

3.3 Aus Nichts eine neue Welt

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) war die dominierende mathematische Persönlichkeit seiner Zeit und sicher einer der größten Mathematiker aller Zeiten.

Schon in der Volksschule fiel er durch seine Rechenkünste auf, einer seiner ersten Förderer war **Martin Bartels**, der Gehilfe des Schullehrers, mit dem ihn eine lebenslange Freundschaft verband. Im Gymnasium in Braunschweig übersprang er mehrere Klassen, und der Herzog von Braunschweig wurde auf ihn aufmerksam gemacht. Der Herzog finanzierte ihm sein Studium, zunächst in Braunschweig, später in Göttingen, wo er bei dem Physiker Georg Christoph Lichtenberg und bei dem schon erwähnten Mathematiker Kästner Vorlesungen hörte.

1796 (im Alter von 18 Jahren) entdeckte er, dass das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. In dieser Zeit lernte er auch einen jungen ungarischen Adligen kennen, **Wolfgang Bolyai** (1775 – 1865), woraus sich eine sehr enge Freundschaft entwickelte. Da Gauß 1798 nach Braunschweig zurückkehrte, sahen sich die Freunde 1799 zum letzten Mal, blieben aber ihr Leben lang in brieflicher Verbindung.

Am 16. Juli 1799 (im Alter von 22 Jahren) wurde Gauß auf Wunsch des Herzogs an der Landesuniversität Helmstedt promoviert, in Abwesenheit und unter Verzicht auf eine mündliche Prüfung. Seine Dissertation enthielt den ersten korrekten und vollständigen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra.

1801 wurde er durch seine grundlegende Arbeit zur modernen Zahlentheorie mit einem Schlag in der Fachwelt bekannt, aber noch berühmter wurde er weltweit, als es ihm im Dezember 1801 gelang, den Anfang des Jahres beobachteten und wieder verlorenen Planetoiden Ceres erneut am Himmel zu entdecken. Er bekam dadurch Kontakt zu führenden Astronomen seiner Zeit.

Als die Franzosen 1806 im Auftrag Napoleons Braunschweig eroberten, hatte einer der Generäle den Auftrag, ganz besonders auf das Wohlergehen von Gauß zu achten, damit ihn nicht das Schicksal des Archimedes ereile. 1807 erhielt Gauß einen Ruf nach Göttingen als Professor für Astronomie und Direktor der dortigen Sternwarte. Dort blieb er bis zu seinem Lebensende. 1820 erhielt er den Auftrag zur Vermessung des Königreichs Hannover, und so führte er von 1821 bis 1825 praktische Vermessungsarbeiten durch.

1828 erschien sein differentialgeometrisches Hauptwerk über krumme Flächen und 1831 eine Arbeit über Algebra, in der er die komplexe Zahlenebene einführte. Im selben Jahr kam Wilhelm Weber als Professor für Physik nach Göttingen. Mit ihm zusammen stellte Gauß Untersuchungen über elektromagnetische Induktion und den Erdmagnetismus an. 1833 erfanden sie zusammen den elektrischen Telegraphen.

In seinen letzten Jahren lernte er noch Russisch und beteiligte sich an einer Reorganisation der Universitätswitwenkasse. 1849 wurde er anlässlich seines 50-jährigen

Doktorjubiläums zum Ehrenbürger der Stadt Göttingen ernannt. Acht Monate vor seinem Tod, am 10. 6. 1854, hörte er noch den berühmten Habilitationsvortrag von Bernhard Riemann: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“

Seit 1792 beschäftigte sich Gauß mit der Theorie der Parallellinien, 1794 (im Alter von 17) kannte er schon die Geometrie unter der die Hypothese vom spitzen Winkel. Beim Abschied vor seiner Heimreise nach Ungarn hatte ihm Wolfgang Bolyai angekündigt, er habe einen Beweis für das V. Postulat (der sich später natürlich als falsch herausstellte). Ende des Jahres schrieb Gauß an Wolfgang, er sei selbst in seinen Arbeiten zu diesem Thema vorangekommen, die Wahrheit der Geometrie sei dadurch aber eher zweifelhaft geworden. Die Möglichkeit einer anderen als der euklidischen Geometrie hatte er zu diesem Zeitpunkt noch nicht erwogen. 1816 beklagte er sich in einer Buchbesprechung darüber, dass man bei der Behandlung einer Lücke in den Anfangsgründen der Geometrie nach 2000 Jahren noch nicht weiter gekommen sei.

