass es genau eine  $h$ -Gerade durch  $z$  und  $w$  gibt.

Sei zunächst einer der Punkte der Ursprung. Es gibt keinen Orthokreis durch  $0$ , denn die Tangente an einen solchen Kreis im Schnittpunkt mit  $\partial\mathbb{D}$  müsste ein Radius von  $\mathbb{D}$  sein, dürfte den Orthokreis aber nur in einem Punkt treffen. Also ist in diesem Falle die euklidische Gerade durch  $z$  und  $w$  die gesuchte  $h$ -Verbindung.

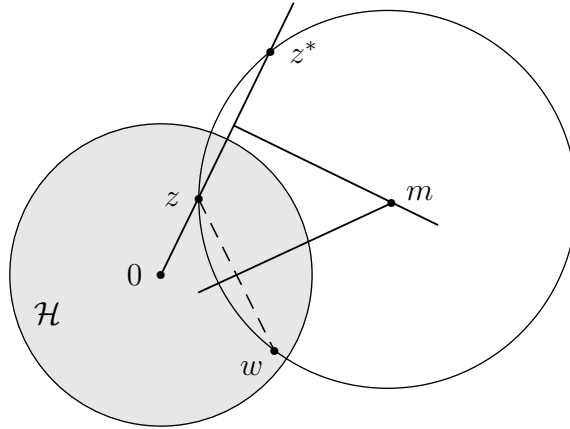
Sind  $z, w \in \mathbb{D}$  beliebig, so gibt es einen Automorphismus  $T$  von  $\mathbb{D}$  mit  $T(z) = 0$ . Sei  $u := T(w)$ . Wenn es zwei verschiedene Orthokreise durch  $z$  und  $w$  gäbe, so wären deren Bilder unter  $T$  wieder Orthokreise (weil Möbius-Transformationen konform sind und Kreise wieder auf Kreise oder Geraden abbilden). Es müsste also zwei verschiedene Geraden durch  $0$  und  $u$  geben. Das kann nicht sein. Das zeigt die Eindeutigkeit, und es bleibt nur noch die Existenz eines Orthokreises durch  $z$  und  $w$  zu zeigen. Dafür kann man das Urbild der Verbindungsgeraden von  $0$  und  $u$  unter  $T$  benutzen.

Eine direkte Konstruktion des Orthokreises durch  $z$  und  $w$  erhält man übrigens wie folgt:

- a) Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $\overline{zw}$ .
- b) Spiegelt man  $z$  an  $\partial\mathbb{D}$ , so erhält man einen Punkt  $z^*$  außerhalb des Einheitskreises, und der Orthokreis durch  $z$  und  $w$  muss auch durch  $z^*$  gehen. Also ist  $\overline{zz^*}$



auch eine Sehne dieses Kreises, und deren Mittelsenkrechte enthält ebenfalls den Mittelpunkt  $m$  des gesuchten Kreises.



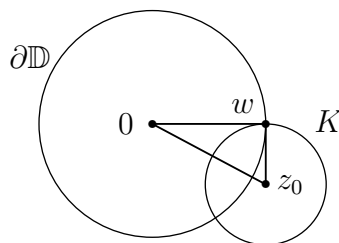
Die Axiome (I-2) und (I-3) sind offensichtlich erfüllt. Jede  $h$ -Gerade enthält mindestens zwei Punkte, und die  $h$ -Punkte  $-0.5$ ,  $0.5$  und  $0.5i$  liegen nicht auf einer  $h$ -Geraden.

Die Anordnungsaxiome (A-1), (A-2), (A-3) und (A-4) sind trivialerweise erfüllt, weil man jede  $h$ -Gerade bijektiv auf  $\mathbb{R}$  abbilden kann. Da außerdem jeder Orthokreis die Kreisscheibe  $\mathbb{D}$  in genau zwei Teile zerlegt, ist auch das Pasch-Axiom (A-5) erfüllt. Man kann das Innere von Dreiecken definieren, und jede  $h$ -Gerade kann durch eine stetige Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$  parametrisiert werden. Da sie für  $t \rightarrow -\infty$  und  $t \rightarrow +\infty$  das kompakte Dreieck verlässt, muss sie den Rand des Dreiecks treffen. Für einen ausführlichen Beweis braucht man etwas mehr Analysis im  $\mathbb{R}^2$ .

