3.2 Die Hypothese vom spitzen Winkel

Girolamo Saccheri (1667 - 1733) wurde am 5. September 1667 in San Remo in der Republik Genua geboren. 1685 wurde er in den Jesuitenorden aufgenommen. Als Lehrer für Grammatik wirkte er in Mailand und lernte dort bei dem Mathematiker Tommaso Ceva die Euklidische Geometrie kennen. 1694 wurde er in Como zum Priester geweiht. Nach einem Aufenthalt in Turin kam er 1697 nach Pavia, wo er am Jesuitenkollegium und an der Universität Vorlesungen hielt. Er soll ein großes Rechengenie und ein guter Schachspieler gewesen sein.

Wie der Engländer Savile war auch Saccheri der Meinung, dass es zwei Makel in Euklids Werk gäbe. Sein Hauptwerk trägt daher den Titel:

Euclides ab omni naevo vindicatus
sive Conatus Geometricus quo stabiliuntur
Prima ipsa universae Geometriae Principia.

Der von jedem Makel befreite Euklid
oder
Ein geometrischer Versuch zur Begründung
der Grundsätze der ganzen Geometrie.

Von dem 2-bändigen Werk interessiert nur der 1. Teil über die Parallelen. Saccheri gewinnt diesem Problem eine völlig neue Seite ab. Alle bisherigen Versuche beruhten auf dem Grundgedanken, dass man das fünfte Postulat unmittelbar aus der neutralen Geometrie herleiten könne. Bei allen wurde jedoch – mehr oder weniger offen – ein neues Axiom an Stelle des alten eingeführt.

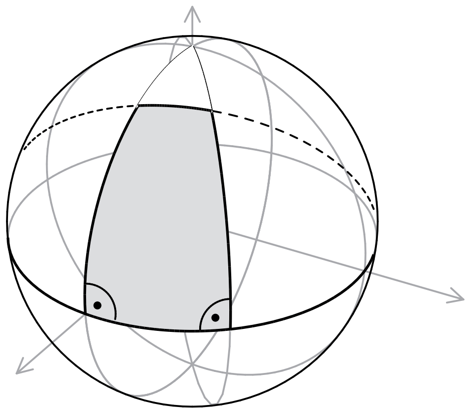
Saccheri hatte nun bei Untersuchungen über Logik besonderen Gefallen an der Methode der „reductio ad absurdum“ gefunden. Er kannte die Untersuchungen der Araber und führte erneut die von diesen betrachteten Vierecke ein, die wir im Vorgriff schon als „Saccheri-Vierecke“ bezeichnet haben. Einige seiner Sätze kennen wir schon von Khayyam und Nadir ad-Din, darauf brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Saccheri unterscheidet nun – wie schon Khayyam, aber mit größerer Deutlichkeit – drei Hypothesen, je nach Art der Gipfelwinkel im Saccheri-Viereck:

Die Hypothese des rechten Winkels, die Hypothese des stumpfen Winkels und die Hypothese des spitzen Winkels.

Er zeigt, dass diese Hypothesen, wenn sie nur bei einem Saccheri-Viereck erfüllt sind, dann auch zugleich für alle gelten. Sie schließen sich also gegenseitig aus, und da die Hypothese vom rechten Winkel äquivalent zum Parallelenaxiom ist, gilt es nur, die beiden anderen Hypothesen nach dem Widerspruchsprinzip auszuschließen.

Dass die Gültigkeit der Hypothesen vom spitzen oder stumpfen Winkel nicht völlig unmöglich ist, sieht man vielleicht am Beispiel der sphärischen Geometrie, in der es durchaus Saccheri-Vierecke mit stumpfen Gipfelwinkeln gibt. Allerdings sind dort längst nicht alle Axiome der neutralen Geometrie erfüllt.



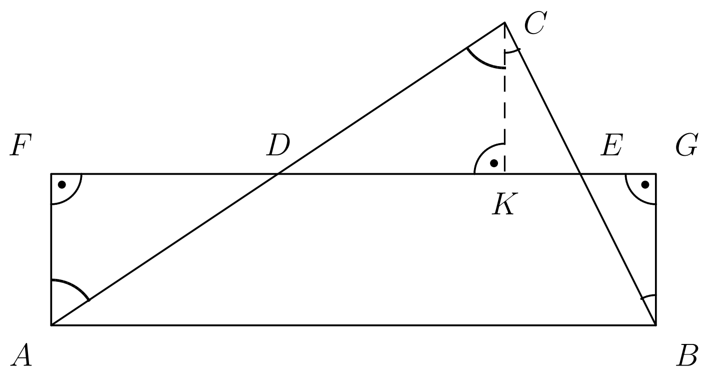
Ein Teil der Ergebnisse von Saccheri wurde später wiederentdeckt und auf andere Weise, zum Teil einfacher, bewiesen. Besonders tat sich dabei der französische Mathematiker Legendre hervor.

Erster Satz von Saccheri-Legendre:

1. *Die Hypothese vom rechten, stumpfen oder spitzen Winkel ist genau dann erfüllt, wenn es ein Dreieck mit Winkelsumme* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$ *gibt.*

2. *Ist die Winkelsumme in einem Dreieck* $= 180°$, $> 180°$ *oder* $< 180°$, *so ist sie das auch in jedem anderen Dreieck.*

Beweis: 1) Sei ABC ein beliebiges Dreieck, D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und E der Mittelpunkt von $\overline{BC}$. Fällt man noch das Lot von A auf DE mit Fußpunkt F und das Lot von B auf DE mit Fußpunkt G, so erhält man folgende Figur:



Dann gilt:

1. $GFAB$ ist ein Saccheri-Viereck mit Basis $\overline{GF}$.

2. Die Summe der beiden Gipfelwinkel $\angle FAB$ und $\angle GBA$ stimmt mit der Summe der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC überein.

