3.4 Der Parallelitätswinkel

In diesem Paragraphen sollen – in aller Kürze – die Anfangsgründe der Geometrie dargestellt werden, die von Gauß, Bolyai und Lobatschewski gefunden wurde.

1. Die absolute Theorie der Parallelen:

Folgendes ist uns von den Untersuchungen von Euklid, Saccheri und Lambert her bekannt:

- Wenn man das fünfte Postulat nicht benutzen will, kann man nicht zeigen, dass die Parallelität transitiv, also eine Äquivalenzrelation ist.
- Es kann vorkommen, dass Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden und dabei innere Winkel bilden, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.
- Man muss eventuell zwischen asymptotischen Parallelen und solchen unterscheiden, die mit der gegebenen Geraden eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

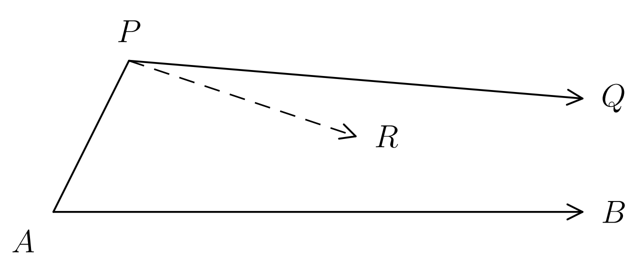
Die erste neue Idee, die anscheinend alle zugleich hatten, bestand darin, an Stelle von Geraden nur Strahlen zu betrachten.

Definition

Der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ heißt ***asymptotisch parallel*** zu dem Strahl $\overrightarrow{AB}$, falls gilt:

1. $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{AB}$ schneiden sich nicht.
2. Jeder Strahl $\overrightarrow{PR}$ innerhalb des Winkels $\angle APQ$ trifft $\overrightarrow{AB}$.

In Zeichen schreibt man dafür: $\overrightarrow{PQ}|||\overrightarrow{AB}$.



Satz: *Ist $\overrightarrow{AB}$ gegeben, so gibt es zu jedem Punkt $P \notin AB$* **genau einen** *Strahl $\overrightarrow{PQ}$, der asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$ ist, und es ist dann*

$$\angle PAB + \angle APQ \leq \pi.$$

Diesen Satz haben wir im Grunde schon bewiesen, wenn auch nur unter der Hypothese des spitzen Winkels. Jetzt setzen wir die Neutrale Geometrie voraus, und die Tatsache, dass die Hypothese vom stumpfen Winkel ausgeschlossen werden kann.

Man betrachte alle Strahlen $\overrightarrow{PQ}$, die von P ausgehen und für die $\angle QPA \leq \pi/2$ ist. Es gibt einen Strahl, der in P auf PA senkrecht steht. Also ist die Menge der Winkel α, die als Winkel zwischen $\overrightarrow{PA}$ und einem schneidenden Strahl $\overrightarrow{PR}$ auftreten, eine Menge von reellen Zahlen, die durch $\pi/2$ nach oben beschränkt ist. Sie besitzt ein Supremum α_0, und dieses Supremum kann nicht als Winkel bei einem schneidenden Strahl auftreten. Damit tritt er bei einem nicht schneidenden Strahl $\overrightarrow{PQ_0}$ auf. Und jeder Strahl, der zu einem Winkel $\alpha < \alpha_0$ gehört, muss schneiden (sonst wären alle Strahlen dazwischen auch noch parallel und α_0 nicht das Supremum). Also ist $\overrightarrow{PQ_0}$ asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{AB}$. Jeder Strahl mit kleinerem Winkel muss schneiden, also ist die asymptotische Parallele eindeutig bestimmt.

Es kommt nicht auf den Anfangspunkt der Strahlen an:

Definition

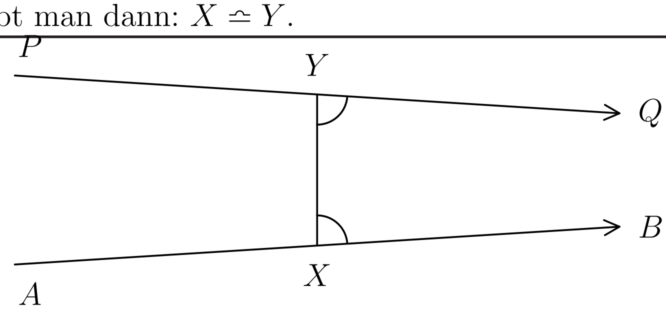
Zwei Strahlen heißen ***äquivalent***, wenn sie auf der gleichen Geraden liegen und in die gleiche Richtung weisen.

Satz: *Ob der Strahl $\overrightarrow{PQ}$ asymptotisch parallel zum Strahl $\overrightarrow{AB}$ ist, hängt nur von den Äquivalenzklassen der Strahlen ab.*

Der Beweis ist ein bisschen technisches Hantieren mit dem Pasch-Axiom und soll hier nicht ausgeführt werden.

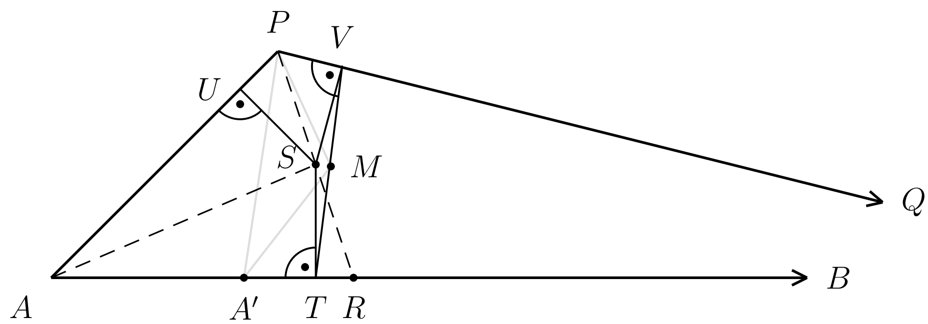
Definition

Sei $\overrightarrow{PQ} ||| \overrightarrow{AB}$, $X \in \overrightarrow{AB}$ und $Y \in \overrightarrow{PQ}$ (oder jeweils aus einem äquivalenten Strahl). X und Y heißen ***korrespondierende Punkte***, falls $\angle XYQ = \angle YXB$ ist. In Zeichen schreibt man dann: $X \stackrel{\frown}{=} Y$.