Der  $h$ -Winkel zwischen zwei  $h$ -Geraden wird einfach durch den euklidischen Winkel zwischen den Tangenten gemessen.

Als nächstes brauchen wir Bewegungen. Das ist ein wenig komplizierter.

Zunächst untersuchen wir die Spiegelung  $\sigma_K$  an einem Orthokreis  $K$  um  $z_0$  mit Radius  $r$ . Ist  $w$  ein Schnittpunkt von  $K$  und  $\partial\mathbb{D}$ , so ist das Dreieck mit den Ecken  $0$ ,  $z_0$  und  $w$  bei  $w$  rechtwinklig, und nach Pythagoras gilt:



$$|z_0|^2 = r^2 + 1, \text{ also } r^2 - z_0\bar{z}_0 = -1.$$

Ist  $z \in \mathbb{D} \setminus K$  gegeben und  $z^*$  der Spiegelpunkt von  $z$  an  $K$ , so ist

$$z^* = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0\bar{z} + r^2 - |z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{z}_0} = c \cdot \frac{\bar{z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\bar{z}},$$

mit  $c := -z_0/\bar{z}_0$  und  $\alpha := 1/z_0$ . Dann ist  $|c| = 1$  und  $|\alpha| < 1$ . Also ist die Spiegelung  $z \mapsto z^*$  ein Automorphismus des Einheitskreises, verknüpft mit der Konjugation  $\text{conj} : z \mapsto \bar{z}$ .

Da man erwartet, dass sich Bewegungen aus Spiegelungen zusammensetzen, bietet es sich an, als Menge der **(hyperbolischen) Bewegungen** die von  $\text{conj}$  und den Automorphismen von  $\mathbb{D}$  erzeugte Gruppe  $\mathcal{B}_h$  zu nehmen. Diese enthält die „hyperbolischen Translationen“  $T_\alpha(z) := (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha}z)$  (mit  $\alpha \mapsto 0$ ), die Drehungen  $D_\theta(z) := e^{i\theta}z$  um den Nullpunkt und die Spiegelung  $\text{conj}$  an der  $x$ -Achse (und damit – wie oben gezeigt – auch alle Spiegelungen an Orthokreisen).

Die Bewegungsaxiome lassen sich jetzt einfach nachweisen.

Da alle hyperbolischen Geraden in diesem Modell umkehrbar stetig auf  $\mathbb{R}$  abgebildet werden können, ist auch das Dedekind-Axiom erfüllt, und das gilt dann auch für alle anderen Stetigkeitsaxiome inkl. Kreisaxiom.

Die hyperbolische Ebene  $\mathcal{H}$  mit den hyperbolischen Geraden (Orthokreisen) und der Gruppe  $\mathcal{B}_h$  der hyperbolischen Bewegungen stellt somit ein vollständiges Modell für die neutrale Geometrie dar. Allerdings ist nicht das euklidische Parallelenaxiom, sondern das hyperbolische Parallelenaxiom erfüllt (siehe Bild 1):

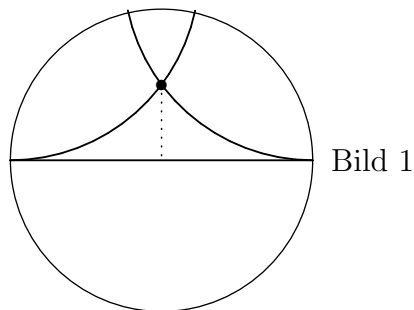


Bild 1

Man kann auch leicht Dreiecke mit einer Winkelsumme  $< \pi$  finden (siehe Bild 2), oder Saccheri-Vierecke, in denen die Hypothese vom spitzen Winkel erfüllt ist (siehe Bild 3).