Zum Beweis dieser Aussagen:

Fällt man noch das Lot von C auf DE mit Fußpunkt K, so sieht man:

$$ADF \mathrel{\widehat{=}} DKC \quad \text{und } BGE \mathrel{\widehat{=}} KEC.$$

Also ist $\angle FAD \mathrel{\widehat{=}} \angle DCK$ und $\angle GBE \mathrel{\widehat{=}} \angle ECK$ und damit $\angle FAB + \angle GBA = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$. Die Winkelsumme des beliebig ausgewählten Dreiecks ABC ist also gleich der Summe der Gipfelwinkel eines Saccheri-Vierecks. Daraus folgt die Behauptung.

2) Da das Dreieck beliebig gewählt werden konnte, die Winkel-Hypothesen aber jeweils für alle Saccheri-Vierecke gleichzeitig gelten, stimmt das Kriterium mit der Winkelsumme für alle Dreiecke, wenn es nur für eins gilt. ∎

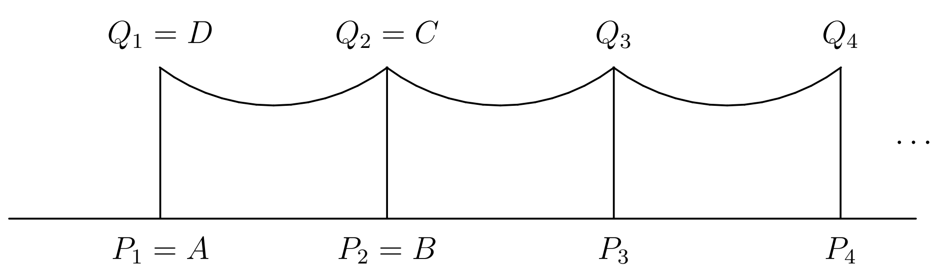
Zweiter Satz von Saccheri-Legendre:

1. *In jedem Saccheri-Viereck $ABCD$ ist $\overline{DC} \geq \overline{AB}$.*
2. *In jedem Dreieck ist die Winkelsumme $\leq 180°$.*

Beweis: 2) folgt aus (1): Ist in einem Saccheri-Viereck die Gipfellinie nicht kleiner als die Grundlinie, so müssen nach dem Satz von den 3 Hypothesen die Gipfelwinkel in diesem Viereck $\leq 90°$ sein. Nach dem 1. Satz von Saccheri-Legendre folgt dann die Behauptung über die Winkelsumme im Dreieck.

Nun zum Beweis von (1):

Auf der Geraden AB konstruieren wir Punkte $P_1 = A$, $P_2 = B$, $P_3, \ldots$ mit $\overline{P_iP_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB}$, und wir errichten Senkrechte $\overline{P_iQ_i}$ zu AB in P_i mit $\overline{P_iQ_i} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AD}$ für alle i.



Wir erhalten so eine Folge von kongruenten Saccheri-Vierecken $P_iP_{i+1}Q_{i+1}Q_i$, insbesondere ist also $\overline{Q_iQ_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{DC}$ für alle i.

Aus der Dreiecksgleichung folgt:

$$\overline{Q_1Q_{n+1}} \leq \overline{Q_1Q_2} + \cdots + \overline{Q_nQ_{n+1}} = n \cdot \overline{DC}.$$

Und ebenso folgt aus der Dreiecksungleichung:

$$\overline{P_1P_{n+1}} \leq \overline{P_1Q_1} + \overline{Q_1Q_{n+1}} + \overline{Q_{n+1}P_{n+1}} \leq 2\overline{AD} + n \cdot \overline{DC}.$$

Da $\overline{P_1P_{n+1}} = n \cdot \overline{AB}$ ist, erhalten wir insgesamt:

$$n \cdot \overline{AB} \leq n \cdot \overline{DC} + 2 \cdot \overline{AD}.$$

Annahme: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

Dann ist $\overline{AB} - \overline{DC} > 0$, also eine echte Strecke, aber $n \cdot (\overline{AB} - \overline{DC}) \leq 2 \cdot \overline{AD}$ für alle n. Das widerspricht dem Archimedes-Axiom! Also war die Annahme falsch, es ist $\overline{DC} \geq \overline{AB}$. ∎

Folgerung (Satz von Saccheri):

Die Hypothese vom stumpfen Winkel kann nicht gelten.

Beweis: Trivial! Würde die Hypothese vom stumpfen Winkel gelten, so müsste in jedem Saccheri-Viereck $ABCD$ gelten: $\overline{DC} < \overline{AB}$.

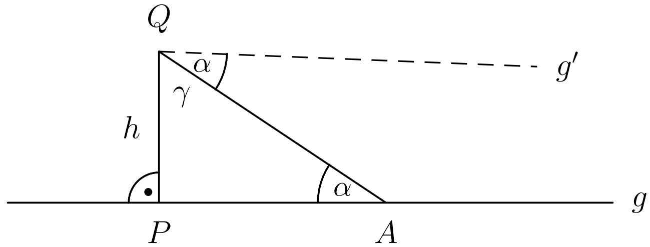
Und Saccheri verkündet an dieser Stelle stolz: *Die Hypothese des stumpfen Winkels ist ganz und gar falsch, weil sie sich selbst zerstört!* ∎

Der Originalbeweis von Saccheri verläuft etwas anders, er benutzt die Methode, die Nasir ad-Din schon bei der Behandlung der Hypothese vom rechten Winkel verwendet hatte. Es wird oft kritisiert, dass Saccheri dabei den Außenwinkelsatz benutzt, der unter der Hypothese des stumpfen Winkels gar nicht gelten kann, aber da er schließlich zu einem Widerspruch gelangt, ist das kein wirklicher Mangel. Man muss sich vorstellen, welche Gefühle Saccheri bewegt haben mögen, als er – fast 2000 Jahre nach Euklid – diesen ersten nennenswerten Fortschritt beim Parallelenproblem erzielt hatte. Um das fünfte Postulat zu beweisen, musste er nur noch die Hypothese des spitzen Winkels zum Widerspruch führen. Und er stürzte sich in eine regelrechte Schlacht.

