3 Nichteuklidische Geometrie

3.1 Beweisversuche

Schon früh störte Euklids Postulat V die ihm nachfolgenden Mathematiker, vor allem aus ästhetischen Gründen. Man kam zu der Auffassung, das Postulat müsste beweisbar sein, nicht zuletzt auch deswegen, weil Euklid in seinem ersten Buch so lange zögerte, es anzuwenden, und weil er manche Sätze recht mühsam bewies, obwohl das mit dem Parallelenaxiom sehr viel einfacher ging.

Posidonius, Philosoph, Astronom, Historiker und Mathematiker (ca. 135 - 50 v.Chr.), war einer der ersten, von denen Beweisversuche bekannt sind. Er schlug vor, Definition 23 wie folgt zu ändern:

> **Parallel** sind gerade Linien, die in der selben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten beliebig verlängert, immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten.

Die Schwierigkeiten werden hier natürlich in die Definition verlagert. Zur besseren Unterscheidung nennen wir Geraden, die immer den gleichen Abstand zwischen sich behalten, ***äquidistant***, und das Wort ***parallel*** benutzen wir weiterhin für Geraden, die sich nicht treffen.

Was sind äquidistante Geraden genau? Gemeint war wohl, dass zwei Geraden genau dann äquidistant genannt werden sollen, wenn alle Lote, die man von einem Punkt auf einer der beiden Geraden auf die andere Gerade fällt, zueinander kongruent sind. Offensichtlich sind dann äquidistante Geraden auch parallel.

Der Plan des Posidonius sah nun folgendermaßen aus:

In einem Satz (P_1) zeigte er – völlig korrekt: *Durch einen gegebenen Punkt P, der nicht auf einer gegebenen Geraden g liegt, kann höchstens eine zu g äquidistante Gerade g' gehen.*

Dieser Satz könnte irgendwo vor Euklids Proposition 29 stehen!

In einem Satz (P_2) zeigte Posidonius dann die Gültigkeit von Euklids Postulat V. Allerdings wechselte er dabei nach Belieben zwischen den Begriffen „äquidistant“ und „parallel“ hin und her. Er führte damit einen neuen Parallelitätsbegriff ein, arbeitete aber mit den Eigenschaften des alten Begriffes. In Wirklichkeit hat er damit das Axiom (E.P) (Euklids Postulat V) durch ein anderes ersetzt:

(PP): Parallele Geraden sind äquidistant.

Da ist Euklids Axiom aber vorzuziehen, denn seine Voraussetzungen sind überprüfbar. Ob zwei gegebene Geraden äquidistant sind, ist dagegen schwer zu sagen.

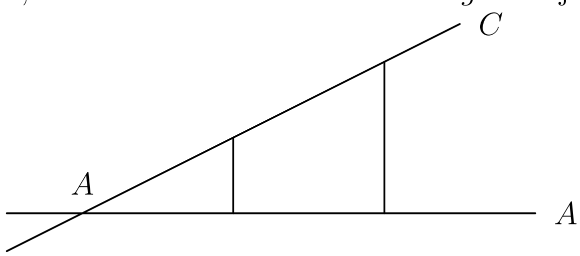
Der griechische Philosoph **Proklos Diadochos** (ca. 410 - 485 n.Chr.), Haupt der Schule des Neuplatonismus, hatte noch Zugang zu vielen Quellen, die für uns längst verloren sind, z.B. zur Großen Geschichte der Geometrie des Eudemus, eines Schülers des Aristoteles. In seinem Kommentar zum ersten Buch der Elemente gibt Proklos einen kurzen Überblick über das Werk des Eudemus, der selbst in seiner fragmentarischen Form für uns von unschätzbarem Wert ist.

In diesem Kommentar finden sich auch Hinweise auf frühere Versuche, das Parallelenaxiom zu beweisen, insbesondere wird ein Versuch des berühmten ägyptischen Naturwissenschaftlers **Claudius Ptolemäus** (ca. 85 - 165 n.Chr.) beschrieben, der übrigens auch die Grundlagen der Trigonometrie geschaffen hat.

Der „Beweis“ des Ptolemäus war unsinnig, wie Proklos feststellte. Dieser gab nun selbst einen „Beweis“ an:

Satz (Pr_1)**:** *Wenn sich zwei verschiedene Geraden in einem Punkt schneiden, dann wird der Abstand zwischen ihnen beliebig groß.*

Es bleibt unklar, was mit „Abstand“ gemeint ist. Hier ist das aber noch leicht zu reparieren. Trifft die Gerade $g = AB$ auf die Gerade $h = AC$, so dass $\angle BAC$ ein spitzer Winkel ist, so wachsen die Lote von h auf g über jede Grenze.