Satz: *Sei $\overrightarrow{PQ} ||| \overrightarrow{AB}$. Dann gibt es einen Punkt A' auf AB, so dass A' und P korrespondierende Punkte sind.*

Zum Beweis: Ist $\overrightarrow{PR}$ die Winkelhalbierende zu $\angle APQ$, so schneidet sie – nach Definition der asymptotischen Parallelität – den Strahl $\overrightarrow{AB}$ in einem Punkt R. Und nach Pasch trifft die Winkelhalbierende zu $\angle BAP$ den Strahl $\overrightarrow{PR}$ in einem Punkt S. Die Fußpunkte der Lote von S auf AP, PQ und AB seien jeweils mit U, V und T bezeichnet. Es gilt dann $P - V - Q$, $A - U - P$ und $A - T - B$ (wenn B und Q weit genug entfernt sind).



Jetzt ist es nicht schwer zu zeigen, dass T und V korrespondierende Punkte sind. Das ist schon der Fall, wenn T, S und V auf einer Geraden liegen. Tun sie das aber nicht, so bilden sie ein Dreieck TVS. Zunächst ist $ASU \mathrel{\widehat{=}} AST$ (SWW) und genauso $SPU \mathrel{\widehat{=}} SPV$. Daher ist TVS gleichschenklig (mit den Schenkeln $\overline{TS}$ und $\overline{VS}$).

Wählt man A' auf AB, auf der gleichen Seite von TV wie P und mit $\overline{A'T} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PV}$, so sind P und A' korrespondierend. Um das zu zeigen, führt man noch den Mittelpunkt M von $\overline{TV}$ ein. Dann ist $PMV \mathrel{\widehat{=}} MA'T$ (SWS) und daher $A'PM$ gleichschenklig. Es folgt, dass $\angle A'PQ \mathrel{\widehat{=}} \angle PA'B$ ist. ■

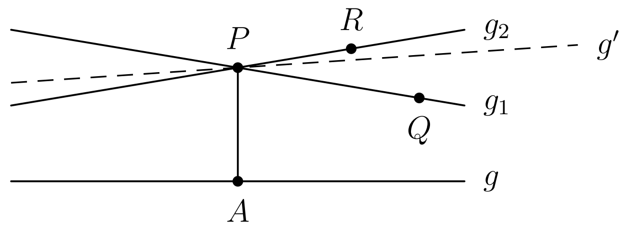
Man kann das Konzept der korrespondierenden Punkte benutzen, um zu zeigen, dass die Beziehung „asymptotisch parallel“ eine Äquivalenzrelation (zwischen Äquivalenzklassen von Strahlen) ist. Der etwas technische Beweis wird hier weggelassen.

Definition

Zwei Geraden heißen ***asymptotisch parallel***, falls sie Strahlen enthalten, die asymptotisch parallel sind.

Zwei Geraden heißen ***überparallel*** oder ***divergent***, wenn sie parallel, aber nicht asymptotisch parallel sind.

Gegeben seien nun eine Gerade g und ein Punkt $P \notin g$, sowie zwei verschiedene zu g parallele Geraden g_1 und g_2 durch P. Außerdem sei A der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Man kann Punkte $Q \in g_1$ und $R \in g_2$ wählen, so dass Q und R auf der gleichen Seite von AP liegen. Wir sagen, dass eine Gerade g' durch P ***zwischen*** g_1 und g_2 liegt, wenn ihr Schnittwinkel mit AP (auf der Seite von AP, auf der Q und R liegen) zwischen $\angle QPA$ und $\angle RPA$ liegt.



Satz: *Es gibt höchstens 2 asymptotische Parallelen g_1 und g_2 zu g durch P. Gilt Postulat V, so stimmen g_1 und g_2 überein, und es gibt keine Gerade, die überparallel zu g ist.*

Sind g_1 und g_2 verschieden, so sind alle dazwischen liegenden Geraden überparallel zu g. Insbesondere gilt dann Postulat V nicht.

Beweis: In jede der beiden möglichen Richtungen weist von P aus genau ein zu g asymptotisch paralleler Strahl. Gilt Postulat V, so kann man sofort über Winkelbeziehungen ablesen, dass die beiden Strahlen zusammen eine Gerade bilden, die eindeutig bestimmte Parallele zu g durch P, und jede andere Gerade muss g schneiden.

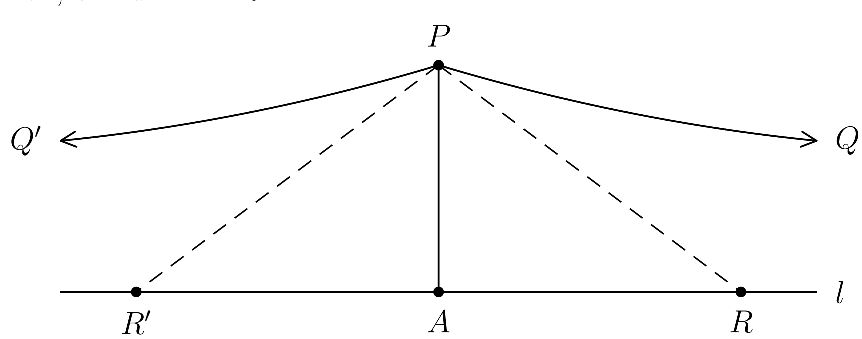
Gehören die beiden Strahlen zu verschiedenen Geraden g_1, g_2, so sind offensichtlich alle Geraden dazwischen auch parallel zu g, und da sich schneidende Geraden einen beliebig großen Abstand annehmen, können sie nicht asymptotisch parallel sein. ∎

2. Der Parallelitätswinkel:

Satz: *Sei l eine Gerade, $P \notin l$, A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Außerdem seien $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PQ'}$ die beiden asymptotisch parallelen Strahlen, die von P ausgehen.*

Dann ist $\angle APQ = \angle APQ'$.