Ab jetzt sei die Hypothese vom spitzen Winkel vorausgesetzt.

Satz: *Gegeben sei eine Gerade g und dazu eine Senkrechte h. Dann gibt es eine Gerade g', die h mit spitzem Winkel schneidet und parallel zu g ist.*

Beweis: Sei $P \in g$ und $h = PQ$ die Senkrechte. Weiter sei $A \neq P$ ein anderer Punkt auf g. Das Dreieck PAQ hat einen rechten Winkel bei P und zwei spitze Winkel bei A und Q.



Trägt man $\alpha := \angle PAQ$ bei Q an QA an, so erhält man eine Gerade g', die wegen der Z-Winkel-Beziehung parallel zu g ist. Da die Winkelsumme im Dreieck PAQ kleiner als zwei Rechte sein muss, ist $\alpha + \gamma < 90°$, also schneidet g' h in einem spitzen Winkel. ∎

Als nächstes greifen wir der Entwicklung nach Saccheri vor und führen den ***Defekt eines (konvexen) n-Ecks*** $A_1A_2 \ldots A_n$ ein, als

$$\delta(A_1A_2 \ldots A_n) := (n-2) \cdot \pi - \mathrm{WS}(A_1A_2 \ldots A_n),$$

wobei WS(...) die Winkelsumme bezeichnet.[1]

Wie man sieht, gehen wir hier bei den Winkeln vom Gradmaß zum Bogenmaß über.

Unter der Hypothese des spitzen Winkels ist der Defekt eines Dreiecks

$$\delta(ABC) = \pi - \mathrm{WS}(ABC)$$

eine positive Zahl $< \pi$, der Defekt eines konvexen Vierecks

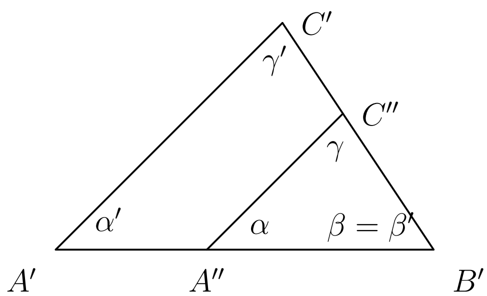
$$\delta(ABCD) = 2\pi - \mathrm{WS}(ABCD)$$

eine positive Zahl $< 2\pi$. Weiter kann man zeigen:

Hilfssatz: *Kann das n-Eck $\mathcal{P}_n$ durch einen Streckenzug (zwischen zwei Ecken) in ein r-Eck $\mathcal{Q}_r$ und ein s-Eck $\mathcal{R}_s$ zerlegt werden, so ist $\delta(\mathcal{P}_n) = \delta(\mathcal{Q}_r) + \delta(\mathcal{R}_s)$.*

Satz: *Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ existieren, die in allen 3 Winkeln übereinstimmen, aber nicht kongruent sind, dann gilt das Euklidische Parallelenaxiom.*

Beweis: Wir bezeichnen die Winkel in den Dreiecken jeweils mit α, β und γ bzw. α', β' und γ'. Wenn die Dreiecke nicht kongruent sind, muss $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$ sein. Wir nehmen an, es sei $\overline{A'B'} > \overline{AB}$.



Dann gibt es einen Punkt A'' mit $A' - A'' - B'$ und $\overline{A''B'} \widehat{=} \overline{AB}$. Trägt man α bei A'' an, so trifft der freie Schenkel $B'C'$ in einem Punkt C''.

[1]Nur bei **konvexen** Polygonen ist der Begriff der Winkelsumme unproblematisch!

Nach Konstruktion ist $A''B'C'' \mathrel{\widehat{=}} ABC$. Also ist

$$WS(A'A''C''C') = \alpha' + (\pi - \alpha) + (\pi - \gamma) + \gamma' = 2\pi.$$

Aber dann gilt das Parallelenaxiom. ∎

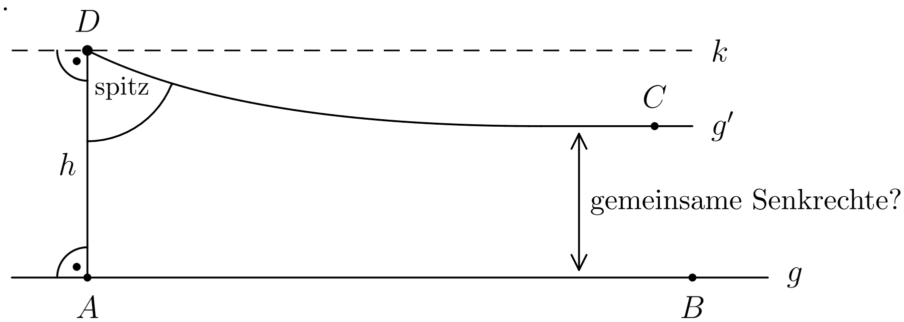
Bemerkenswert ist die logische Umkehrung des gerade gewonnenen Ergebnisses:

Folgerung (WWW-Kongruenz): *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt: Ähnliche Dreiecke sind kongruent.*

Daraus folgt: Ist μ eine Flächenfunktion, so hängt $\mu(ABC)$ unter der Hypothese des spitzen Winkels nur von den Winkeln des Dreiecks ab.

Wir kehren jetzt zu Saccheri zurück. Er wollte die Hypothese des spitzen Winkels zum Widerspruch führen und beschäftigte sich zu diesem Zweck genauer mit der folgenden Standardsituation:

Ist g eine Gerade und $D \notin g$ ein Punkt, sowie DA das Lot von D auf g mit Fußpunkt A, so ist die Senkrechte k zu DA in D eine Parallele zu g. Wie Saccheri aber schon gezeigt hat, gibt es durch D eine weitere Parallele $g' = DC$, so dass $\angle ADC$ spitz ist.