Friedrich Ludwig Wachter (1792 – 1817), einer der wenigen Schüler von Gauß, der später Professor für Mathematik am Gymnasium von Danzig war, unternahm umfangreiche Untersuchungen zum Parallelenproblem, lieferte einige falsche Beweise und nannte die Geometrie unter der Hypothese des spitzen Winkels „Anti-Euklidische Geometrie“. In den Jahren 1816/17 scheint Gauß allmählich zu der Erkenntnis gekommen zu sein, dass die neue Geometrie genauso denkbar wie die Euklidische sei. Er war aber auch davon überzeugt, dass eine Veröffentlichung seiner Ansichten nur zu Hohn und Spott führen würde, und er beschränkte sich daher auf Andeutungen in Briefen an seine Freunde.

Im Januar 1819 leitete der Marburger Professor Gerling die Notizen seines Kollegen **Ferdinand Karl Schweikart** (1780 - 1857) an Gauß weiter. Darin hieß es:

„Es gibt eine zweifache Geometrie, - eine Geometrie im engeren Sinn - die Euklidische; und eine astralische Größenlehre. Die Dreiecke der letzteren haben das Eigene, dass die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist. ...“

Schweikart erwähnte, dass die Fläche von Dreiecken proportional zu ihrem Defekt sei, und dass die Astral-Geometrie (die er wohl deshalb so nannte, weil sie sich erst bei astronomischen Entfernungen von der Euklidischen unterscheidet) von einer Konstanten abhängt. Die Euklidische Geometrie sei nur wahr, wenn diese Konstante unendlich groß sei.

Gauß antwortete sehr erfreut und bemerkte, er selbst habe die Astralgeometrie so weit ausgebildet, dass er alle Aufgaben vollständig lösen könne, sobald die Konstante gegeben sei.

Franz Adolph Taurinus (1794 – 1874), ein Neffe Schweikarts, ist von diesem zu weiteren Untersuchungen angeregt worden. Im Gegensatz zu seinem Onkel glaubte

er fest an das fünfte Postulat und versuchte, es zu beweisen. 1824 schrieb Gauß an Taurinus, er hätte festgestellt, dass die Hypothese vom spitzen Winkel auf eine eigene von der Euklidischen ganz verschiedene Geometrie führe, die in sich selbst durchaus konsequent sei. Er bestehe aber darauf, dass diese Mitteilungen privat seien und nicht an die Öffentlichkeit gelangen dürften.

Es ist auffällig, wie sehr Gauß sich scheute, mit seinen nichteuklidischen Überlegungen an die Öffentlichkeit zu treten. Das Thema muss zu dieser Zeit einen ähnlichen Ruf besessen haben wie die Frage nach der Quadratur des Kreises oder der Konstruktion eines Perpetuum Mobile. Besonders berühmt ist in diesem Zusammenhang der Brief von Gauß an Bessel vom 27. 1. 1829:

„Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahre alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: ich weiß nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter konsolidiert, und meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird dies auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte.“

Bei den Böotiern handelte es sich wohl um einen als etwas einfältig geltenden griechischen Stamm.

Am 17. Mai 1831 erwähnte Gauß in einem Brief an Schumacher, dass er jetzt doch angefangen habe, einiges zu dem Thema aufzuschreiben, damit es nicht mit ihm unterginge.

1832 erhielt Gauß einen Brief von seinem Jugendfreund Wolfgang Bolyai, sowie dessen Buch über Geometrie und einen Anhang von Wolfgangs Sohn **Johann Bolyai** (1802 – 1860) mit sensationellem Inhalt. Doch dazu muss man etwas weiter ausholen.

Im Juni 1799 hatte Wolfgang Bolyai Göttingen verlassen (aus Geldmangel zu Fuß), im September kam er nach mancherlei Abenteuern in seiner Heimat in der Nähe von Hermannstadt in Siebenbürgen an. 1801 heiratete er, 1802 wurde sein Sohn Johann geboren. 1804 erhielt Wolfgang eine Professur an einem evangelischen Kollegium. Dort entstand sein Hauptwerk, das sogenannte „Tentamen“ (Versuch), ein großes Lehrbuch zur Geometrie. Sein Sohn Johann zeigte schon früh mathematische Begabung, und er äußerte gegenüber Gauß seine Hoffnung, seinen Sohn eines Tages nach Göttingen schicken zu können, damit er Schüler von Gauß würde. Am 10. 4. 1816 schien ihm der Tag gekommen zu sein, und er schrieb an seinen Jugendfreund:

„... Ich wollte ihn 3 Jahre lang bei Dir halten und, wenn es möglich wäre, in Deinem Hause, denn allein kann man einen 15-jährigen Jüngling nicht

dalassen, und einen Hofmeister mitzuschicken übersteigt meine durch viele Prozesse geschwächten Kräfte.