Der Satz ist richtig und kann ohne Parallelenaxiom bewiesen werden. Allerdings führt Proklos den Beweis nicht aus. Wir werden ihn an späterer Stelle unter Verwendung des Archimedes-Axioms nachtragen können.

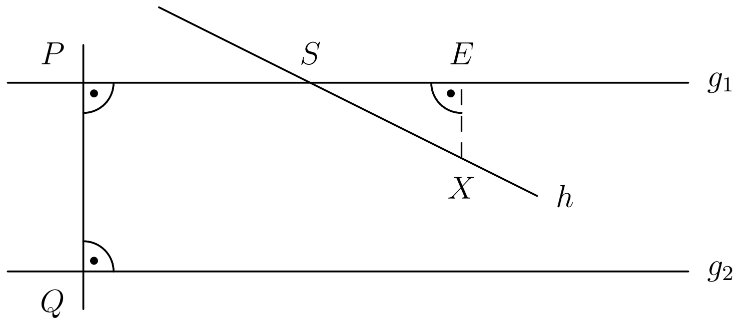
Satz (Pr_2)**:** *Der Abstand zwischen zwei Parallelen g_1, g_2, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, kann nicht über alle Grenzen wachsen.*

Auch dieser Satz wird von Proklos nicht bewiesen, und die Formulierung ist noch unklarer. Wir wollen ihn wie folgt verstehen: Es gibt eine Strecke $\overline{KL}$, so dass jedes Lot von einem Punkt von g_1 auf g_2 und jedes Lot von einem Punkt von g_2 auf g_1 größer als $\overline{KL}$ ist. Die Frage, ob der Satz beweisbar ist, stellen wir erst mal zurück.

Satz (Pr_3)**:** *Wenn eine Gerade eine von zwei Parallelen schneidet, die eine gemeinsame Senkrechte besitzen, so muss sie auch die andere schneiden.*

Beweis: Seien g_1 und g_2 die beiden Geraden, $\overline{PQ}$ (mit $P \in g_1$ und $Q \in g_2$) die gemeinsame Senkrechte. Schließlich sei h eine Gerade, die g_1 in einem Punkt S schneidet. Das Lot von einem Punkt $X \in h$ habe den Fußpunkt E auf g_1.

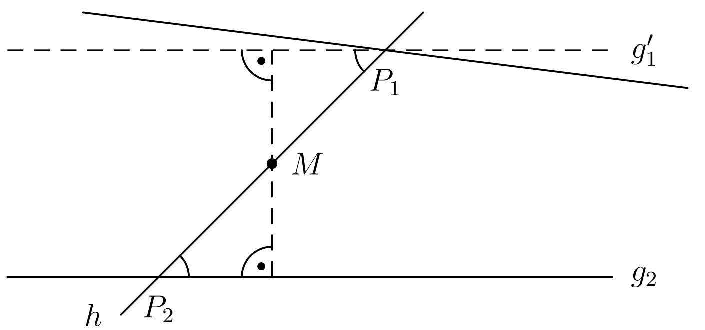
Proklos sagte nun: Nach Satz (Pr_1) wird die Länge des Lotes $\overline{XE}$ beliebig groß. Nach Satz (Pr_2) kann der Abstand von g_2 zu g_1 nicht über alle Grenzen wachsen. Das ist nur möglich, wenn h irgendwann Punkte auf der anderen Seite von g_2 erreicht, also insbesondere g_2 schneidet.



Das ist ein wenig knapp, aber man kann tatsächlich einen sauberen Beweis dafür finden. ∎

Satz (Pr_4)**:** *Aus Satz (Pr_3) folgt Postulat V.*

Beweis: Wir betrachten die Standard-Situation: Zwei Geraden g_1, g_2 werden von h in P_1 bzw. P_2 geschnitten und bilden Ergänzungswinkel $\alpha + \beta < 2R$.

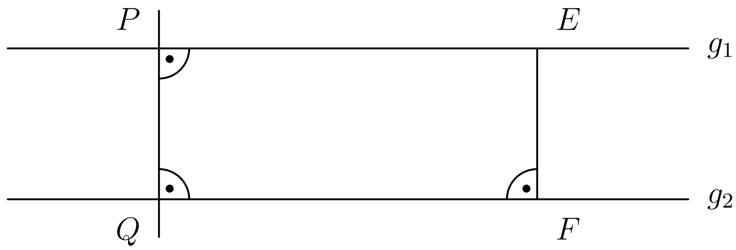


Sei α der Winkel bei P_2. Wir tragen ihn bei P_1 an $\overline{P_1P_2}$ an und erhalten so eine neue Gerade g_1', die parallel zu g_2 ist und von g_1 geschnitten wird.