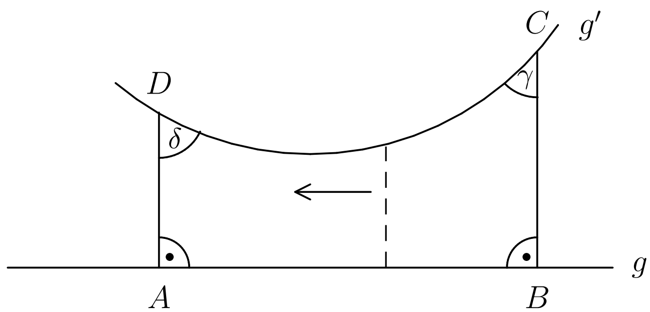


Dass es durch D zwei oder mehr Parallelen zu g geben soll, ist schon seltsam genug. Aber wie verhalten sich solche Parallelen, wenn man sich von $h := AD$ immer weiter weg bewegt? Saccheri hat sich wahrscheinlich das Folgende überlegt: Entweder nähert sich g' immer weiter der Geraden g, so dass ihr Abstand beliebig klein wird. Das erscheint absurd, aber man kann hoffen, auf diesem Wege zu einem Widerspruch zu kommen. Andernfalls kommt g' der Geraden g nicht beliebig nahe. Dann sagt einem aber die Anschauung, dass es eine gemeinsame Senkrechte zwischen g' und g geben müsste. Also untersucht Saccheri, ob es immer solche gemeinsamen Senkrechten gibt.

Man fälle das Lot von C auf g, o.B.d.A. sei B der Fußpunkt. Setzt man $\delta := \angle ADC$ und $\gamma := \angle DCB$, so kann man drei Möglichkeiten unterscheiden:

1. Fall: γ ist ebenfalls ein spitzer Winkel.

Dann ist der Nebenwinkel zu γ stumpf. Saccheri argumentiert nun folgendermaßen: Verschiebt man die Senkrechte zu g von B nach A, so schneidet sie g' zwischen D und C, und der Winkel auf der rechten Seite der Senkrechten ändert sich stetig von einem stumpfen zu einem spitzen Winkel. Irgendwann dazwischen muss er den Wert $\pi/2$ annehmen.



Dieses Argument kann man nur nachvollziehen, wenn man ein geeignetes Stetigkeits-Axiom zulässt. Deshalb wird **ab sofort** das **Dedekind-Axiom** vorausgesetzt. Das Kreisaxiom und das Archimedes-Axiom gelten dann automatisch auch, sowie auch das Intervallschachtelungs-Axiom. Tatsächlich kann man eine binäre Intervallschachtelung benutzen, um die gesuchte gemeinsame Senkrechte zu finden.

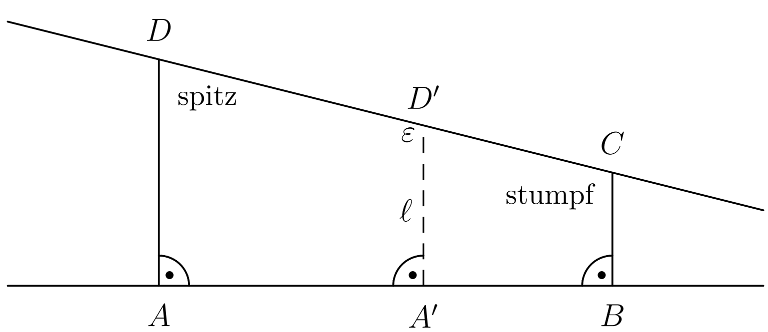
Damit ist gezeigt: Ist γ spitz, so besitzen g und g' eine gemeinsame Senkrechte.

2. Fall: γ ist ein rechter Winkel, oder γ ist stumpf, aber rechts von C gibt es noch eine gemeinsame Senkrechte von g und g'. In diesem Fall kann man die Frage nach der gemeinsamen Senkrechten positiv beantworten.

3. Fall: γ ist stumpf, und rechts von C gibt es keine gemeinsame Senkrechte von g und g'. Es soll gezeigt werden, dass sich g und g' in diesem Falle asymptotisch nähern!

Hilfssatz: *Ist $A' \in AB$ (auf der gleichen Seite von AD wie B), so schneidet die Senkrechte ℓ zu AB in A' die Gerade DC in einem Punkt D' (auf der gleichen Seite von AD wie B).*

Beweis: [2]



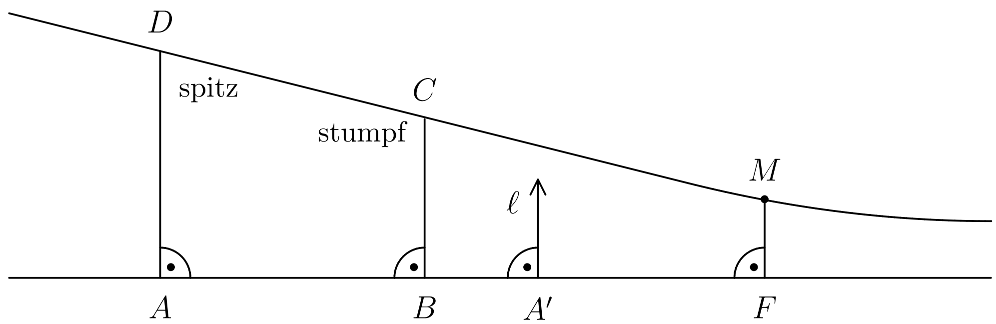
1) Zunächst gelte $A - A' - B$. Wegen der rechten Winkel bei A, A' und B ist die Senkrechte ℓ zu AB in A' parallel zu AD und zu BC, kann diese Geraden also nicht

[2]Die Formulierung des Hilfssatzes und seines Beweises musste gegenüber der Vorlesung korrigiert werden. Auch die alten Skripte sind an dieser Stelle nicht in Ordnung.

treffen. Weil ℓ die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABD trifft, muss ℓ nach Pasch noch die Seite $\overline{BD}$ treffen. Aber dann muss sie im Dreieck DBC auch noch die Seite $\overline{DC}$ in einem Punkt D' mit $D - D' - C$ treffen.