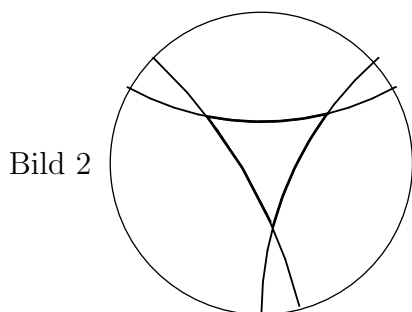


Bild 2

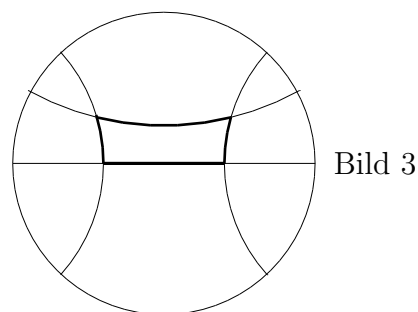


Bild 3

Um nun in diesem Modell auch Längen messen zu können, führt man eine passende Metrik ein.

**Satz:** *Durch*

$$d_h(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z, w)}{1 - \delta(z, w)} \quad \text{mit } \delta(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| = |T_w(z)|$$

wird eine  $\mathcal{B}_h$ -invariante Metrik auf  $\mathbb{D}$  definiert.

Beweis:

$\delta(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right| = \left| \frac{w - z}{1 - \bar{z}w} \right|$  ist unabhängig von der Reihenfolge von  $z$  und  $w$ , stets  $\geq 0$  und genau dann  $= 0$ , wenn  $z = w$  ist. Diese Eigenschaften vererben sich sofort auch auf  $d_h(z, w)$ .

Ist  $T$  ein Automorphismus von  $\mathbb{D}$  und sind  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$  beliebige Punkte, so gilt mit  $w_1 := Tz_1$  und  $w_2 := Tz_2$ :

$F := T_{w_1} \circ T \circ T_{z_1}^{-1}$  ist auch ein Automorphismus von  $\mathbb{D}$ , jetzt aber mit  $F(0) = 0$ . Also ist  $F$  eine Drehung  $D_\theta$ , und es folgt:

$$T_{w_1}(w_2) = T_{w_1} \circ T(z_1) = F \circ T_{z_1}(z_2) = D_\theta \circ T_{z_1}(z_2),$$

also  $\delta(w_1, w_2) = |T_{w_1}(w_2)| = |T_{z_1}(z_2)| = \delta(z_1, z_2)$  und damit

$$d_h(Tz_1, Tz_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(w_1, w_2)}{1 - \delta(w_1, w_2)} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z_1, z_2)}{1 - \delta(z_1, z_2)} = d_h(z_1, z_2).$$

Insbesondere ist  $d_h(z, w) = d_h(0, \delta(z, w))$ .

Es bleibt die Dreiecks-Ungleichung zu zeigen. Das ist in der Regel sehr aufwändig und wurde in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht ausgeführt. In einer schlaflosen Nacht habe ich einen relativ einfachen Beweis gefunden, der im Anhang folgt. ■

Die hyperbolische Metrik<sup>2</sup>

$$d_h(z, w) := \frac{1}{2} \log \frac{1 + \delta(z, w)}{1 - \delta(z, w)} = \text{Artanh} \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$$

hat die Eigenschaft, dass der Rand des Einheitskreises von den inneren Punkten unendlich weit entfernt ist. Das Poincaré-Modell ist also zwar konform, es gibt aber nicht die wahren metrischen Verhältnisse wieder. Kleine Dreiecke in der Nähe des Nullpunktes sind „fast euklidisch“, erst bei großen Dreiecken treten die besonderen Effekte der hyperbolischen Geometrie auf. Deshalb das Wort von der „Astral-Geometrie“.

In unserem Modell können wir nun alles berechnen, was wir wollen. Wir werden das am Beispiel des Parallelitätswinkels demonstrieren:

<sup>2</sup>Die Funktion „Tangens hyperbolicus“ sollte man als Quotienten  $\tanh x = (\sinh x)/(\cosh x)$  kennen. Die hyperbolischen Funktionen spielen eine große Rolle in der nichteuclidischen Geometrie, deshalb heißt sie auch hyperbolische Geometrie. Die Funktion  $\text{Artanh}(x)$ , der „Area-Tangens-hyperbolicus“ ist die Umkehrfunktion des Tangens hyperbolicus.