Beweis: Wir nehmen an, es sei $\angle APQ' < \angle APQ$. Dann gibt es einen Strahl $\overrightarrow{PR}$ im Winkelraum $I(\angle APQ)$, so dass $\angle APR = \angle APQ'$ ist. Aber der Strahl $\overrightarrow{PR}$ muss l treffen, o.B.d.A. in R.



Nun wählen wir einen Punkt $R' \in l$ mit $R' - A - R$ und $\overline{R'A} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AR}$. Dann ist $R'AP \mathrel{\widehat{=}} ARP$ (SWS). Daraus folgt, dass $\angle APR' \mathrel{\widehat{=}} \angle APR$ ist, während andererseits $\angle APR' < \angle APQ' = \angle APR$ ist. Widerspruch! ■

In der Situation des obigen Satzes setzen wir

$$\varphi(P, l) := \angle APQ = \angle APQ'.$$

Folgerung:

1. *$\varphi(P, l) \leq \pi/2$.*
2. *$\varphi(P, l) < \pi/2 \iff \exists \geq 2$ Parallelen zu l durch P.*

Der Beweis ist eine triviale Übungsaufgabe.

Satz:

$\varphi(P, l)$ hängt nur von der Länge des Lotes von P auf l ab.

Beweis:

Sei A der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Wir betrachten die Menge

$$K(P, l) := \{r \in \mathbb{R} \mid \exists \text{ Strahl } \overrightarrow{PC} \text{ mit } \overrightarrow{PC} \cap l \neq \varnothing \text{ und } r = \angle APC\}.$$

Da $\varphi(P, l) = \sup K(P, l)$ ist, genügt es zu zeigen, dass $K(P, l)$ nur von der Kongruenzklasse von $\overline{AP}$ abhängt.

Dazu sei l' eine weitere Gerade, $P' \notin l'$, A' der Fußpunkt des Lots von P' auf l', sowie $\overline{AP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A'P'}$. Es ist dann zu zeigen, dass $K(P, l) = K(P', l')$ ist, und aus Symmetriegründen reicht es sogar z.z., dass $K(P, l) \subset K(P', l')$ ist.

Seien $\overrightarrow{PQ}$ bzw. $\overrightarrow{P'Q'}$ die asymptotisch parallelen Strahlen (wir brauchen wegen des vorangegangenen Satzes nur eine Seite zu betrachten). Ist $s \in K(P, l)$, so gibt es ein $C \in l$ (in der gleichen Richtung wie Q) mit $\angle APC = s$. Wir wählen dann einen Punkt $C' \in l'$ (in der gleichen Richtung wie Q') mit $\overline{A'C'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AC}$. Dann ist $ACP \mathrel{\widehat{=}} A'C'P'$ (SWS) und daher $s = \angle APC = \angle A'P'C'$. Aber das bedeutet, dass auch $s \in K(P', l')$ ist. ■

Führt man noch eine Längenfunktion λ ein, so erhält man eine Funktion

$$\Pi : \{t \,:\, t > 0\} \to (0, \frac{\pi}{2}]$$

mit $\Pi(\lambda(\overline{PA})) := \varphi(P, l)$.

Definition

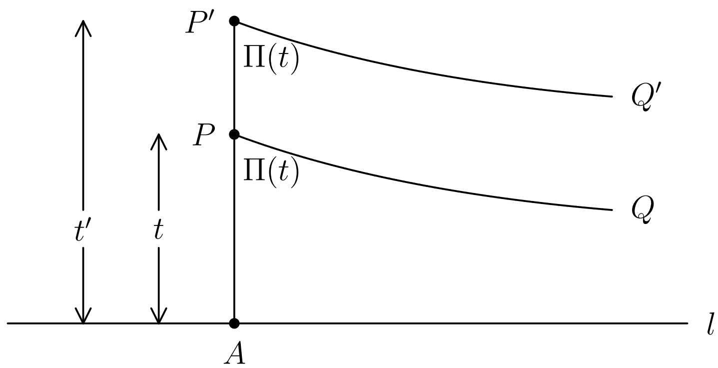
$\Pi(t)$ heißt der (durch t bestimmte) ***Parallelitätswinkel***.

Die Bezeichnung stammt von Lobatschewski.

Satz: $\Pi(t)$ *ist schwach monoton fallend.*

Beweis: Sei $t' > t$. Man kann eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$ finden, so dass – mit dem Fußpunkt A des Lots von P auf l – gilt:

t ist die Länge von $\overline{AP}$, und es gibt einen Punkt P' mit $A - P - P'$, so dass t' die Länge von $\overline{AP'}$ ist.



Trägt man $\Pi(t)$ bei P' an AP' an, so erhält man eine Parallele $\overrightarrow{P'Q'}$ zu $\overrightarrow{PQ}$ (F-Winkel). Aber das bedeutet, dass $\Pi(t') \leq \Pi(t)$ sein muss. ∎

Satz:

Gilt Postulat V, so ist $\Pi(t) \equiv \pi/2$.

Gilt Postulat V nicht, so ist $\Pi(t) < \pi/2$ *für alle* t.

Beweis: Wenn Postulat V nicht gilt, dann gilt die Hypothese vom spitzen Winkel, und es gibt „unterhalb“ der Parallelen, die in P senkrecht auf AP steht, eine asymptotische Parallele. Ist t die Länge von $\overline{AP}$, so ist $\Pi(t) < \pi/2$. ∎

Die logische Verneinung des Euklidischen Parallelenaxioms (in der Formulierung von Playfair) sieht folgendermaßen aus:

Hyperbolisches Parallelenaxiom:

(H-P) Es gibt eine Gerade l und einen Punkt $P \notin l$, so dass durch P mindestens zwei Parallelen zu l gehen.