Wäre der Winkel $\varepsilon := \angle A'D'D$ ein rechter Winkel oder spitz, so wäre der Nebenwinkel $\angle A'D'C$ ein rechter Winkel oder stumpf und damit $A'BCD'$ ein Viereck mit einer Winkelsumme $\geq 2\pi$. Das kann nicht sein, ε muss stumpf sein. Damit gibt es auch zwischen A und B keine gemeinsame Senkrechte zwischen g und g'.

2) Nun gelte $A - B - A'$. In diesem Falle wähle man einen Punkt M auf DC, so dass $\overline{DM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}$ ist, und dann fälle man das Lot auf AB mit Fußpunkt F. Gilt $A - A' - F$, so kann man wie in (1) argumentieren, aber diese Lage von F muss man erst mal verifizieren.



Wegen der Dreiecksungleichung ist $\overline{DM} < \overline{DA} + \overline{AF} + \overline{FM}$. Und weil der stumpfe Winkel $\angle FMD$ größer als der spitze Winkel $\angle ADM$ ist, ist $\overline{FM} < \overline{AD}$. Damit folgt:

$$\overline{AF} > \overline{DM} - 2 \cdot \overline{AD} = (\overline{AA'} + 2 \cdot \overline{AD}) - 2 \cdot \overline{AD} = \overline{AA'}.$$

Damit ist die Lage-Beziehung $A - A' - F$ bewiesen, und der Beweis kann wie gewünscht zu Ende geführt werden. ∎

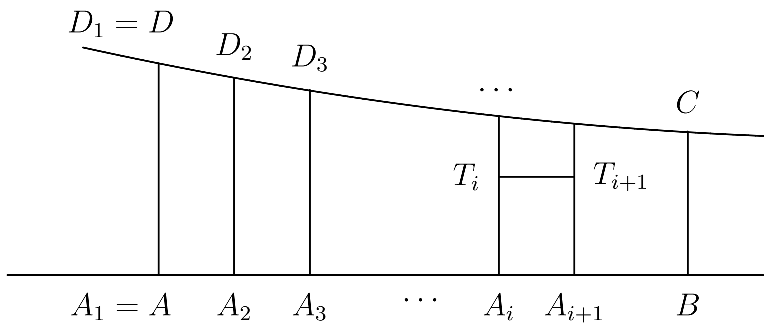
Behauptung: *In der obigen Situation laufen g und g' asymptotisch aufeinander zu, kommen sich also beliebig nahe.*

Beweis: Wir nehmen an, das wäre nicht der Fall! Dann gibt es eine Größe $r > 0$, so dass der Abstand zwischen AB und DC immer größer als r bleibt. Wir wählen Punkte A_i auf AB mit $A_1 := A$ und $\overline{A_iA_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{A_1A_2} > r$. In jedem A_i errichten wir eine Senkrechte A_iD_i auf AB, die DC laut Hilfssatz in einem Punkt D_i trifft. Dann entstehen Vierecke $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$, und für den Defekt dieser Vierecke gilt:

$$\delta(A_1A_2D_2D_1) + \cdots + \delta(A_nA_{n+1}D_{n+1}D_n) = \delta(A_1A_{n+1}D_{n+1}D_1) < 2\pi.$$

Wegen der Hypothese vom spitzen Winkel sind die einzelnen Defekte alle positiv. Es muss also zu jedem n ein $i = i(n)$ geben, so dass $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) < \dfrac{2\pi}{n}$ ist.

Andererseits enthält jedes Viereck $A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i$ ein Saccheri-Viereck $A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i$, dessen Seiten die Länge r haben, und alle diese Vierecke sind kongruent! Insbesondere haben sie alle den gleichen Defekt δ_0 (eine positive Zahl $< 2\pi$).



Nun wählen wir n so groß, dass $\dfrac{2\pi}{n} < \delta_0$ ist, und zu diesem n das passende $i = i(n)$.

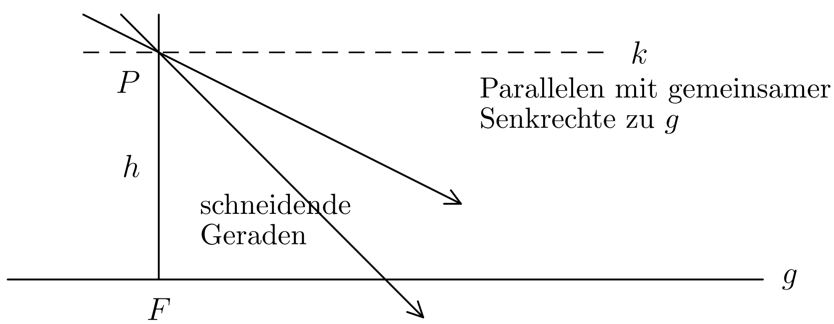
Da $\delta(A_iA_{i+1}D_{i+1}D_i) = \delta(A_iA_{i+1}T_{i+1}T_i) + \delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i)$ ist, folgt:

$$\delta(T_iT_{i+1}D_{i+1}D_i) < \frac{2\pi}{n} - \delta_0 < 0.$$

Das ist absurd! ∎

Damit ist gezeigt, dass jede Parallele DC zu AB, die mit dem Lot $h = AD$ bei D einen spitzen Winkel einschließt, auf dieser Seite entweder eine gemeinsame Senkrechte mit AB besitzt oder in dieser Richtung asymptotisch auf AB zuläuft.