Vom Mittelpunkt M der Strecke $\overline{P_1P_2}$ fällen wir jeweils das Lot auf g_1' und g_2. Es entstehen zwei kongruente Dreiecke (WWS), und daraus kann man folgern, dass die Lote auf einer Geraden liegen. Also besitzen die Parallelen eine gemeinsame Senkrechte, und g_1 muss auch g_2 schneiden. ∎

Dieser „Beweis“ des Parallelenaxioms ist schon recht trickreich, aber sein Schwachpunkt ist natürlich der Satz (Pr_2). Nennen wir die Aussage von (Pr_2) das „Proklos-Axiom“ (**P-Pr**). Dann liefern (Pr_3) und (Pr_4) die Folgerung „(**P-Pr**) $\Longrightarrow$ (**E-P**)“. Aber es gilt auch die Umkehrung:

Beweis dazu: Es gelte das Parallelenaxiom, und es seien zwei Parallelen g_1, g_2 mit gemeinsamer Senkrechte PQ gegeben. Außerdem sei $E \neq P$ ein Punkt auf g_1 und F der Fußpunkt des Lotes von E auf g_2.



Aus dem Parallelenaxiom folgt der Satz über die Winkelsumme, also ist auch $\angle PEF$ ein Rechter. Nun folgt, dass im Viereck $QFEP$ gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind. Insbesondere ist $\overline{EF} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$. Weil E beliebig gewählt werden kann, ist damit (**P-Pr**) bewiesen. In Wirklichkeit ist also (Pr_2) äquivalent zum Parallelenaxiom.

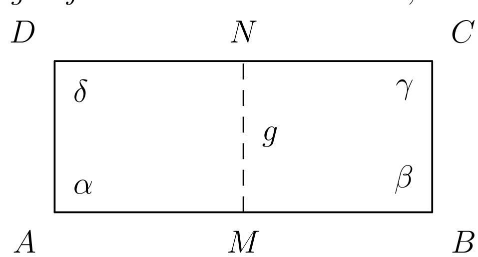
Im Jahre 622 floh Mohammed von Mekka nach Medina und begründete den Islam. Bereits 641 eroberten die Araber Alexandria. Zwischen 750 und 850 n.Chr. beginnt die Geschichte der Mathematik bei den Arabern. Bagdad und Damaskus wurden zu Zentren der Wissenschaft, Wörter wie „Algebra“ oder „Algorithmus“ fanden ihren Weg in die Mathematik.

Viele arabische Wissenschaftler beschäftigten sich mit dem Parallelenproblem. Wir wollen hier nur über die zwei bedeutendsten sprechen:

Omar al-Hayyam (auch Khayyam oder Chajjam geschrieben, ca. 1050 – 1130) war ein persischer Mathematiker, Astronom, Philosoph und Dichter. Noch mehr als durch seine wissenschaftlichen Untersuchungen wurde er durch seine Lyrik bekannt. Bei Untersuchungen des Parallelenproblems ging er sorgfältiger als seine Vorgänger vor.

Omar Khayyams Theorem: *Betrachtet wird ein Viereck $ABCD$ mit folgenden Eigenschaften:*

Bei A und B liegen jeweils rechte Winkel vor, und es ist $\overline{AD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$.



*Die Strecke $\overline{AB}$ wird **Basis** genannt, die Strecke $\overline{DC}$ **Gipfellinie**. Die Winkel γ und δ heißen **Gipfelwinkel**. Nun gilt:*

1. *Die Gipfelwinkel sind kongruent.*
2. *Errichtet man im Mittelpunkt M der Basis eine Senkrechte, so trifft diese die Gipfellinie in ihrem Mittelpunkt N und bildet mit ihr einen rechten Winkel.*

Beweis:

1) haben wir schon in Abschnitt 2.6 gezeigt (Satz über Äquidistanz).

2) Sei g die Senkrechte zu AB in M. Nach Proposition 28 (Satz über Winkel an Parallelen) ist g sowohl zu AD als auch zu BC parallel. Da A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen, muss das auch für D und C gelten. Also trifft g die Gipfellinie $\overline{DC}$ in einem inneren Punkt N.