Satz: *Setzt man (H-P) voraus, so gilt:*

1. *Die Hypothese vom spitzen Winkel ist erfüllt.*
2. *Die Funktion* $t \mapsto \Pi(t)$ *ist streng monoton fallend.*
3. $\forall\, \varphi \in (0, \pi/2)\ \exists !\, t$ *mit* $\Pi(t) = \varphi$.

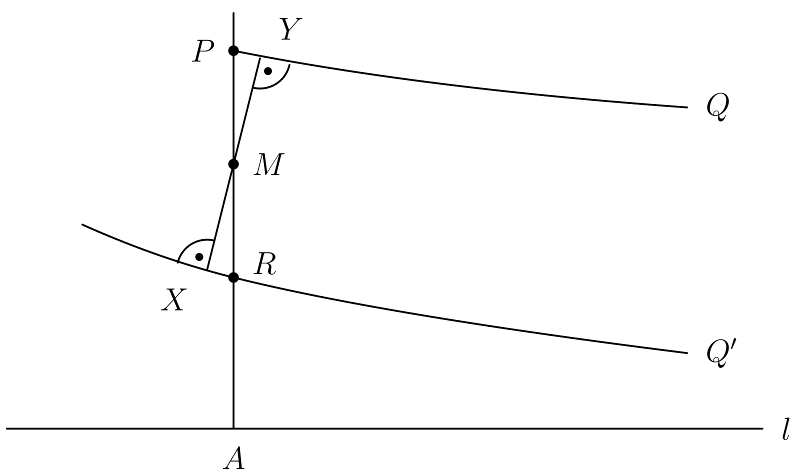
Beweis: 1) ist klar!

2) Zur Vereinfachung der Notationen nehmen wir an, es sei eine Längenfunktion gegeben, und setzen $\Pi(XY) := \Pi(\lambda(\overline{XY}))$.

Seien P, R zwei Punkte auf der Senkrechten zur Geraden l in A, und es sei $\overline{AP} > \overline{AR}$. Dann ist $\Pi(AP) \le \Pi(AR)$.

Annahme, $\Pi(AP) = \Pi(AR)$. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{PR}$, X der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{RQ'}$ und Y der Fußpunkt des Lotes von M auf die asymptotische Parallele $\overrightarrow{PQ}$. Dann ist $XRM \,\widehat{=}\, MYP$ (SWW). Also ist $\angle XMR \,\widehat{=}\, \angle PMY$, d.h. $X - M - Y$.

Das bedeutet, dass PQ und RQ' eine gemeinsame Senkrechte besitzen. Sie sind dann überparallel, aber nicht asymptotisch parallel. Das ist ein Widerspruch zur Transitivität der Relation „|||“.



3) Ist φ ein gegebener spitzer Winkel, so haben wir schon an früherer Stelle gezeigt, dass es eine Senkrechte zu einem der Schenkel von φ gibt, die asymptotisch parallel zum anderen Schenkel ist. ∎

Folgerung: $\Pi : (0, \infty) \to (0, \pi/2)$ *ist bijektiv und stetig, und es ist*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \Pi(t) = \frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \lim_{t \to \infty} \Pi(t) = 0.$$

Die Stetigkeit folgt aus der strengen Monotonie und der Surjektivität.

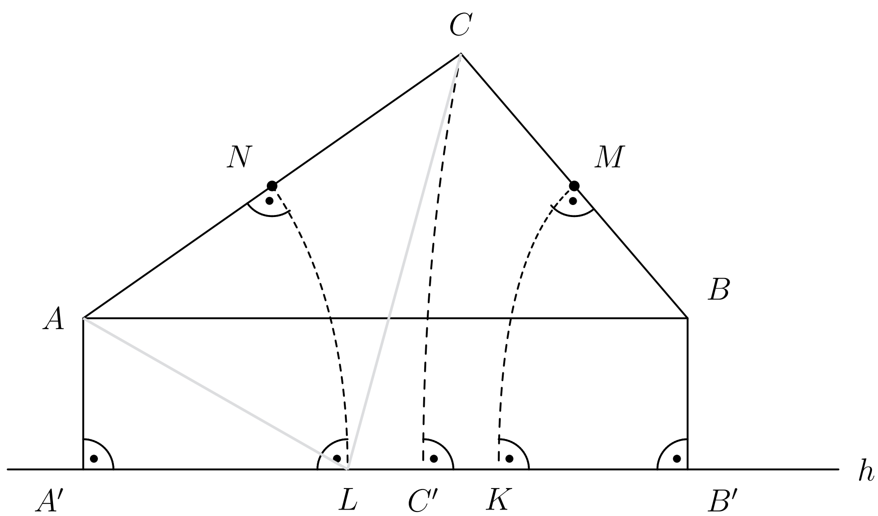
3. Horozykel:

> **Satz:** *Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks treffen sich entweder in einem Punkt, oder sie sind alle zueinander in der gleichen Richtung asymptotisch parallel oder sie sind überparallel und besitzen alle drei eine gemeinsame Senkrechte.*

Beweis: 1) Wenn sich schon zwei der Mittelsenkrechten in einem Punkt treffen, dann haben alle drei Ecken von diesem Punkt den gleichen Abstand, und dann muss auch die dritte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt gehen.

2) Sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{AC}$. Die Mittelsenkrechten durch M und N seien zueinander überparallel, mit einer gemeinsamen Senkrechten h. K und L seien die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten durch M und N mit h.

Wir fällen das Lot von A, B und C jeweils auf h, mit Fußpunkten A', B' und C'.