Mit Hilfe dieser Aussage hoffte Saccheri, endlich die Hypothese des spitzen Winkels ausschließen zu können. Er betrachtete eine beliebige Gerade g, einen Punkt $P \notin g$ und das Büschel aller Geraden durch P zwischen dem Lot h von P auf g (mit dem Fußpunkt F) und der Senkrechten k zu h in P.



Es sei Σ die Menge aller Geraden durch P, die g „rechts“ von h schneiden und mit h einen spitzen Winkel einschließen. Diese Menge ist offensichtlich nicht leer.

Weiter sei Γ die Menge aller Parallelen zu g durch P, die mit g eine gemeinsame Senkrechte besitzen. Diese Menge ist nicht leer, denn sie enthält zumindest k. Es gibt nach Saccheri aber auch eine Gerade g' in Γ, die mit h einen spitzen Winkel einschließt.

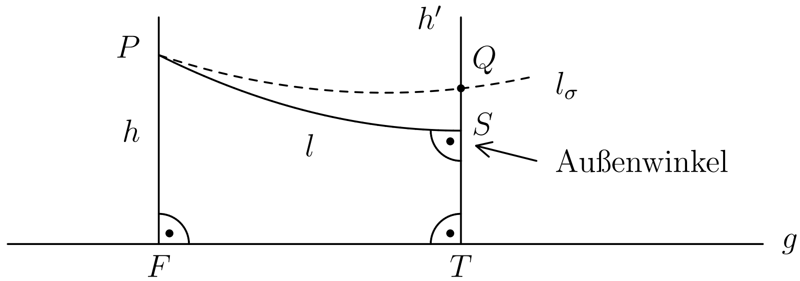
Für jeden Winkel γ mit $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ sei l_γ die Gerade durch P, die h im Winkel γ schneidet. Für jede solche Gerade l sei umgekehrt $\gamma(l)$ der Schnittwinkel zu h.

Satz:

1. *Ist* $l \in \Sigma$ *und* $\tau < \gamma(l)$, *so ist auch* $l_\tau \in \Sigma$.
2. *Ist* $l \in \Gamma$, $\gamma(l) < \pi/2$ *und* $\gamma(l) < \sigma \leq \pi/2$, *so ist auch* $l_\sigma \in \Gamma$.
3. $W(\Sigma) = \{\gamma : l_\gamma \in \Sigma\}$ *besitzt kein Maximum.*
4. $W(\Gamma) = \{\gamma : l_\gamma \in \Gamma\}$ *besitzt kein Minimum.*

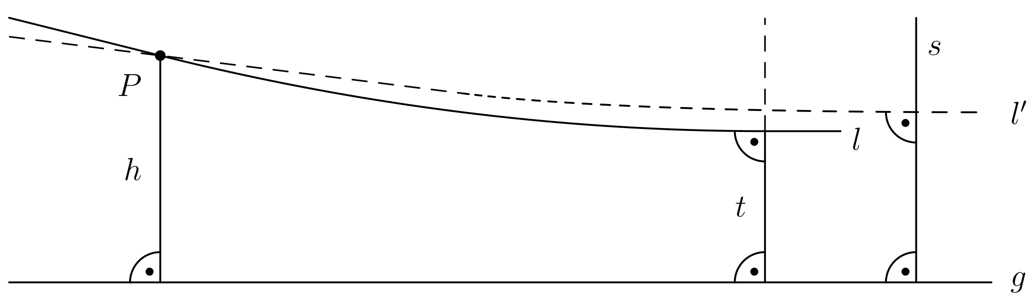
Beweis: Teil (1) ist trivial, nach Pasch. Und auch (3) ist offensichtlich.

(2) Sei $l \in \Gamma$, $\gamma(l) < \pi/2$ und h' die gemeinsame Senkrechte zwischen l und g. Deren Schnittpunkte mit l bzw. g seien mit S bzw. T bezeichnet. Weiter sei σ ein Winkel zwischen $\gamma(l)$ und $\pi/2$.



Wenn l_σ und g eine gemeinsame Senkrechte besitzen, dann liegt l_σ in Γ. Wenn nicht, dann folgt aus dem weiter oben bewiesenen Hilfssatz, dass sich h' und l_σ in einem Punkt Q treffen, der natürlich oberhalb von S liegen muss. So entsteht ein Dreieck PSQ mit einem rechten Winkel bei S. Also ist $\angle SQP$ spitz und der zugehörige Nebenwinkel stumpf. Für diesen Fall wurde schon mit Hilfe des Stetigkeitsaxioms gezeigt, dass g und l_σ eine gemeinsame Senkrechte besitzen.

Zum Beweis von (4) sei $\gamma \in W(\Gamma)$, $l = l_\gamma$ und t die gemeinsame Senkrechte von g und l. Wir errichten in weiterer Entfernung von h eine Senkrechte s zu g und fällen das Lot l' von P auf s. Dieses Lot kann g nicht treffen, weil dann ein Dreieck mit 2 rechten Winkeln entstehen würde. Also ist l' eine Parallele zu g.



Es soll gezeigt werden, dass $\gamma(l') \in W(\Gamma)$ und $\gamma(l') < \gamma$ ist. Damit ist dann klar, dass $W(\Gamma)$ kein Minimum besitzt.

Die erste Aussage ist klar, nach Konstruktion. Zum Beweis der zweiten Aussage muss man einige Fälle unterscheiden.

1. Fall: $l' = l$ ist nicht möglich, weil dann zwischen t und s ein Viereck mit vier rechten Winkeln entstehen würde.

2. Fall: l' verläuft „oberhalb“ von l (wie in der obigen Skizze). Dann trifft die Verlängerung von t die Gerade l' unter einem spitzen Winkel (Außenwinkelsatz), und indem man zum Nebenwinkel übergeht, erhält man zwischen t und s ein Viereck, in dem die Winkelsumme sogar $> 2\pi$ ist. Das kann erst recht nicht sein.