Deiner Frau Gemahlin Unkosten würde ich, versteht sich, schon entschädigen. Wir würden alles anordnen, wenn ich mit ihm zu Dir hinaufginge. In Hinsicht auf diesen Plan berichte mir unverholen:

- 1. Hast Du nicht eine Tochter, welche damals gefährlich (reciproce) wäre . . .*
- 2. Seid Ihr gesund, nicht arm, zufrieden, nicht mürrisch? Besonders ist Deine Frau Gemahlin eine Ausnahme von ihrem Geschlechte? Ist sie nicht veränderlicher als die Wetterhähne und so wenig im Voraus zu berechnen wie die Barometerveränderungen? . . .*
- 3. Alle Umstände zusammengenommen kannst Du mir leichter mit einem Worte sagen, dass es nicht sein kann; denn ich werde nie daran zweifeln, dass es nicht an Deinem Herzen fehlen wird.“*

Gauß muss über diesen Brief sehr befremdet gewesen sein. Zudem hatte er überhaupt kein Interesse an Schülern und den Kopf voll mit privaten und dienstlichen Problemen. Er verzichtete auf eine Antwort und ließ danach 16 Jahre lang nichts mehr von sich hören.

Johann Bolyai ging daraufhin 1818 auf die Ingenieur-Akademie in Wien und trat 1823 in den Militärdienst ein. Seit 1820 beschäftigte er sich trotz eindringlicher Warnungen seines Vaters mit dem Parallelenproblem, und gegen Ende des Jahres, in dem er seine erste Stelle in Temesvár antrat, scheint er den Durchbruch geschafft zu haben. Am 3. November 1823 schrieb er seinem Vater:

„Mein Vorsatz steht schon fest, dass ich, sobald ich es geordnet, abgeschlossen habe und eine Gelegenheit kommt, ein Werk über die Parallelen herausgeben werde. . . . Ich habe es noch nicht, aber ich habe so erhabene Dinge herausgebracht, dass ich selbst erstaunt war und es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen; wenn Sie, mein teurer Vater, es sehen werden, so werden Sie es erkennen; jetzt kann ich nichts weiter sagen, nur so viel: dass ich aus Nichts eine neue, andere Welt geschaffen habe. Alles, was ich bisher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu einem Turme. . . .“

Wolfgang Bolyai zeigte sich bereit, die Theorie seines Sohnes als Anhang in sein Lehrbuch aufzunehmen, und er mahnte ihn zur Eile. Er ahnte, dass die Zeit reif für die neue Geometrie war und dass die Gefahr bestand, dass sie an mehreren Orten gleichzeitig gefunden wurde. Aber er verstand die Dinge nicht, die sein Sohn gefunden hatte, es kam zu Streitigkeiten, und es dauerte noch mehrere Jahre, bis der Druck vollendet war.

Anfang 1832 erschien endlich das Tentamen, zusammen mit dem Anhang von Johann Bolyai, dem berühmten „Appendix“. Das Original war in Latein geschrieben, aber Johann Bolyai gab selbst 1832 eine deutsche Bearbeitung heraus. Der deutsche Titel lautete: RAUMLEHRE, unabhängig von der (a priori nie entschieden werden) Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms (gemeint ist

damit natürlich das V. Postulat): Für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises.

Über den Inhalt wird weiter unten berichtet werden. Mit der „Quadratur des Kreises“ ist die Konstruktion eines gleichseitigen konvexen Vierecks mit 4 gleichen Winkeln gemeint, dessen Fläche gleich der eines gegebenen Kreises ist. Echte Quadrate gibt es unter der Hypothese des spitzen Winkels natürlich nicht.

Auf Umwegen (eine Postsendung war verloren gegangen) erreichte Gauß im Februar ein Exemplar des Appendix. Am 14. 2. 1832 äußerte sich Gauß in einem Brief an Gerling sehr positiv über die Arbeit und nannte den jungen Bolyai ein „Genie erster Größe“. In seiner Antwort vom 6. 3. 1832 an Wolfgang Bolyai schrieb er:

„Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfangen, „dass ich solche nicht loben darf“: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen. Aber ich kann nicht anders; sie loben hieße mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehend mit meinen eigenen, zum Teil schon seit 30–35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt. . . .

Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge. Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.“

Nach einigen Verbesserungsvorschlägen schrieb er noch:

„. . . Jedenfalls bitte ich Dich, Deinen Sohn herzlich von mir zu grüßen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen, den Kubikinhalt des Tetraeders zu bestimmen. . . . Man hätte erwarten sollen, dass es auch dafür einen einfachen Ausdruck geben werde; aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht. . . .

Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen den beiden geometrischen Systemen a priori zu unterscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. . . .“

Der Eindruck auf Johann Bolyai war niederschmetternd. Gauß hatte nicht die erwartete begeisterte Zustimmung geäußert, sondern angeblich alles schon Jahrzehnte

vorher gewusst. Er speiste ihn mit einer Übungsaufgabe ab und mit der Bemerkung, dass er sich darüber freue, dass ihm ausgerechnet der Sohn eines Freundes mit der Veröffentlichung zuvor gekommen sei. Und er verweigerte ihm die öffentliche Anerkennung. Die Enttäuschung führte zum völligen Persönlichkeitsverfall Johanns, er warf sich rastlos nur noch auf unlösbare Probleme, wurde aus dem Armeedienst entlassen und überwarf sich mit seinem Vater, der 1856 (hochgeehrt) starb. Die letzten Jahre seines Lebens verbrachte Johann verarmt und in großer Einsamkeit. Er starb 1860 unbeachtet und wurde in einem namenlosen Grab verscharrt. Erst als die Briefe von Gauß nach dessen Tod veröffentlicht wurden, erfuhr die Welt von der Entdeckung des Johann Bolyai.

Gauß, der noch in den zwanziger Jahren bei seinen Vermessungsarbeiten am Beispiel des größten vermessenen Dreiecks (zwischen dem Brocken, dem Inselsberg und dem Hohen Hagen) im Rahmen der Messgenauigkeit die Winkelsumme von 180° bestätigt gesehen hatte, war sich im Klaren darüber, dass die neue Geometrie in der Wirklichkeit höchstens bei astronomischen Entfernungen zum Vorschein kommen könnte. Trotzdem war er fest von der Richtigkeit der Theorie überzeugt, und er wusste deshalb sicher auch die Arbeit von Johann Bolyai zu schätzen. Über seine eigenartige Reaktion ist viel spekuliert worden, wir können sie nur zur Kenntnis nehmen. In den nächsten Jahren wandte sich Gauß seinen physikalischen Untersuchungen zu. Erst 1841 kam die Parallelentheorie wieder ins Spiel, er erwähnte eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung eines Kasaner Professors namens Lobatschewski, zwei Jahre, nachdem er begonnen hatte, Russisch zu lernen. 1844 kam er in zwei Briefen an Gerling wieder auf Lobatschewski zu sprechen und 1846 äußerte er sich gegenüber Schumacher sehr positiv über Lobatschewskis Veröffentlichungen. Aber auch diesmal blieb er seinen Prinzipien treu und äußerte sich nicht in der Öffentlichkeit dazu.

Wer war Lobatschewski? Unter Zar Alexander I wurden in den Jahren 1801 – 1805 zahlreiche Reformen durchgeführt, darunter die Gründung neuer Universitäten, u.a. 1804 in Kasan. 1812 zog Napoleon nach Russland, mit den bekannten Folgen, und ab 1815 – nach dem Wiener Kongress – versuchte man noch einmal, den inneren Aufbau voranzutreiben. Aber ab 1818 wurden viele der Reformen wieder zurückgenommen.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793 – 1856), geboren in Nishni-Nowgorod, lebte ab etwa 1800 unter einfachsten Verhältnissen in Kasan, besuchte dort das Gymnasium und ab 1807 die neu gegründete Universität. Zufällig wurde 1808 der Deutsche Bartels als Vertreter der Reinen Mathematik dorthin berufen, jener Bartels, der schon als früher Förderer von Gauß in Erscheinung getreten war und der nie ganz den Kontakt zu Gauß verloren hatte.

Ab 1809 verlegte Lobatschewski seinen Arbeits-Schwerpunkt auf die Mathematik, und nachdem er schon einige kleinere Ämter inne gehabt hatte, wurde er 1816 (im

Alter von 23 Jahren) in den Lehrkörper aufgenommen. Um diese Zeit begann er auch mit Untersuchungen zum Parallelenproblem.