Da $AMD \mathrel{\widehat{=}} MBC$ ist (SWS), ist $\overline{DM} \mathrel{\widehat{=}} \overline{MC}$ und $\angle ADM \mathrel{\widehat{=}} \angle MCB$. Weil aber die Gipfelwinkel kongruent sind, muss auch $\angle MDN \mathrel{\widehat{=}} \angle MCN$ sein. Und schließlich ist

$$\angle DMN = R - \angle AMD \mathrel{\widehat{=}} R - \angle BMC = \angle CMN.$$

Also ist $DMN \mathrel{\widehat{=}} MCN$ und insbesondere $\overline{DN} \mathrel{\widehat{=}} \overline{NC}$. Und da $\angle DNM \mathrel{\widehat{=}} \angle CNM$ ist, trifft g senkrecht auf die Gipfellinie. ∎

In der Euklidischen Geometrie würde nun sehr schnell (etwa mit den Sätzen über Winkelsummen) folgen, dass die Gipfelwinkel ebenfalls rechte Winkel sind. Ohne Parallelenaxiom kann man nicht ausschließen, dass die Gipfelwinkel spitz oder stumpf sind. Wenn wir solchen „verallgemeinerten Rechtecken“ einen Namen geben wollen, sollten wir sie eigentlich *Khayyam-Vierecke* nennen. Aus Gründen, die später klar werden, heißen sie jedoch ***Saccheri-Vierecke***.

Khayyam zeigt:

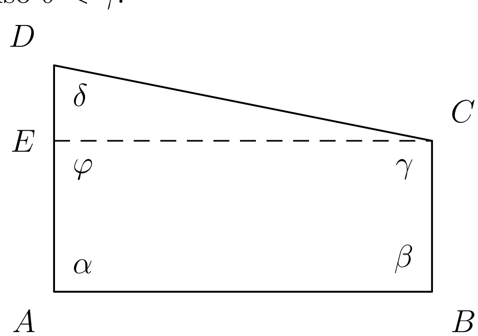
Satz: *Im Viereck ABCD mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sei $\alpha = \beta = R$. Dann gilt:*

1. $\overline{AD} > \overline{BC} \iff \delta < \gamma$.
2. $\overline{AD} = \overline{BC} \iff \delta = \gamma$.
3. $\overline{AD} < \overline{BC} \iff \delta > \gamma$.

Beweis: Nach Khayyams Theorem gilt: $\overline{AD} = \overline{BC} \implies \delta = \gamma$.

Sei nun $\overline{AD} > \overline{BC}$. Dann kann man einen Punkt E mit $A - E - D$ und $\overline{AE} = \overline{BC}$ finden. Es ist $\varphi := \angle AEC = \angle BCE < \angle BCD = \gamma$, und da φ Außenwinkel zum Dreieck ECD ist, ist $\varphi > \delta$.

Insgesamt ist also $\delta < \gamma$.

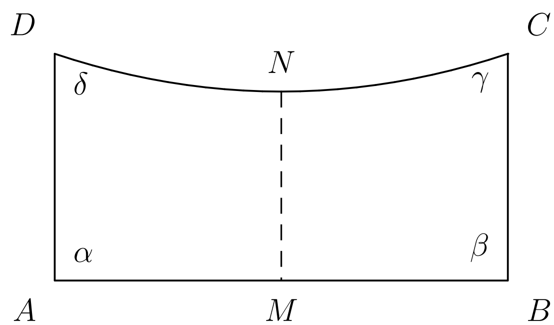


Der Fall $\overline{AD} < \overline{BC}$ kann analog behandelt werden. ■

Satz von den drei Hypothesen: *Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck mit den Winkeln α, β und $\gamma = \delta$. Dann gilt:*

1. *Ist $\delta < R$, so ist $\overline{DC} > \overline{AB}$.*
2. *Ist $\delta = R$, so ist $\overline{DC} = \overline{AB}$.*
3. *Ist $\delta > R$, so ist $\overline{DC} < \overline{AB}$.*

Beweis: Wir stellen die Situation von Khayyams Theorem her:



Da die Winkel bei M und N Rechte sind, ist $MNDA$ ein Viereck, das die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt. Da auch α ein rechter Winkel ist, folgt aus diesem Satz:

Ist $\delta < R$, so ist $\overline{DN} > \overline{AM}$, usw.

Da $\delta = \gamma$ ist, führt die Betrachtung des rechten Teil-Vierecks zu den gleichen Ergebnissen, und man erhält die Behauptung. ■

Soweit ist alles gut, aber nun schließt Khayyam mit Hilfe eines sogenannten „philosophischen Prinzips“ weiter, das angeblich auf Aristoteles zurückgeht. Khayyam sagt, dass zwei Geraden mit einer gemeinsamen Senkrechten äquidistant sind. Diese Hypothese ist aber sogar noch stärker als der Satz (Pr_2) von Proklos und hat das Parallelenpostulat zur Folge.

