2.6 Kreise und Parallelen

Wir haben Euklids Axiomensystem „repariert“, aber wenn wir nun in seinem Stile weitermachen wollen, dann brauchen wir immer noch ein Axiom über das Schneiden von Kreisen. Am Ende des vorigen Abschnittes haben wir im Stile Hilberts versucht, ohne Kreise auszukommen, aber manchmal geht das nicht.

Man muss bei Euklid schon etwas genauer hinsehen. Da gibt es nämlich

Proposition 22: *Aus drei gegebenen Strecken a, b, c mit*

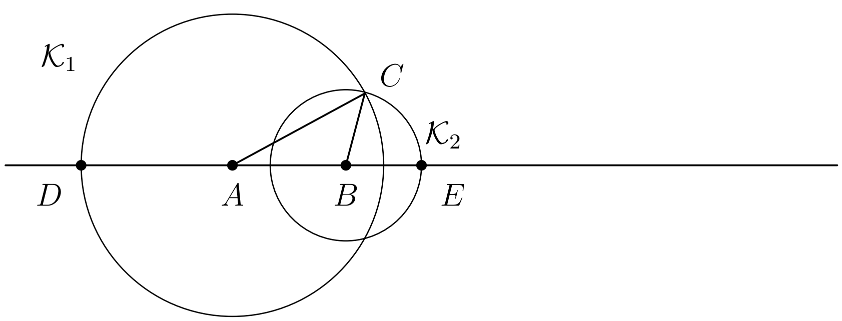
$$a + b > c, \quad a + c > b \quad \text{und} \quad b + c > a$$

kann ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruiert werden.

Die Beweisidee ist die folgende:

Man ordnet die Strecken in der Reihenfolge b, c, a auf einer Geraden an, so dass Punkte D, A, B, E entstehen.

Dann zeichnet man den Kreis $\mathcal{K}_1$ um A mit Radius $b = \overline{DA}$ und den Kreis $\mathcal{K}_2$ um B mit Radius $a = \overline{BE}$. Wählt man einen Schnittpunkt C der beiden Kreise aus, so ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.



Für Euklid ist der Satz kein Problem, die Methode der zwei Kreise hat er ja schon häufig angewandt. Bei Hilbert sucht man den Satz als Folgerung aus den Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenz-Axiomen vergeblich. Im Gegensatz zu Euklid liefert er nämlich keine Konstruktionsbeschreibungen, sondern Existenzsätze und Kongruenzaussagen.

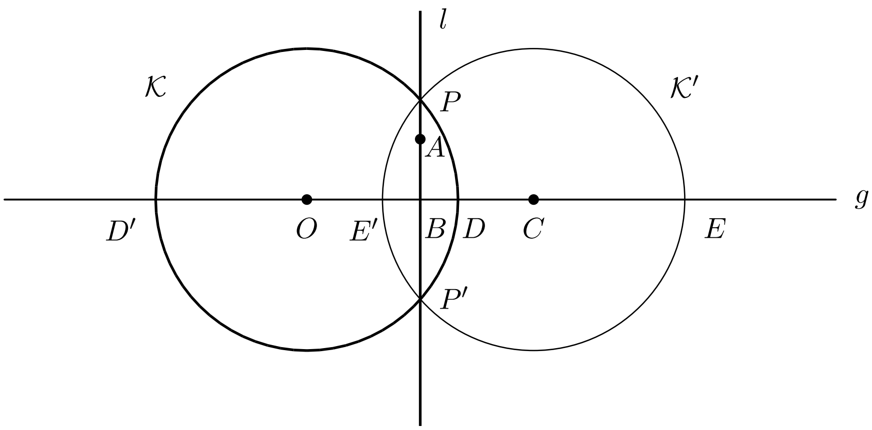
Das **Kreis-Axiom (S.1):** Sind $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ Kreise um die Punkte A bzw. B und enthält $\mathcal{K}_2$ sowohl einen Punkt aus dem Inneren als auch einen aus dem Äußeren von $\mathcal{K}_1$, so gibt es auf beiden Seiten von AB je einen Schnittpunkt der beiden Kreise.