1822 wurde Lobatschewski zum ordentlichen Professor ernannt. Zeitweise lag die ganze Last des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaften auf seinen Schultern, hinzu kamen zahlreiche Verwaltungsaufgaben. 1823 reichte er das Skript für ein Geometriebuch ein, das aber abgelehnt wurde, unter anderem deswegen, weil er als Maßeinheit das französische Meter und den 100. Teil des Rechten Winkels benutzt hatte.

Nach anfänglichen vergeblichen Versuchen zum Beweis des Parallelenpostulats entdeckte er, dass die Hypothese des spitzen Winkels auf eine in sich geschlossene und konsequente Geometrie führt. Im Februar 1826 legte er seine neue Geometrie dem Kollegium vor, 1829 - 30 wurden die Ergebnisse unter dem Titel „Über die Anfangsgründe der Geometrie“ in der Universitätszeitung, dem „Kasaner Boten“, veröffentlicht (natürlich auf Russisch). Er sprach darin klipp und klar aus, dass das Euklidische Parallelenaxiom unbeweisbar sei und es eine in sich widerspruchsfreie Geometrie (die sogenannte „imaginäre Geometrie“) gäbe, in der die Winkelsumme im Dreieck weniger als 180° betrage. Die schwer verständliche Arbeit fand bei den Kollegen wenig Anklang. Im Ausland blieb sie unbekannt, da der Kasaner Bote außerhalb Russlands nicht zu haben war.

1827 wurde Lobatschewski (im Alter von 33 Jahren) zum Rektor der Universität gewählt. Diesen Posten hatte er 19 Jahre lang inne. Mit unermüdlichem Arbeitseifer sorgte er für Ruhe im Kollegium und ordnungsgemäße Lehre, brachte die Bibliothek und die wissenschaftlichen Sammlungen in Ordnung, förderte Neubauten und war zeitweise auch noch mit der Revision von Gymnasien beschäftigt. Nachdem der Kasaner Bote eingestellt worden war, gründete er 1834 die „Gelehrten Schriften der Kasaner Universität“, in denen 1835 seine „Imaginäre Geometrie“ und später seine „Neuen Anfangsgründe der Geometrie“ erschienen. 1840 erschien in Berlin bei der Fincke'schen Buchhandlung auf Deutsch sein 61 Seiten langes kleines Buch mit dem Titel „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien“, auf das Gauß 1846 Schumacher in einem Brief aufmerksam machte.

1846 wurde Lobatschewski nach 25-jähriger Dienstätigkeit von seinen Ämtern enthoben. 1855 veröffentlichte er anlässlich der 50-Jahres-Feier der Universität Kasan eine Zusammenfassung seiner Ideen unter dem Namen „Pangeometrie“, 1856 starb er nach schwerer Krankheit. Seine Verdienste um die Universität hatten ihm hohe Wertschätzung und zahlreiche Ehrungen eingebracht, doch sein wissenschaftliches Werk wurde zu seinen Lebzeiten nie anerkannt, sondern nur als verzeihliche Wahnidee belächelt. Erst nach 1863 wurde man durch die Veröffentlichung der Briefe von Gauß auf ihn aufmerksam. 1893 – zu seinem 100. Geburtstag – errichtete man ihm in Kasan ein Denkmal.

Drei große Männer der Mathematik – eine Theorie! Gauß, der berühmte Fürst der Mathematiker, scheint schon 1819 von der Existenz einer alternativen Geometrie

überzeugt gewesen zu sein, aber er hat nie etwas darüber veröffentlicht. Nur aus Skizzen in seinem Nachlass kann man schließen, dass seine Ideen denen von Bolyai sehr nahe waren.

Johann Bolyai hat seine neue Geometrie um 1823 gefunden, sie aber erst 1832 veröffentlicht.

Der emsige russische Professor Lobatschewski hat die nichteuklidische Geometrie um 1826 entwickelt und sie 1829-30 als erster veröffentlicht, auch wenn kaum jemand in der Welt Notiz davon genommen hat.

Alle drei haben sich von der Vorstellung verabschiedet, das Euklidische Parallelenaxiom könnte vielleicht doch noch durch einen Widerspruch zur Hypothese vom spitzen Winkel bewiesen werden. Sie haben eine ausgedehnte und konsequente Theorie entwickelt, in der kein Widerspruch zu erkennen war. Ein Modell konnten allerdings alle drei nicht liefern! Das blieb späteren Mathematikern vorbehalten, den Anfang machte 1868 der Italiener **Eugenio Beltrami** (1835 – 1900), der eine Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum vorstellte, auf der – zumindest lokal – die ebene nichteuklidische Geometrie verwirklicht war.