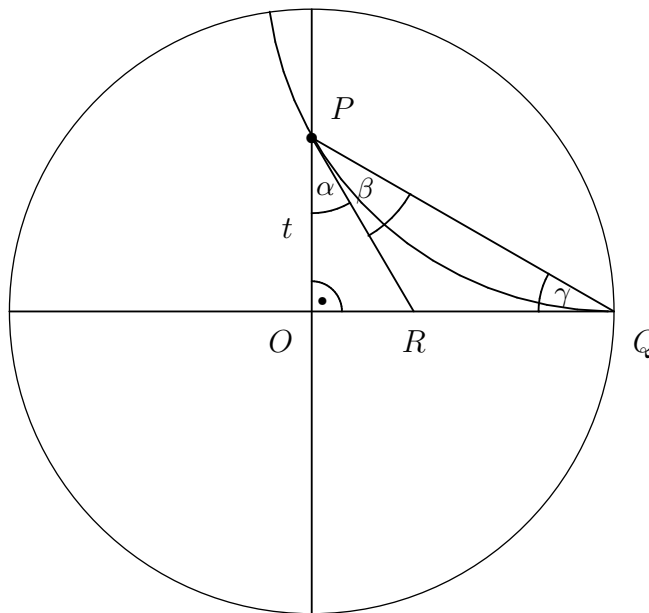
Jeder auf einem von 0 ausgehenden Strahl befindlichen Strecke mit der **euklidischen Länge**  $t$  ist auch ihre **hyperbolische Länge**

$$x = x(t) := \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}$$

zugeordnet. Dann ist

$$e^{2 \cdot x(t)} = \frac{1+t}{1-t}.$$

Wir betrachten nun folgende Situation:



Es sei  $O$  der Nullpunkt,  $P := it$  und  $\alpha := \Pi(x(t))$  der Parallelitätswinkel.  $Q := 1$  ist für die nichteuklidische Geometrie auf  $\mathbb{D}$  ein „idealer Punkt“. Die hyperbolische Parallele zu  $\overrightarrow{OQ}$  durch  $P$  ist der Orthokreis, der die reelle Achse bei  $Q$  tangential berührt und die imaginäre Achse bei  $P$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet. Die (euklidische) Tangente an diesen Orthokreis in  $P$  möge die reelle Achse in  $R$  treffen.

Von nun an können wir rein euklidisch argumentieren! Die beiden Tangenten  $PR$  und  $QR$  treffen sich auf der Mittelsenkrechten zu  $\overline{PQ}$ . Also ist das Dreieck  $QPR$  gleichschenkelig, und die Basiswinkel  $\beta := \angle QPR$  und  $\gamma := \angle PQR$  sind gleich. Im rechtwinkligen Dreieck  $QPO$  gilt daher:

$$\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) + \beta = \pi, \quad \text{also } \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}.$$

Da  $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$  und allgemein  $\tan(\varphi - \psi) = \frac{\tan \varphi - \tan \psi}{1 + \tan \varphi \tan \psi}$  ist, folgt:

$$\tan(\beta) = \frac{1 - \tan(\alpha/2)}{1 + \tan(\alpha/2)}.$$

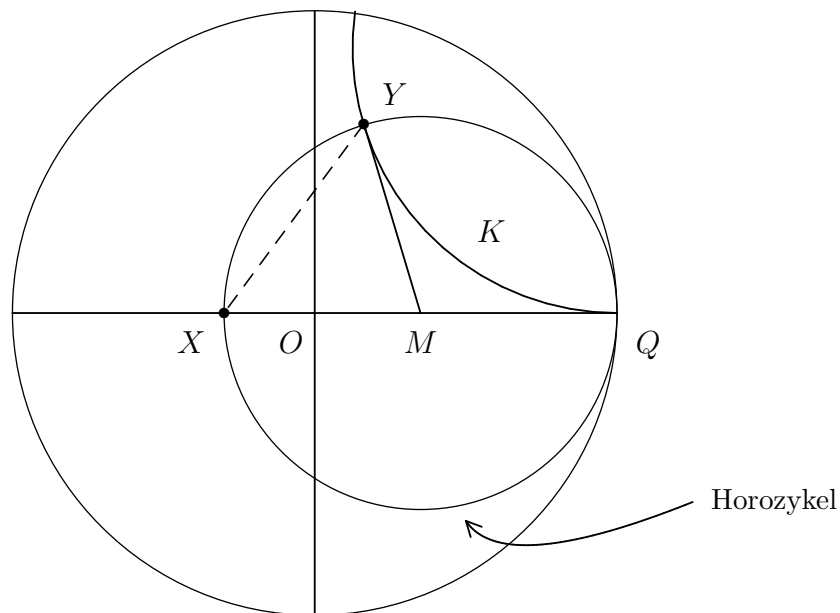
Da außerdem die Kathete  $\overline{OQ}$  des Dreiecks  $QPO$  die Länge 1 hat, gilt die Gleichung  $t : 1 = \tan \gamma$ , und damit für die hyperbolische Länge  $x = x(t)$ :