Damit kann man einen Satz über das Schnittverhalten von Kreis und Gerade beweisen, den Euklid schon beim Beweis der Existenz eines Lotes brauchte:

Satz: *Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis um den Punkt O, A ein Punkt im Innern von $\mathcal{K}$ und l eine Gerade durch A. Dann schneidet l den Kreis in zwei Punkten (auf verschiedenen Seiten von A).*

Beweis: (wurde nicht in der Vorlesung ausgeführt)
Die Aussage ist trivial, wenn O auf l liegt. Also können wir o.B.d.A. annehmen, dass $O \notin l$ ist. Dann sei g das Lot von O auf l mit Fußpunkt B. Weiter sei C der Punkt auf g mit $O - B - C$ und $\overline{OB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$, so dass l die Mittelsenkrechte zu $\overline{OC}$ ist. Da das Dreieck OBA bei B rechtwinklig ist, ist $\overline{OB} < \overline{OA}$ und damit kleiner als der Radius von $\mathcal{K}$, also B im Innern des Kreises $\mathcal{K}$ gelegen.

Die Gerade g schneidet $\mathcal{K}$ in zwei Punkten D und D', es gelte $D' - O - D$ und $D \in \overrightarrow{OB}$. Wählen wir $E \in \overrightarrow{OB}$ mit $B - C - E$ und $\overline{CE} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OD}$, so liegt E auf dem Kreis $\mathcal{K}'$ um C mit Radius $\overline{OD}$. Wegen $O - C - E$ ist $\overline{OE} > \overline{CE} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OD}$, also E im Äußeren von $\mathcal{K}$ gelegen.



Der Kreis $\mathcal{K}'$ schneidet g in E und in einem Punkt E', mit $E' - C - E$. Wegen $\overline{BC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OB} < \overline{OD} = \overline{E'C}$ ist $E' - B - C$.

Es gibt zwei Möglichkeiten. Ist $O - E' - B$, so ist $\overline{E'O} < \overline{OB} < \overline{OD}$. Ist $E' - O - B$, so ist $\overline{E'O} < \overline{E'B} < \overline{E'C} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OD}$. In beiden Fällen folgt, dass E' im Innern von $\mathcal{K}$ liegt.

Aus dem Kreisaxiom folgt nun, dass sich $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ auf beiden Seiten von g je in einem Punkt treffen. Sei P der Schnittpunkt, der auf der gleichen Seite von g wie A liegt. Dann ist $\overline{OP} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CP}$. Außerdem ist $\overline{OB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$. Nach dem SSS-Kongruenzsatz ist dann $OBP \mathrel{\widehat{=}} BCP$, also $\angle OBP \mathrel{\widehat{=}} \angle CBP$. Da es sich um Nebenwinkel handelt, sind sie rechte Winkel, und das bedeutet, dass $BP = l$ ist, also $P \in l$.

Der Punkt P' mit $P - B - P'$ und $\overline{PB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BP'}$ ist offensichtlich der zweite Schnittpunkt der Kreise (denn aus Symmetriegründen sind auch die Strecken $\overline{OP'} \mathrel{\widehat{=}} \overline{CP'}$ jeweils Radien), und auch er liegt auf l. Somit ist $l \cap \mathcal{K} \supset \{P, P'\}$, mit $P - A - P'$.

Einen weiteren Schnittpunkt S kann es nicht geben, denn dann würde man ein gleichschenkliges Dreieck OPS mit ungleichen Basiswinkeln erhalten. ∎

Man kann nun beweisen, dass das Kreis-Axiom im pythagoräischen Modell $\mathcal{M}_4$ nicht erfüllt ist! Weil in $\mathscr{E}_p = \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ alle Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt sind, liegt mit $\mathcal{M}_4$ ein fast perfektes Modell für die Euklidische Ebene vor. Aber für die Existenz beliebiger Schnittpunkte von Kreisen besitzt der Körper $\mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ zu wenig Elemente.