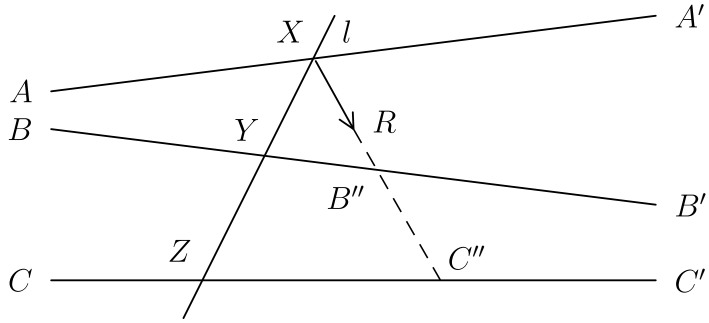
Es ist $ALN \mathrel{\widehat{=}} CLN$ (SWS), und daher $\overline{AL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{LC}$ und $\angle ALA' \mathrel{\widehat{=}} \angle CLC'$. Daraus folgt wiederum, dass $AA'L \mathrel{\widehat{=}} LC'C$ (SWW) und insbesondere $\overline{AA'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CC'}$ ist. Genauso folgt, dass $\overline{BB'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CC'}$ ist. Also ist $A'B'BA$ ein Saccheri-Viereck. Aber dann ist die Mittelsenkrechte zu AB zugleich die Mittellinie des Saccheri-Vierecks, und die steht senkrecht auf $A'B' = h$.

3) Wenn zwei der Mittelsenkrechten asymptotisch parallel sind, so müssen sie es auch zur dritten sein, denn sonst läge ja einer der beiden ersten Fälle vor. Es bleibt nur zu zeigen, dass sie alle in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind.

Man überzeugt sich recht leicht davon, dass alle drei Mittelsenkrechten die Seite des Dreiecks treffen, die dem größten Winkel gegenüberliegt. Aber dann kann man den folgenden Hilfssatz anwenden. ∎

> **Hilfssatz:** *Wenn drei verschiedene Geraden paarweise asymptotisch parallel sind und alle von einer vierten Geraden getroffen werden, so sind sie in der gleichen Richtung asymptotisch parallel.*

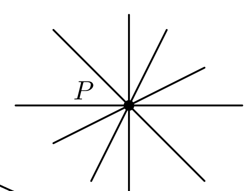
Beweis: Seien AA', BB' und CC' die paarweise asymptotisch parallelen Geraden, sowie l die gemeinsame Transversale. O.B.d.A. gibt es dann Punkte X, Y und Z auf l mit $A - X - A'$, $B - Y - B'$ und $C - Z - C'$.



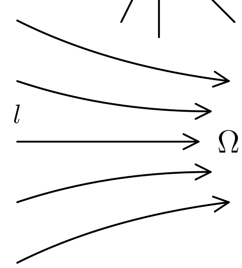
O.B.d.A. sei $\overrightarrow{XA'}|||\overrightarrow{ZC'}$. Nun sei $\overrightarrow{XR}$ ein Strahl ins Innere des Winkels $\angle YXA'$. Er muss $\overrightarrow{ZC'}$ treffen, etwa in C''. Die Gerade BB' trifft die Seite $\overline{ZX}$ des Dreiecks $ZC''X$, geht aber weder durch X noch durch $\overline{ZC''}$. Nach Pasch muss sie dann $\overline{XC''}$ in einem inneren Punkt B'' treffen, der auf der gleichen Seite von XZ liegt, wie A', B' und C'. Also ist $\overrightarrow{XA'}|||\overrightarrow{YB'}$. ∎

Wir verallgemeinern nun die Definition der „korrespondierenden Punkte". Und zwar betrachten wir drei Sorten von Geradenbüscheln:

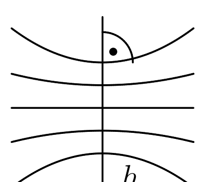
- Das Büschel Σ_P aller Geraden durch einen gegebenen Punkt P. Es ist durch den Punkt P festgelegt.



- Das Büschel $\Sigma(l, \Omega)$ aller Geraden, die zu einer gegebenen Geraden l in der gleichen Richtung asymptotisch parallel sind. Ein solches Büschel ist durch eine der Geraden und die Richtung, die hier symbolisch mit Ω bezeichnet wird, festgelegt. Man nennt Ω auch einen ***idealen Punkt***.



- Das Büschel $\Sigma_h^{\perp}$ aller Geraden, die auf einer gegebenen Geraden h senkrecht stehen. Es ist natürlich durch h festgelegt.



Oben wurde gezeigt, dass die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks immer zu einer dieser drei Sorten von Büscheln gehören.

Definition

Sei Σ ein Büschel von Geraden. Zwei Punkte A, B heißen ***korrespondierend*** bzgl. Σ, falls sie gleich sind oder die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ zu Σ gehört (in Zeichen $A \simeq B$).

Sei A ein fester Punkt.

1. $A \simeq B$ bezüglich Σ_P gilt genau dann, wenn A und B den gleichen Abstand von P haben, denn wenn $A \neq B$ und M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, dann sind A und B genau dann korrespondierend, wenn $PMA \mathrel{\widehat{=}} PMB$ ist.

2. $A \simeq B$ bezüglich $\Sigma(l, \Omega)$ bedeutet, dass A und B auf Geraden a, b liegen, die beide zur Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ asymptotisch parallel sind. Sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und x die Länge der Strecke $\overline{MA} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MB}$. Dann ist $\Pi(x)$ der Winkel, der jeweils zwischen AB und a bzw. b auftritt. Also sind A und B auch im bisherigen Sinne korrespondierende Punkte.

3. $A \simeq B$ bezüglich $\Sigma_h^{\perp}$ gilt genau dann, wenn A und B auf der gleichen Seite von h liegen und zusammen mit ihren Fußpunkten auf h ein Saccheri-Viereck mit Gipfellinie $\overline{AB}$ bilden. Dann haben A und B den gleichen Abstand von h.