$$e^{2x} = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1 + (1 - \tan(\alpha/2))/(1 + \tan(\alpha/2))}{1 - (1 - \tan(\alpha/2))/(1 + \tan(\alpha/2))} = \frac{1}{\tan(\alpha/2)},$$

also 
$$\boxed{\tan \frac{\Pi(x)}{2} = e^{-2x}.}$$

So einfach ist die berühmte Formel für den Parallelitätswinkel im Poincaré-Modell herzuleiten!

Zum Schluss wollen wir uns noch einen Horozykel ansehen:



Sei  $K$  ein Orthokreis durch  $Q$ , der eine zu  $\overrightarrow{OQ}$  asymptotisch parallele hyperbolische Gerade darstellt. Seien  $X \in \overrightarrow{OQ}$  und  $Y \in K$  korrespondierende Punkte. Dann ist  $\angle YXQ \cong \angle XYQ$ , und zwar im hyperbolischen Sinne. Die hyperbolische Verbindungsstrecke zwischen  $X$  und  $Y$  ist ein Orthokreis-Bogen, dessen Sehne die euklidische Verbindungsstrecke von  $X$  und  $Y$  ist. Aber dann muss auch  $\angle YXM \cong \angle XYM$  sein, im euklidischen Sinne, wenn  $M$  der Schnittpunkt der Tangente an  $K$  in  $Y$  mit der reellen Achse ist. Nun können wir wieder rein euklidisch arbeiten. Es ist  $\overline{MQ} = \overline{MY}$ , und da das Dreieck  $YXM$  gleichschenkelig (mit Basis  $\overline{XY}$  und gleichen Basiswinkeln bei  $X$  und  $Y$ ) ist, ist auch  $\overline{XM} = \overline{YM}$ .

Das bedeutet, dass  $X$ ,  $Y$  und  $Q$  auf dem euklidischen Kreis um  $M$  durch  $Q$  liegen. In der hyperbolischen Geometrie ist dieser Kreis ein Horozykel.

Wie sehen Kreise in der hyperbolischen Ebene aus?

**Satz:** Jeder Kreis in  $\mathcal{H}$  mit Mittelpunkt 0 und Radius  $r$  ist der euklidische Kreis um 0 mit Radius  $\tanh(r)$ .

Beweis: Es ist  $\{z \in \mathbb{D} : d_h(0, z) = r\} = \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Artanh}(|z|) = r\} = \{z \in \mathbb{D} : |z| = \tanh r\}$ . ■

Allgemeiner kann man sogar zeigen:

**Satz:** Jeder Kreis in  $\mathcal{H}$  ist auch ein euklidischer Kreis.

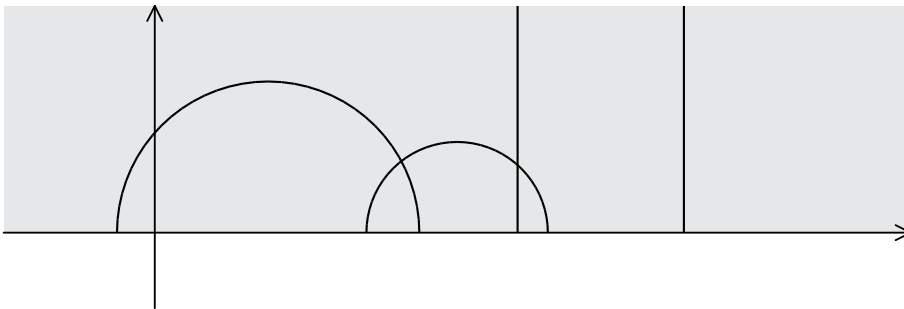
Auf den Beweis muss hier verzichtet werden.