3. Fall: l' verläuft zwischen l und g. Das ist die einzige Option, die übrig bleibt, und in diesem Fall ist tatsächlich $\gamma(l') < \gamma$. ∎

Jetzt kommen wir zum entscheidenden Punkt!

Sei $\gamma_1 := \sup\{\gamma \mid l_\gamma \in \Sigma\}$ und $\gamma_2 := \inf\{\gamma \mid l_\gamma \in \Gamma\}$. Beides muss existieren, und es muss $\gamma_1 \le \gamma_2$ sein. Außerdem ist $\gamma_1 \notin W(\Sigma)$ und $\gamma_2 \notin W(\Gamma)$.

Sei $g_1 := l_{\gamma_1}$ und $g_2 := l_{\gamma_2}$. Dann ist g_1 eine Gerade, die g nicht mehr schneidet, also zu g parallel ist, und g_2 ist eine Parallele zu g, die keine gemeinsame Senkrechte mit g hat. Sie muss asymptotisch auf g zulaufen

Wäre $g_1 \ne g_2$, so würde der Abstand zwischen ihnen beliebig groß. Aber da g_2 asymptotisch auf g zuläuft und g_1 immer zwischen g und g_2 bleibt, kann das nicht sein! Damit haben wir erhalten:

> *Die Geraden durch P, die g schneiden, werden durch eine asymptotische Parallele von denjenigen Parallelen zu g getrennt, die eine gemeinsame Senkrechte mit g besitzen.*

Insbesondere ist – unter der Hypothese des spitzen Winkels – die Existenz von asymptotischen Parallelen gesichert.

An dieser Stelle glaubte nun Saccheri, er sei so gut wie am Ziel. Er verstrickte sich in immer kompliziertere und immer unklarere Beweise, um zu zeigen, dass die Existenz asymptotischer Parallelen der Natur der Geraden widerspricht. Im Grunde argumentierte er wie folgt:

Eine Gerade g und eine dazu asymptotische Gerade g' treffen sich in ∞ und haben dort eine gemeinsame Senkrechte, weil sich ihre Richtungen dort nicht mehr unterscheiden. Aber wegen der Eindeutigkeit der Senkrechten in einem Punkt kann das nicht sein.

Weil Saccheri selbst dem Frieden nicht so recht traute, gab er noch einen weiteren Beweis an, in dem er zwar interessante Eigenschaften von Parallelen unter der Hypothese des spitzen Winkels herleitete, schließlich aber auch nur durch unerlaubte Verquickung von Aussagen im Endlichen und im Unendlichen den endgültigen Widerspruch herbeiführte.

Am 13. Juli 1733 erhielt er die Druckerlaubnis der Inquisition, am 16. August 1733 die des Provinzials der Gesellschaft Jesu, und am 25. Oktober 1733 starb er nach längerer Krankheit. Es ist fraglich, ob er das Erscheinen seiner Arbeit noch erlebt hat.

Saccheris Schrift muss im 18. Jahrhundert unter den Fachleuten recht bekannt gewesen sein, später geriet sie jedoch in Vergessenheit.

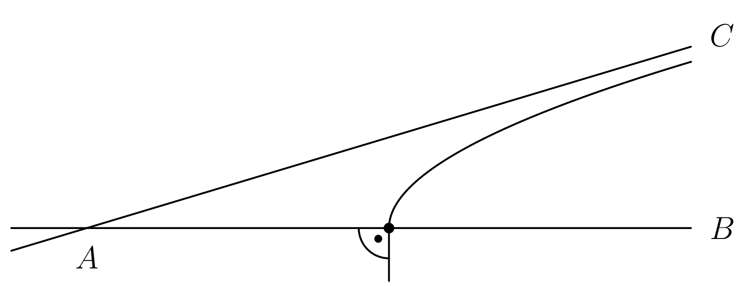
Abraham Gotthelf Kästner (1719 – 1800), ab 1756 Professor für Mathematik und Physik in Göttingen und ab 1763 Leiter der dortigen Sternwarte, schrieb zahlreiche Lehrbücher und besaß eine riesige Sammlung von Schriften, die nahezu alles umfasste, was bis etwa 1770 über das Parallelenproblem bekannt war. Von Gauß und Lichtenberg bekam Kästner die wenig schmeichelhafte Charakterisierung, er sei der größte Mathematiker unter den Dichtern und der größte Dichter unter den Mathematikern.

Unter seiner Anleitung entstand die Dissertation von **Georg Simon Klügel**, in der dieser die Geschichte des Parallelenproblems beschrieb und in recht scharfsinniger Weise eine große Zahl bisheriger Beweisversuche kritisierte. In einem Nachwort schrieb Kästner u.a. sinngemäß: „Niemand, der bei gesunden Sinnen ist, wird Euklids fünftes Postulat je bestreiten wollen.“

Auf dem Weg über Klügels Dissertation hat wohl auch der Schweizer Mathematiker **Johann Heinrich Lambert** (1728 – 1777) von Saccheris Ergebnissen erfahren.

Lambert betrachtete Vierecke mit 3 rechten Winkeln (die durch Halbierung eines Saccheri-Vierecks entstehen und heute auch als „Lambert-Vierecke“ bezeichnet werden). Je nach Art des 4. Winkels unterschied auch er die 3 Hypothesen vom rechten, stumpfen und spitzen Winkel. Und wie Saccheri führte auch er die 2. Hypothese zum Widerspruch. Er entdeckte unter anderem den WWW-Kongruenzsatz. Und er fand eine Reihe von sehr eigenartigen Ergebnissen.