Satz: *„Korrespondierend bezüglich eines Geradenbüschels“ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: Reflexivität und Symmetrie folgen ganz einfach, die Transitivität gewinnt man aus dem Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck. ∎

Im Falle des Büschels Σ_P ergibt die Menge der zu einem festen Punkt A korrespondierenden Punkte einen **Kreis um** P. Im Falle von $\Sigma_h^{\perp}$ kommt die Kurve der zu h äquidistanten Punkte heraus. Im Falle eines Büschels vom Typ $\Sigma(l, \Omega)$ erhält man eine neue interessante Kurve:

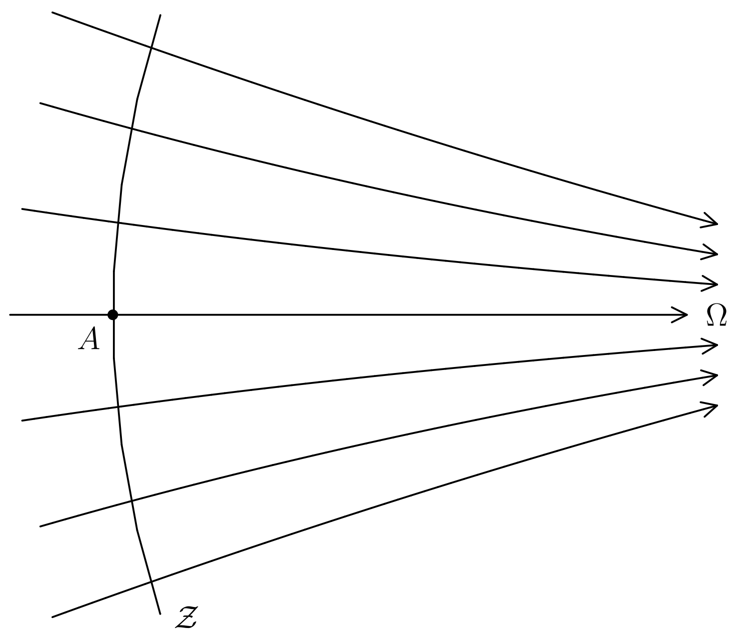
Definition

Es sei ein Büschel $\Sigma(l, \Omega)$ und ein Punkt A gegeben. Die Menge

$$\mathscr{Z} := \{B \mid A \simeq B \text{ bezüglich } \Sigma(l, \Omega)\}$$

heißt ein ***Horozykel***.

Gauß nannte die Horozykel ***Parazykel*** oder ***Kreislinien von unendlichem Radius***, Lobatschewski sprach von ***Grenzkreisen***.



> **Satz:** *Je drei paarweise verschiedene Punkte auf einem Horozykel können nicht auf einer Geraden liegen.*

Beweis: Gilt etwa $A - B - C$, so sind die Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ zueinander überparallel, gehören also nicht zu einem Büschel $\Sigma(l, \Omega)$. ■

Zu jedem Punkt P und jedem idealen Punkt Ω gibt es genau einen Strahl $\overrightarrow{P\Omega}$ durch P in Richtung Ω. Man nennt einen solchen Strahl auch eine ***Achse*** oder einen ***Radius*** des durch P und Ω bestimmten Horozykels, und Ω das ***Zentrum***. Zwei Horozykeln mit gleichem Zentrum nennt man ***konzentrisch***.

Ist $\mathcal{Z}$ ein Horozykel mit Zentrum Ω, $P \in \mathcal{Z}$ und g eine Gerade durch P, so kann g den Horozykel nach dem obigen Satz in höchstens zwei Punkten treffen. Es gibt nun drei Möglichkeiten:

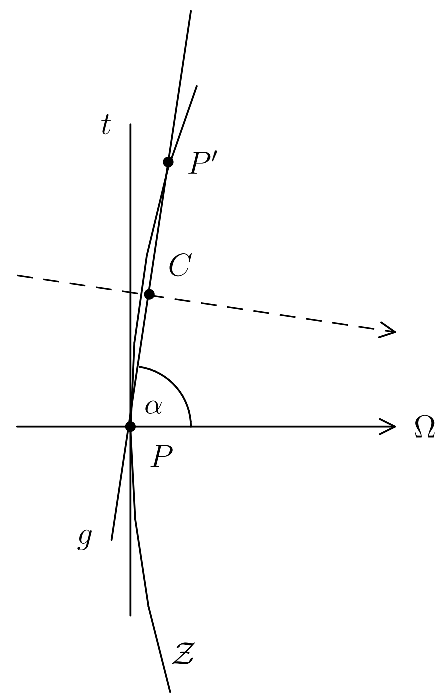
1. g ist der Radius $\overrightarrow{P\Omega}$ (und trifft natürlich nur einmal!)

2. g steht in P auf $\overrightarrow{P\Omega}$ senkrecht. Man nennt g dann eine ***Tangente*** an $\mathcal{Z}$. Würde g den Horozykel noch in einem weiteren Punkt Q treffen, so wären P und Q korrespondierend, und die Mittelsenkrechte zu $\overline{PQ}$ müsste zu $\overrightarrow{P\Omega}$ asymptotisch parallel sein. Aber andererseits wäre g dann eine gemeinsame Senkrechte zwischen $\overrightarrow{P\Omega}$ und der Mittelsenkrechten. Das ist unmöglich.

   Die Tangente berührt $\mathcal{Z}$ vom Zentrum Ω aus gesehen von außen, wie man leicht an den Winkeln erkennen kann.

3. Ist g weder ein Radius noch eine Tangente, so muss g den Horozykel noch ein weiteres Mal treffen.

Beweis für die 3. Aussage:

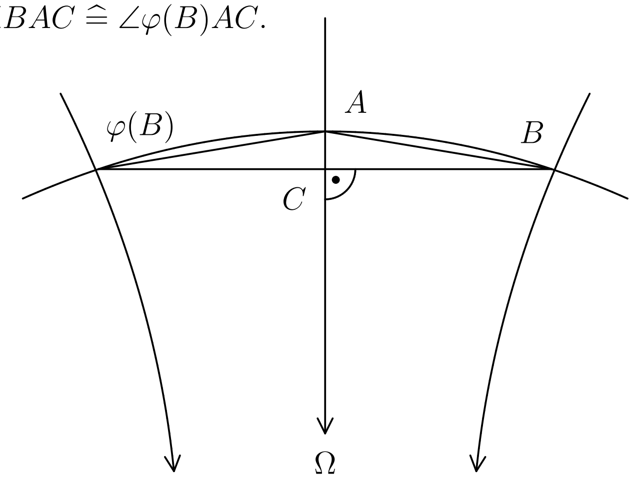


Sei t die Tangente in P, α der Winkel, den g mit dem Radius einschließt. Man kann dann auf der Seite von t, auf der $\mathcal{Z}$ liegt, einen Punkt C auf g wählen, so dass $\Pi(PC) = \alpha$ ist. Dann ist die Senkrechte zu g in C asymptotisch parallel zu $\overrightarrow{P\Omega}$. Die Spiegelung an dieser Senkrechten bildet P auf einen weiteren Punkt $P' \in g \cap \mathcal{Z}$ ab. Man nennt g daher eine ***Sekante*** von $\mathcal{Z}$ und $\overline{PP'}$ eine ***Sehne***.