Zum Schluss soll noch mal an die Cayley-Abbildung  $C : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  erinnert werden:

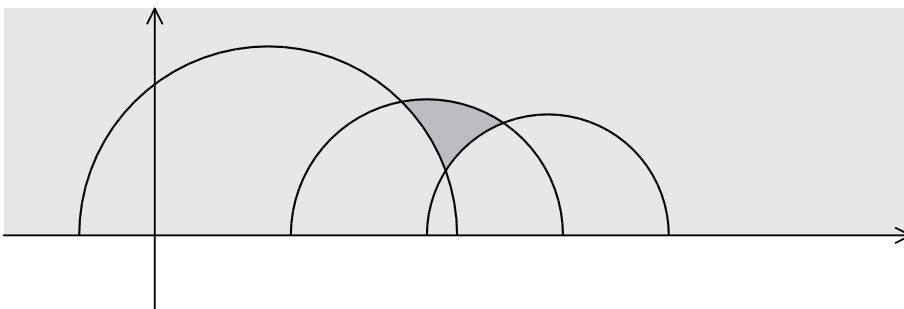
$$C(z) := i \cdot \frac{1+z}{1-z} \quad (\text{mit } C^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}).$$

Mit ihrer Hilfe kann man die hyperbolische Geometrie von  $\mathbb{D}$  nach  $\mathbb{H}$  übertragen. Da Möbius-Transformationen Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbilden und zudem konform sind, werden aus den  $h$ -Geraden Kreise und Geraden in der oberen Halbebene, die den Rand von  $\mathbb{H}$ , also die reelle Achse, orthogonal treffen.

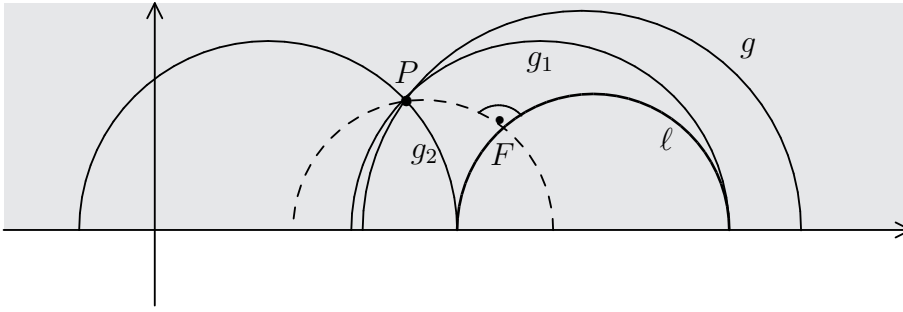
Hier sind ein paar Beispiele von hyperbolischen Geraden in  $\mathbb{H}$ :



Hier ein typisches Dreieck mit Winkelsumme  $< \pi$ .



Im folgenden Bild ist eine hyperbolische Gerade  $\ell$  zu sehen, ein Punkt  $P \notin \ell$ , das Lot von  $P$  auf  $\ell$  mit Fußpunkt  $F$ , die beiden asymptotischen Parallelen  $g_1$  und  $g_2$  zu  $\ell$  durch  $P$ , sowie eine Gerade  $g$  durch  $P$ , die überparallel zu  $\ell$  ist.



In diesem Modell sind die Orthokreise durch zwei Punkte  $A, B$  besonders leicht zu konstruieren. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $\overline{AB}$  mit der reellen Achse ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Ist  $P \in \mathbb{H}$ , so spiegelt man  $P$  an einem Orthokreis  $\mathcal{K}$ , indem man  $P$  mit dem Mittelpunkt von  $\mathcal{K}$  verbindet und dann mit Hilfe des Strahlensatzes den Spiegelpunkt  $Q$  auf der Verbindungsstrecke aufsucht. Der Orthokreis durch  $P$  und  $Q$  ergibt das Lot von  $P$  auf  $\mathcal{K}$ .

### Anhang:

Es soll die Dreiecks-Ungleichung für die hyperbolische Metrik bewiesen werden.