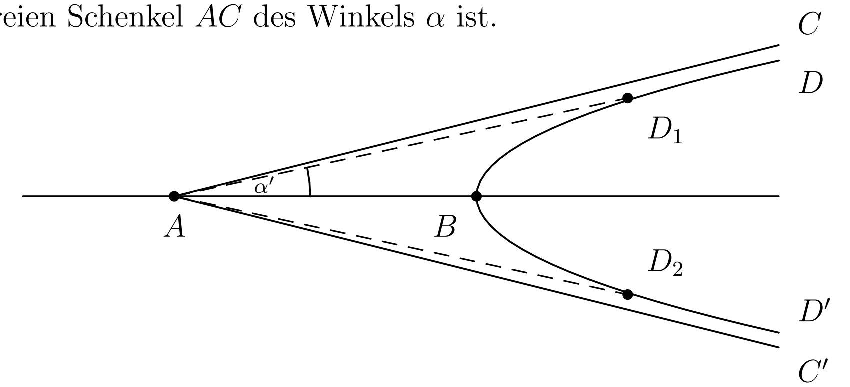
Satz: *Gegeben seien zwei Geraden AB und AC, die sich bei A unter einem spitzen Winkel α treffen. Dann gibt es auf $\overrightarrow{AB}$ eine Senkrechte zu AB, die zu AC asymptotisch parallel ist.*



Der Beweis benützt den Defekt und das Dedekind-Axiom.

Folgerung: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Dreieck, dessen Winkelsumme $< \varepsilon$ ist.*

Beweis: An die Gerade AB werde bei A ein spitzer Winkel $\alpha < \varepsilon/4$ angetragen. O.B.d.A. sei B der Punkt, bei dem die Senkrechte BD zu AB asymptotisch parallel zu dem freien Schenkel AC des Winkels α ist.



Durch Spiegeln an AB kann man die Gerade DB über B hinaus verlängern, sie ist dort asymptotisch parallel zum Spiegelbild AC' der Geraden AC.

Trägt man die Strecke $\overline{AB}$ auf beiden Seiten von B auf BD ab, so erhält man Punkte D_1 und D_2. Das Dreieck ABD_1 ist gleichschenklig mit Basiswinkeln $\alpha' := \angle BAD_1 = \angle BD_1A$. Offensichtlich ist $\alpha' < \alpha$. Auf der anderen Seite von AB erhält man das kongruente Dreieck AD_2B. Nun ist AD_2D_1 ein Dreieck mit Winkelsumme $= 4\alpha' < 4\alpha < \varepsilon$. ∎

Folgerung: *Der Defekt eines Dreiecks kann dem Wert π beliebig nahe kommen.*

Man kann allerdings zeigen, dass große Defekte nur bei Dreiecken auftreten, bei denen alle drei Seiten „sehr groß" sind. Um die Gültigkeit der Hypothese vom spitzen Winkel experimentell nachzuweisen, müsste man also sehr große Dreiecke vermessen.

Umgekehrt kann man auch zeigen, dass es Dreiecke mit zwei beliebig groß wählbaren Seiten, aber beliebig kleinem Defekt gibt. Ein genaueres Studium des Defektes $\delta(ABC)$ in Abhängigkeit vom Winkel $\angle ACB$ zeigt schließlich:

Satz: *Unter der Hypothese des spitzen Winkels gilt:*

Ist μ eine Flächenfunktion, so gibt es eine Konstante k, so dass für alle Dreiecke ABC gilt:

$$\mu(ABC) = k^2 \cdot \delta(ABC).$$

Die Flächenfunktion ist also nur bis auf die Konstante k festgelegt.

Lambert machte außerdem folgende Beobachtung: Da die Kongruenzklasse eines Dreiecks nur von den drei Winkeln abhängt (WWW-Kongruenz), gibt es – im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie – unter der Hypothese des spitzen Winkels eine **absolute Längeneinheit**. Konstruiert man etwa ein gleichseitiges Dreieck, dessen Winkel alle 45° betragen, so ist die Seitenlänge dieses Dreiecks festgelegt.

Lambert lieferte zu guter Letzt doch noch einen Beweis für das Parallelenaxiom, indem er unter der Hypothese des spitzen Winkels eine absurde Situation herbeiführte. Er hatte aber wohl selbst Zweifel und seine Arbeit nicht veröffentlicht.

Der Schauplatz wechselte nun nach Frankreich, denn es kam die Epoche der großen französischen Mathematiker.

Jean-Baptist le Rond d'Alembert (1717 – 1783) glaubte, man könnte die Schwierigkeiten überwinden, wenn man nur die richtigen Definitionen einsetzen würde, aber er schaffte das Problem nicht aus der Welt.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) dachte, er hätte Erfolg gehabt. Aber als er seine Arbeit über Parallelen vor der Französischen Akademie vortrug, unterbrach er sich plötzlich mit dem Ausruf: „Ich muss noch einmal darüber nachdenken!“ Er kam nie wieder auf das Thema zurück.

Auch **Pierre Simon Laplace** (1749 – 1827) blieb erfolglos.

Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) beschäftigte sich ausführlich mit den Grundlagen der Geometrie. Er versuchte mehrfach, dass Parallelenaxiom zu beweisen, seine Nachforschungen sind über die verschiedenen Ausgaben seiner „Eléments de Géométrie“ (1794 - 1823) verstreut. Seine eleganten Lehrbücher der Geometrie machten das Parallelenproblem wieder einer breiteren Öffentlichkeit bewusst. Viele seiner Resultate finden sich allerdings schon bei Saccheri.

Dass die Mathematiker bis ins 19. Jahrhundert immer noch an die Beweisbarkeit des Parallelenaxioms glaubten, hing auch mit dem Philosophen **Immanuel Kant** (1724 – 1804) zusammen. Kant glaubte, dass es gewisse besonders vollkommene Aussagen gibt, deren Inhalte absolute Wahrheiten ausdrücken. Er vertrat die Auffassung, dass Euklids Postulate beschreiben, wie unser Gehirn die Eindte das Euklidische Parallelenaxiom wahr sein, es konnte keine andere Geometrie geben.

Die Autorität Kants hatte einen immensen Einfluss auf die zeitgenössischen Wissenschaftler.