Wenn die Geraden AD und BC äquidistant sind, so bedeutet das, dass die beiden Hypothesen $\delta < R$ und $\delta > R$ auszuschließen sind. Jedes Saccheri-Viereck ist schon ein Rechteck.

Nach diesem nebulösen Schlenkerer arbeitet Khayyam wieder korrekt weiter, und mit ähnlichen Schlüssen, wie wir sie schon bei Proklos gesehen haben, folgert er schließlich:

> *Wenn die Gipfelwinkel in jedem Saccheri-Viereck Rechte sind, dann folgt das Postulat V.*

Damit hat Khayyam eine weitere zu Postulat V äquivalente Bedingung gefunden (denn die Umkehrung gilt natürlich auch). Sein Fehler liegt im mystischen Beweis der Hypothese von den rechten Gipfelwinkeln.

Nasir ad-Din at-Tusi (auch Nasir al-Din al-Tusi oder Nasir Eddin geschrieben), 1201 – 1274, war zunächst Astrologe im Iran, kam dann aber als Hofastronom des Bruders des Mongolenherrschers Kublai Khan in die Gegend von Bagdad. Bekannt wurde er durch seine Forschungen auf dem Gebiet der Trigonometrie. Beim Parallelenproblem knüpfte er an die Ergebnisse von Khayyam an. Da seine Arbeiten später ins Lateinische übersetzt wurden, wurden so die arabischen Forschungen im Abendland bekannt.

Er kommt auf anderem, aber genauso suspektem Wege zu der Aussage: Die Gipfelwinkel in einem Saccheri-Viereck sind immer rechte Winkel. Daraus folgert er schließlich richtig weiter, dass die Winkelsumme in *jedem* Dreieck 180° beträgt.

Nasir ad-Dins letzter Schritt besteht aus dem folgenden (korrekten und korrekt bewiesenem) Satz:

Satz (von Nasir ad-Din):

Wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei Rechten ist, dann gilt Euklids fünftes Postulat.

(Der Beweis muss hier aus Zeitgründen entfallen, findet sich aber im Anhang dieses Abschnittes).

Damit hat Nasir ad-Din gezeigt:

Folgerung: *Postulat V gilt genau dann, wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck* 180° *beträgt.*

Nachdem 1482 die erste gedruckte Version der „Elemente“ in Europa erschienen war, tauchten auch dort einige Beweisversuche auf, die aber nichts Neues brachten.

In England machte 1621 **Sir Henry Savile** in Vorlesungen über Euklid auf zwei angebliche Makel in den „Elementen“ aufmerksam: Die Theorie der Parallellinien und die Lehre von den Proportionen.

Er stiftete daraufhin einen mathematischen Lehrstuhl an der Universität Oxford mit der Auflage, dass der jeweilige Inhaber Vorlesungen über Euklid zu halten habe.

Einer der ersten „Professores Saviliani“ war **John Wallis** (1616 – 1703). Er kannte und kritisierte die Probleme seiner Vorgänger mit den äquidistanten Linien und versuchte es auf anderem Wege:

Zwei Dreiecke werden ***ähnlich*** genannt, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen. Wallis stellte nun folgendes Postulat auf:

(WP) Zu jedem Dreieck ABC kann man (bei vorgegebener Seite $\overline{A'B'}$ ein ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruieren.

Ob dieses Postulat einsichtiger als Euklids Parallelenpostulat ist, sei erst einmal dahingestellt. Wallis zeigt nun (1663):

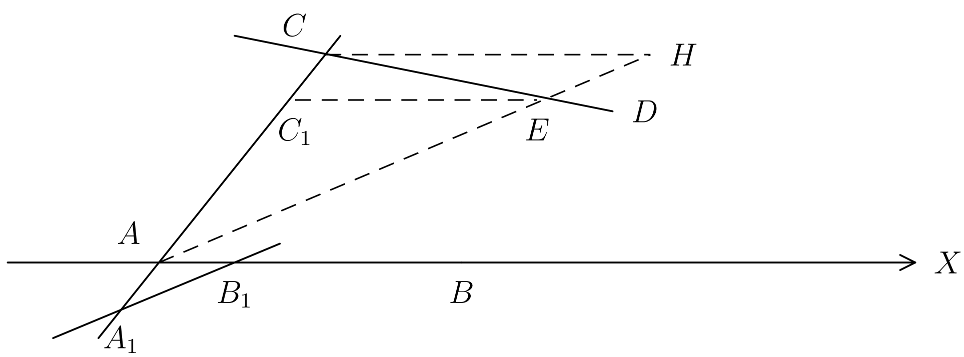
Satz:

$$\text{(WP)} \quad \Longrightarrow \quad \text{(E – P)}$$

Beweis: AC werde von den Geraden AB und CD getroffen und bilde mit ihnen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner als 180° sind.