Dazu betrachten wir allgemeine Wurzel-Ausdrücke der Form

$$q = q_n(\sqrt{q_{n-1}(\sqrt{\ldots\sqrt{q_1(\sqrt{\alpha})\ldots}})}),$$

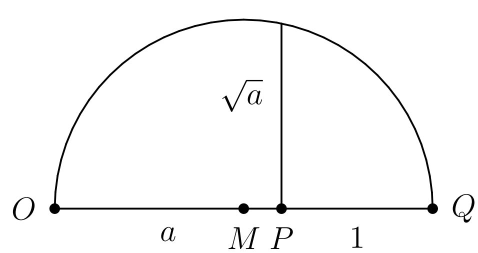
mit rationalen Funktionen $q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n$ und einer Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$. Tauscht man eine oder mehrere der Wurzeln gegen ihr Negatives, so erhält man einen sogenannten *konjugierten* Ausdruck zu q.

Ist das Argument jeder Wurzel von der Form $1+\omega^2$ (wobei ω wieder ein zusammengesetzter Ausdruck sein kann), so sind der ursprüngliche Ausdruck und alle dazu konjugierten Ausdrücke reelle Zahlen. Sind die Argumente der Wurzeln dagegen von beliebiger Form, so können auch nicht-reelle komplexe Zahlen entstehen.

Ein Beispiel ist etwa der reelle Ausdruck $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. Der dazu konjugierte Ausdruck $-\sqrt{2(-\sqrt{2}-1)} = -\mathrm{i}\cdot\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$ ist tatsächlich rein imaginär. Das bedeutet, dass $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ nicht pythagoräisch sein kann!

Ist a irgendeine pythagoräische Zahl, so liegen die Punkte $O := (0,0)$, $P := (a,0)$ und $Q := (a+1,0)$ in der pythagoräischen Ebene $\mathscr{E}_p$. Da die Bewegungen in diesem Modell zugleich isometrische Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ auf sich sind, kann man sagen: Zwei Strecken sind genau dann kongruent, wenn sie die gleiche euklidische Länge haben. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OQ}$ ist also der Punkt $M := (\frac{a+1}{2}, 0)$, und der Kreis um M mit Radius $\overline{OM}$ ist die Menge

$$\mathcal{K} := \{(x,y) \in \mathscr{E}_p \mid (x - \frac{a+1}{2})^2 + y^2 = (\frac{a+1}{2})^2\}.$$



Schneidet man $\mathcal{K}$ mit der Geraden $g := \{(x,y) \in \mathscr{E}_p \mid x = a\}$, so erhält man Punkte (x,y) mit $x = a$ und $y^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = a$, also $X_\pm := (a, \pm\sqrt{a})$. Nach dem Kreisaxiom wäre jeder solche Punkt konstruierbar, aber im Falle $a = 2(\sqrt{2}-1)$ haben wir schon gesehen, dass $\sqrt{a}$ nicht pythagoräisch ist.

Es liegt nahe, wie man den Mangel beheben kann:

Definition

Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt ***euklidisch***, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit $\alpha_i \in K_{i-1}$ und $\alpha_i > 0$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine euklidische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\sqrt{}$ anwendet.

Mit $\mathrm{Eu}(\mathbb{Q})$ sei hier die Menge aller euklidischen Zahlen bezeichnet.

Ein angeordneter Körper, in dem mit jedem positiven Element auch dessen Quadratwurzel enthalten ist, heißt ***euklidisch***. $\mathrm{Eu}(\mathbb{Q})$ ist der kleinste euklidische Körper, der in $\mathbb{R}$ enthalten ist.

Ein Modell $\mathcal{M}_5$ gewinnen wir, indem wir als Ebene die kartesische Ebene der euklidischen Zahlen benutzen: $\mathscr{E}_e := \mathrm{Eu}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Eu}(\mathbb{Q})$. Es ist klar, dass auch hier die Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome gelten. Und da mit jeder positiven euklidischen Zahl auch deren Wurzel wieder euklidisch ist, sind die Schnittpunkte von Kreisen immer konstruierbar, d.h., es gilt das Kreisaxiom.

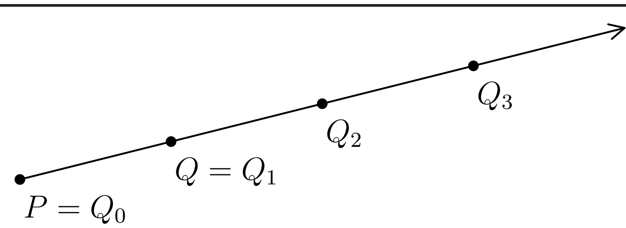
Die euklidische Ebene ist das Modell für die Geometrie, in der alle Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden. Und das ist die Geometrie, die Euklid betrieben hat. In dieser Ebene gibt es noch viele Lücken, insbesondere ist die Zahl π keine euklidische Zahl. Deshalb konnte den Alten auch die Quadratur des Kreises nicht gelingen.