Horozykel sind sehr symmetrisch:

Satz: *Sei $\mathcal{Z}$ ein Horozykel, $A \in \mathcal{Z}$ und $B \neq A$ ein weiterer Punkt auf $\mathcal{Z}$. Ist φ die Spiegelung an der Achse $\overrightarrow{A\Omega}$, so liegt auch $\varphi(B)$ auf $\mathcal{Z}$.*

Beweis: Das Spiegelbild des Strahls $\overrightarrow{B\Omega}$ unter der Spiegelung φ ist ein ebenfalls zu $\overrightarrow{A\Omega}$ asymptotisch paralleler Strahl $\overrightarrow{\varphi(B)\Omega}$. Man verifiziert das am besten über die Definition der asymptotischen Parallele, schließlich bleibt ja das Schnittverhalten unter der Spiegelung gleich. Sei nun C der Schnittpunkt von $\overline{B\varphi(B)}$ mit $\overrightarrow{A\Omega}$. Die Verbindung von B und seinem Spiegelpunkt $\varphi(B)$ schneidet die Spiegelachse bekanntlich unter einem rechten Winkel. Dann ist $ACB \mathrel{\widehat{=}} AC\varphi(B)$, und insbesondere $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle \varphi(B)AC$.



Da $A \simeq B$ ist, ist $\angle CAB \cong \angle AB\Omega$, und wegen der Spiegelsymmetrie ist dann auch $\angle CA\varphi(B) \cong \angle A\varphi(B)\Omega$. Durch Winkelsubtraktion folgt, dass $\angle CB\Omega \cong \angle C\varphi(B)\Omega$ ist. Also sind B und $\varphi(B)$ korrespondierende Punkte bezüglich Ω, und $\varphi(B)$ liegt auf $\mathcal{Z}$. ∎

Man kann von drei Punkten A, B, C auf einem Horozykel eindeutig sagen, wann einer von ihnen (z.B. C) zwischen den beiden anderen liegt (nämlich genau dann, wenn $\overrightarrow{A\Omega}$ und $\overrightarrow{B\Omega}$ auf verschiedenen Seiten von $\overrightarrow{C\Omega}$ liegen). Deshalb kann man auch einen ***Horozykel-Bogen*** $\overset{\frown}{AB}$ (auf $\mathcal{Z}$) als Menge aller $C \in \mathcal{Z}$ definieren, die zwischen A und B liegen oder gleich einem dieser beiden Punkte sind.

Folgerung 1: *Wenn A, B und C auf dem Horozykel $\mathcal{Z}$ liegen, B sich zwischen A und C befindet und φ die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ ist, so gilt:*

$$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{\varphi(A)\varphi(B)}.$$

Der Beweis ist sehr einfach, die Kongruenz wird durch φ vermittelt.

Folgerung 2: *Wenn die Punkte A, B, C und D auf einem Horozykel liegen und die Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kongruent sind, so sind auch die Bögen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{CD}$ kongruent.*

Zum Beweis nehme man o.B.d.A. an, dass die Punkte alle hintereinander liegen. Dann zeigt man leicht, dass die Kongruenz der Strecken auf der Spiegelung an der Mittelsenkrechten zu $\overline{BC}$ beruht. Der Rest ergibt sich aus Folgerung 1.

Folgerung 3: *Sind A, B und A' Punkte auf einem Horozykel $\mathcal{Z}$, so gibt es einen Punkt $B' \in \mathcal{Z}$, so dass $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'}$ ist.*

Beweis: Sei Ω das Zentrum von $\mathcal{Z}$, $\overrightarrow{C\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA'}$, φ_1 die Spiegelung an $\overrightarrow{C\Omega}$ und φ_2 die Spiegelung an $\overrightarrow{A'\Omega}$, sowie $B' := \varphi_2 \circ \varphi_1(B)$. Dann ist offensichtlich $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'B'}$ (denn $\varphi_2 \circ \varphi_1(A) = A'$). ∎

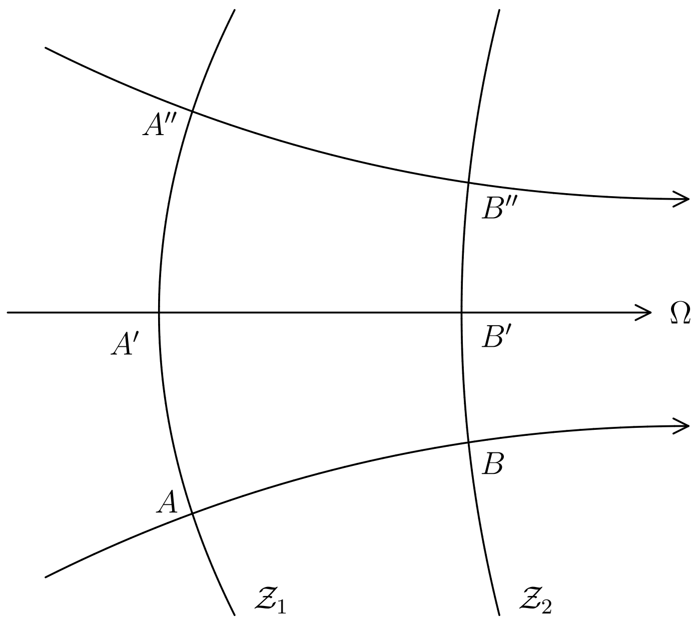
Ein Bogenstück auf einem Horozykel ist also frei verschiebbar, wie eine Strecke auf einer Geraden. Und zwei Bogenstücke sind genau dann kongruent, wenn die darunter liegenden Sehnen kongruent sind.