Wir wählen A_1 mit $C - A - A_1$ und B_1 mit $A - B_1 - B$ willkürlich und konstruieren das zu A_1B_1A ähnliche Dreieck AHC. Dann ist CH parallel zu AB.

$\overrightarrow{CD}$ tritt ins Innere des Winkels $\angle ACH$ ein, muss also die gegenüberliegende Seite $\overline{AH}$ des Dreiecks AHC treffen, etwa in E. Nun konstruiert man das zu A_1B_1A ähnliche Dreieck AEC_1. Offensichtlich muss C_1 auf AC liegen, und C_1E ist parallel zu AB.



Schließlich konstruiere man das zu C_1EC ähnliche Dreieck AXC. Da $AX = AB$ und $CX = CD$ sein muss, ist X der gesuchte Schnittpunkt von AB und CD. ∎

Der Beweis ist korrekt, hinterlässt aber Unbehagen, weil die postulierte Konstruierbarkeit von ähnlichen Dreiecken ein sehr starkes Werkzeug ist. In Wirklichkeit folgt fast trivial, dass das Postulat von Wallis äquivalent zum Parallelenaxiom ist.

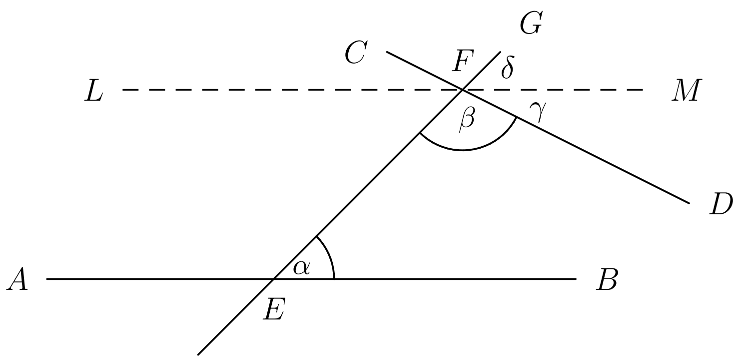
John Playfair (1748 – 1819), Professor für Mathematik und Physik an der Universität Edinburgh, schrieb 1796 ein Buch mit dem Titel „Elements of Geometry". Darin formulierte er das Parallelenaxiom in der heute üblichen Form:

(PA) Ist g eine Gerade und $P \notin g$, so geht durch P genau eine Parallele zu g.

Satz: (PA) $\Longleftrightarrow$ (E – P)

Beweis: a) Sei zunächst (PA) vorausgesetzt.

Die Gerade EF werde von AB in E und von CD in F geschnitten. G liege auf der Verlängerung von EF über F hinaus.



Wir konstruieren die Gerade LM durch F so, dass $\delta := \angle MFG = \angle BEF =: \alpha$ ist. Dann ist LM parallel zu AB.

Setzt man $\beta := \angle EFD$ und $\gamma := \angle DFM$, so ist

$$\beta + \gamma + \delta = 180^\circ, \text{ also } \gamma = 180^\circ - (\beta + \alpha) > 0.$$

Also ist $LM \neq CD$, und nach (PA) kann CD nicht parallel zu AB sein. AB und CD müssen sich schneiden.

b) Umgekehrt sei nun (E.P) vorausgesetzt. Die Existenz einer Parallelen g' zu g durch $P \notin g$ haben wir schon an früherer Stelle bewiesen:

Man fälle das Lot h von P auf g und wähle für g' die Senkrechte zu dem Lot in P.

Ist g'' eine weitere Gerade durch P, also $g'' \neq g'$, so müssen g'' und g auf einer Seite von h zusammen innere Winkel $< 180^\circ$ bilden. Nach (E.P) schneiden sich g'' und g, d.h., g'' ist keine Parallele. ∎

Wir haben jetzt folgende **äquivalente Formulierungen des Parallelenaxioms**:

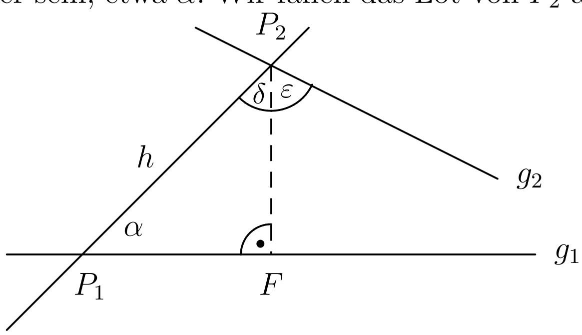
1. Euklids Postulat V.
2. Playfairs Postulat.
3. Die Winkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180°.
4. Jedes Saccheri-Viereck ist ein Rechteck.
5. Werden zwei Geraden g_1, g_2 von einer dritten geschnitten, so sind sie genau dann parallel, wenn die Winkelbeziehungen (E), (F) und (Z) gelten.
6. Parallele Geraden sind äquidistant.
7. Zu jedem Dreieck gibt es ähnliche Dreiecke beliebiger Größe.
8. Sind g_1, g_2 parallel, so bleibt die Länge der Lote von der einen Geraden auf die andere stets beschränkt.

Anhang

Satz von Nasir ad-Din:

Wenn die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich zwei Rechten ist, dann gilt Euklids fünftes Postulat.

Beweis: Die Gerade h werde von den beiden Geraden g_1 und g_2 in zwei verschiedenen Punkten P_1 und P_2 getroffen und bilde dabei die Ergänzungswinkel α (bei P_1) und β (bei P_2). Es sei $\alpha + \beta < 180°$. Dann muss wenigstens einer der beiden Winkel ein spitzer sein, etwa α. Wir fällen das Lot von P_2 auf g_1, mit Fußpunkt F.



Da in dem Dreieck P_1FP_2 nicht zwei Winkel $\geq 90°$ vorkommen können, muss F auf der gleichen Seite von h liegen wie die Winkel α und β.

Sei $\delta := \angle P_1P_2F$. Offensichtlich ist $\delta < 90°$. Ist sogar $\beta < \delta$, so tritt die Gerade g_2 ins Innere des Dreiecks P_1FP_2 ein, muss also $P_1F = g_1$ treffen.

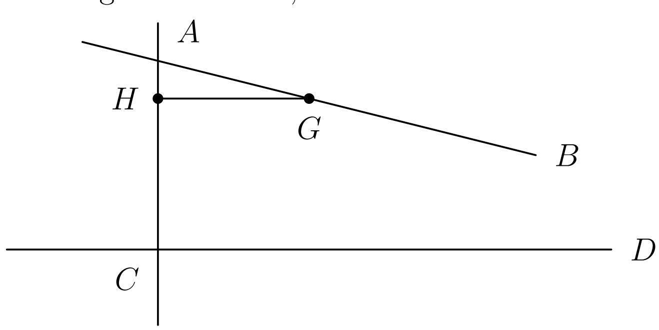
Sei nun $\beta \geq \delta$. Ist $\beta = \delta$, so ist $g_2 = FP_2$, und g_1 und g_2 schneiden sich auch in diesem Fall.

Wir können also annehmen, dass $\beta > \delta$ ist. Weil nach der Voraussetzung über die Winkelsumme $\delta = 90° - \alpha$ ist, ist

$$\varepsilon := \beta - \delta = \beta - (90° - \alpha) = (\alpha + \beta) - 90° < 180° - 90° = 90°.$$

Damit ist gezeigt, dass g_1 und g_2 mit P_2F auf einer geeigneten Seite einen rechten und einen spitzen Winkel als Ergänzungswinkel bilden. Wir brauchen uns nur noch mit diesem Spezialfall zu befassen:

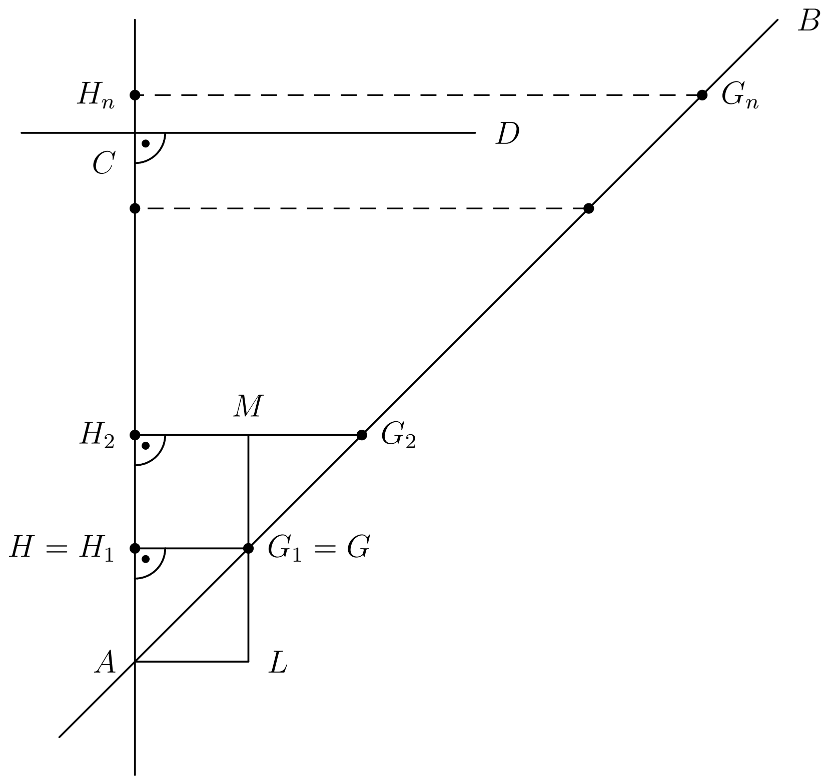
Die Gerade AC werde von AB unter einem spitzen und von CD unter einem rechten Winkel getroffen. Gezeigt werden soll, dass sich CD und AB schneiden.



Wir wählen einen Punkt G mit $A - G - B$ und fällen das Lot von G auf AC mit Fußpunkt H. Dann ist klar, dass H auf der gleichen Seite von A liegt wie der Punkt C.

Ist $H = C$, so stimmt das Lot mit CD überein, und wir sind fertig. Gilt $A{-}C{-}H$, so muss CD nach Pasch außer $\overline{AH}$ noch eine weitere Seite des Dreiecks AGH treffen. Dies kann nicht $\overline{HG}$ sein (Parallelität), also trifft CD die Gerade $AG = AB$.

Es bleibt der Fall $A - H - C$ zu untersuchen.



Wir konstruieren Punkte $G_1 := G, G_2, G_3, \ldots$ auf AB mit $\overline{AG_1} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1G_2} \mathrel{\widehat{=}} \ldots$. Die Fußpunkte der Lote von G_i auf AC seien mit H_i bezeichnet.

Behauptung: Es ist $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HH_2}$.

Beweis dazu: Man errichte in A die Senkrechte AL zu AC mit $\overline{AL} \mathrel{\widehat{=}} \overline{HG_1}$. Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ist $\angle LAG_1 \mathrel{\widehat{=}} 90^\circ - \angle G_1AH \mathrel{\widehat{=}} \angle AG_1H$. Daher ist $AG_1H \mathrel{\widehat{=}} G_1AL$ (SWS), und damit $\angle ALG_1 \mathrel{\widehat{=}} \angle AHG_1 = 90^\circ$, sowie $\overline{AH} \mathrel{\widehat{=}} \overline{LG_1}$. Dann ist aber auch

$$\angle HG_1L = \angle HG_1A + \angle AG_1L = \angle LAG_1 + (90^\circ - \angle LAG_1) = 90^\circ.$$

Wählt man noch $M \in H_2G_2$ mit $\overline{H_2M} \mathrel{\widehat{=}} \overline{H_1G_1}$, so ist $H_2H_1G_1M$ ein Saccheri-Viereck, und es folgt, dass $\angle H_2MG_1 = \angle H_1G_1M$ ist. Wegen des Satzes von der Winkelsumme muss dann $\angle H_2MG_1 = \angle H_1G_1M = 90^\circ$ und daher $\overline{MG_1} = \overline{H_2H_1}$ sein.

Da sich $\angle HG_1L$ und $\angle HG_1M$ zu 180° ergänzen, sind M, G_1 und L kollinear. Aber dann sind $\angle AG_1L$ und $\angle MG_1G_2$ Scheitelwinkel, also kongruent. Und da $\angle G_1AL = \angle G_1G_2M$ ist (Winkelsumme im Dreieck), ist $ALG_1 \mathrel{\widehat{=}} G_1G_2M$ (WSW), und daher $\overline{LG_1} = \overline{G_1M}$. So folgt:

$$\overline{H_1H_2} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1M} \mathrel{\widehat{=}} \overline{G_1L} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AH}.$$

Genauso folgt allgemein für den Fußpunkt H_i des Lotes von G_i auf AC, dass $\overline{AH_i} \mathrel{\widehat{=}} n \cdot \overline{AH}$ ist. Nach Archimedes gibt es aber ein n, so dass $n \cdot \overline{AH} > \overline{AC}$ ist. Dann gilt $A - C - H_n$, und es folgt wieder, dass sich AB und CD treffen. ∎