**Hilfssatz 1:** Ist  $0 < s < t < 1$ , so ist  $d_h(0, s) + d_h(s, t) = d_h(0, t)$ .

Beweis: Es ist  $\delta(s, t) = \left| \frac{s-t}{1-ts} \right| = \frac{t-s}{1-st}$  und deshalb

$$\begin{aligned}
 d_h(0, s) + d_h(s, t) &= \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s} + \frac{1}{2} \log \frac{1+(t-s)/(1-st)}{1-(t-s)/(1-st)} \\
 &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+s}{1-s} \cdot \frac{1-st+t-s}{1-st-t+s} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+s}{1-s} \cdot \frac{(1-s)(1+t)}{(1+s)(1-t)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} = d_h(0, t).
 \end{aligned}$$

■

Da die Metrik  $d_h$  invariant unter hyperbolischen Bewegungen ist, folgt

**Hilfssatz 2:** Sind  $A, B, C \in \mathbb{D}$  kollinear,  $A - B - C$ , so ist

$$d_h(A, B) + d_h(B, C) = d_h(A, C).$$

Ist außerdem  $s = (e^2 - 1)/(e^2 + 1) \approx 0,7616$ , so ist

$$d_h(0, s) = \frac{1}{2} \log \frac{1+s}{1-s} = \frac{1}{2} \log(e^2) = 1.$$

Damit ist  $\ell([AB]) := d_h(A, B)$  eine Längenfunktion.

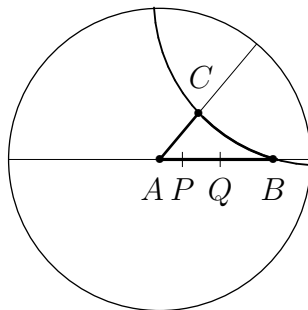
Die „geometrische“ Dreiecksungleichung  $\overline{AB} \leq \overline{AC} + \overline{CB}$  wurde innerhalb der neutralen Geometrie bewiesen, sie gilt also auch hier. Ist  $D$  ein Punkt mit  $A-C-D$  und  $\overline{CD} \cong \overline{CB}$ , so ist  $\overline{AB} \leq \overline{AD}$ , also auch

$$d_h(A, B) = \ell([AB]) \leq \ell([AD]) = \ell([AC]) + \ell([CB]) = d_h(A, C) + d_h(C, B).$$

Das ist die Dreiecksgleichung für die hyperbolische Metrik.

Wenn einem das Argument mit der Längenfunktion nicht gefällt, dann kann man es folgendermaßen versuchen:

Gegeben seien drei paarweise verschiedene Punkte  $A, B, C \in \mathbb{D}$ . Es ist zu zeigen, dass  $d_h(A, B) \leq d_h(A, C) + d_h(C, B)$  ist. Sind die Punkte kollinear, so ist nach Hilfssatz 1 nichts mehr zu zeigen. Sind sie nicht kollinear, so bilden sie ein Dreieck. Ist dieses Dreieck gleichseitig, so ist die Aussage trivial. Also kann man annehmen, dass  $d_h(A, C) < d_h(A, B)$  ist. Mit Hilfe einer hyperbolischen Bewegung kann man erreichen, dass  $A$  der Nullpunkt und  $B = r$  eine positive reelle Zahl ist, sowie  $C = x + iy$  ein Punkt in der oberen Halbebene. Zwei Seiten des Dreiecks  $ABC$  liegen auf euklidischen Geraden durch 0.



Es gilt die geometrische Dreiecksungleichung  $\overline{AC} + \overline{BC} > \overline{AB}$ , und die liefert die Ungleichung  $\overline{AB} - \overline{AC} < \overline{BC}$ . Trägt man nun  $\overline{AC}$  bei  $A$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{AB}$  ab, so erhält man auf diesem Strahl einen Punkt  $Q$  mit  $A-Q-B$  und  $\overline{AC} \cong \overline{AQ}$ . Trägt man  $\overline{BC}$  bei  $B$  auf dem Strahl  $\overrightarrow{BA}$  ab, so erhält man auf diesem Strahl einen Punkt  $P$  mit  $P-Q-B$  und  $\overline{BC} \cong \overline{PB}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} d_h(A, C) + d_h(C, B) &= d_h(A, Q) + d_h(P, B) = d_h(A, Q) + d_h(P, Q) + d_h(Q, B) \\ &\geq d_h(A, Q) + d_h(Q, B) = d_h(A, B). \end{aligned}$$