Mit Hilfe des engen Zusammenhangs zwischen Bögen und den darunterliegenden Sehnen kann man nun auch die Länge eines Horozykel-Bogens definieren (ähnlich wie bei den Strecken durch Intervallschachtelung). Man braucht allerdings eine ***Standard-Einheit***. Dafür bietet sich die Länge des Bogens an, dessen Sehne die Länge $2x$ hat, mit $\Pi(x) = \pi/4$. Die Bogenlänge wird dann mit $2S$ bezeichnet.

Satz: *Seien $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ zwei konzentrische Horozykel mit Zentrum Ω. Die Radien $\vec{s}$, $\vec{s}'$ und $\vec{s}''$ mögen die Horozykel in den Punkten A, A' und A'' bzw. B, B' und B'' treffen. Dann gilt:*

$$\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} = \overset{\frown}{AA''}/\overset{\frown}{BB''}.$$

Zum Beweis: Ist etwa $\overset{\frown}{AA'} \widehat{=} \overset{\frown}{A'A''}$, so ist $\overrightarrow{A'\Omega}$ die Mittelsenkrechte zu $\overline{AA''}$, und B'' erhält man durch Spiegeln des Punktes B an dieser Mittelsenkrechten. Die Aussage des Satzes ist dann sicher richtig, weil die gesamte Situation symmetrisch zur Achse $\vec{s}'$ ist.



Ähnlich einfach ist es, wenn das Verhältnis von $\overset{\frown}{AA'}$ zu $\overset{\frown}{AA''}$ ganzzahlig ist. Und schließlich bekommt man die Aussage auch für ein rationales Verhältnis von $\overset{\frown}{AA'}$ zu $\overset{\frown}{AA''}$, denn eine Gleichung der Gestalt $x = (p/q) \cdot y$ ist äquivalent zur Gleichung $q \cdot x = p \cdot y$. Bei einem beliebigen inkommensurablen Verhältnis benutzt man rationale Approximationen. ■

Weiter zeigen ein paar einfache Kongruenzbetrachtungen, dass konzentrische Horozykel-Bögen äquidistant sind! Damit ergibt sich folgende Funktion f: Ist x der Abstand zwischen den Horozykel-Bögen, so setzt man

$$f(x) := \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'}.$$

Benutzt man noch einen dritten Horozykel $\mathcal{Z}_3$, der von den Radien in den Punkten C, C' und C'' geschnitten wird, und ist y der Abstand von $\mathcal{Z}_2$ und $\mathcal{Z}_3$, sowie $z = x + y$ der Abstand von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$, so gilt:

$$f(x+y) = f(z) = \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{CC'} = \overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} \cdot \overset{\frown}{BB'}/\overset{\frown}{CC'} = f(x) \cdot f(y).$$

Setzt man schließlich $F(x) := \ln f(x)$, so ist $F(x+y) = F(x) + F(y)$. Daraus lässt sich – mit etwas zusätzlicher Arbeit – schließen, dass F linear ist, also von der Form $F(x) = c \cdot x$, mit einer Konstanten $c > 0$. Das bedeutet, dass $f(x) = e^{cx}$ ist. Aus historischen Gründen schreibt man $c = \frac{1}{k}$ und erhält:

Satz: *Das Verhältnis* $\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'}$ *zweier sich entsprechender Bogenstücke auf konzentrischen Horozykeln im Abstand* x *erfüllt die Formel*

$$\overset{\frown}{AA'}/\overset{\frown}{BB'} = e^{x/k}, \qquad \textit{mit einer universellen Konstanten } k.$$

Die Konstante k beschreibt die Distanz zwischen zwei konzentrischen Horozykel-Bögen, deren Längenverhältnis der Eulerschen Zahl $= e = 2.71828\ldots$ entspricht. Üblicherweise wählt man in der Flächenfunktion $\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC)$ die gleiche Konstante.

Bolyai und Lobatschewski ist es schließlich gelungen, eine Formel für den Parallelitätswinkel aufstellen:

$$\boxed{\tan\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-x/k}.}$$

Auf den Beweis dieser Formel müssen wir hier leider verzichten, er benutzt räumliche Geometrie und ist recht kompliziert.

Setzt man das hyperbolische Parallelenaxiom voraus, so kann man die (asymptotische) Parallelität in Richtung eines idealen Punktes Ω und die Relation „korrespondierend“ auch im 3-dimensionalen Raum erklären. Die Menge $\mathcal{S}$ aller Punkte X, die (bezüglich einer Richtung Ω) zu einem festen Punkt P korrespondierend sind, bezeichnet man dann als ***Grenzfläche*** oder ***Horosphäre***. Der ideale Punkt Ω wird wieder ***Zentrum*** genannt, die Geraden oder Strahlen in Richtung Ω heißen auch hier ***Achsen*** oder ***Radien***.

Eine Ebene, die einen Radius von $\mathcal{S}$ enthält, nennt man eine ***diametrale Ebene***. Jede diametrale Ebene schneidet die Horosphäre in einem Horozykel. Und nun passiert etwas ganz Erstaunliches: Die Horosphäre und die auf ihr gelegenen Horozykeln ergeben ein Modell für die ebene euklidische Geometrie, das euklidische Parallelenaxiom eingeschlossen. Für Bolyai war das wohl das entscheidende Indiz dafür, dass er auf der richtigen Spur war. In der euklidischen Geometrie auf der Horosphäre kann man ganz normal mit Winkelfunktionen arbeiten, und das hilft bei der Suche nach der Formel für den Parallelitätswinkel.

Später in einem Modell wird es wesentlich einfacher gehen.