Es sieht eigentlich so aus, als wäre man damit am Ende, nur das Parallelen-Axiom steht noch aus. Um so überraschender ist, dass noch ein weiteres Axiom fehlt.

Satz: *Zu zwei Punkten $P \neq Q$ und einer natürlichen Zahl n kann man stets Punkte $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n \in \overrightarrow{PQ}$ finden, so dass gilt:*

1. $Q_0 = P$, $Q_1 = Q$ *und* $\overline{Q_iQ_{i+1}} \mathrel{\widehat{=}} \overline{PQ}$ *für* $i = 1, \ldots, n-1$.
2. $Q_{i-1} - Q_i - Q_{i+1}$ *für* $1 \leq i \leq n-1$.

Der Beweis ist trivial.



In der Situation des obigen Satzes sagt man: Der Punkt Q_n wird durch n-maliges Antragen der Strecke $\overline{PQ}$ erreicht. An Stelle der Strecke $\overline{Q_0Q_n}$ schreibt man auch $n \cdot \overline{PQ}$.

Ist zu der Strecke $\overline{PQ}$ noch eine weitere Strecke $\overline{AB} > \overline{PQ}$ gegeben, so erwartet man, dass $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$ ist, wenn man nur n groß genug wählt. Eigenartigerweise lässt sich das aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen. Man muss es fordern:

Das Archimedes-Axiom (S.2): Zu zwei Strecken $\overline{PQ} < \overline{AB}$ gibt es stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot \overline{PQ} > \overline{AB}$.

Man nennt die Axiome (S.1) und (S.2) auch die ***Stetigkeitsaxiome***, aus Gründen, die weiter unten erläutert werden.

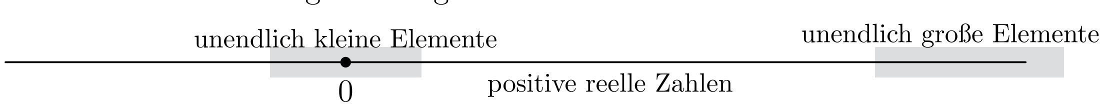
Das Axiom (S.2) taucht bei Euklid nicht explizit auf. In der Proportionenlehre betrachtet er allerdings nur Verhältnisse von solchen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{PQ}$, die das Archimedes-Axiom erfüllen.

In der euklidischen Ebene gilt (S.2), so einfach ist die Frage nach der Unabhängigkeit also nicht zu entscheiden. Aber es gibt sogenannte ***nicht-archimedische Körper***, und in den damit modellierten Ebenen kann es passieren, dass alle bisherigen Axiome der Geometrie gelten, nicht aber (S.2).

Als erstes möchte man natürlich mal einen nicht-archimedischen Körper sehen. Das ist relativ leicht. Es sei $\mathbb{R}(t) := \{R = f/g \,:\, f, g$ Polynome, $g \neq 0\}$ der Körper der „rationalen Funktionen“. Das ist tatsächlich ein Körper, aber eigentlich kein angeordneter Körper. Die Ordnung muss erst geschaffen werden, und das geht so: Die Elemente von $P := \{R \in \mathbb{R}(t) \,:\, \exists\, c \in \mathbb{R}$, so dass $R(t) > 0$ für $t > c$ ist $\}$ nennt man ***positiv***. Das ist sinnvoll, denn Zähler und Nenner einer rationalen Funktion $R(t)$ besitzen als Polynome nur endlich viele Nullstellen. Das bedeutet, dass R außerhalb eines geeigneten Intervalls eine stetige Funktion ohne Nullstellen ist, also entweder durchgehend positiv oder durchgehend negativ. Damit gilt:

- Ist $R \in \mathbb{R}(t)$, so ist entweder $R = 0$ oder $R > 0$ oder $-R > 0$.
- Sind $R, Q \in \mathbb{R}(t)$, $R > 0$ und $Q > 0$, so ist auch $R + Q > 0$ und $R \cdot Q > 0$.

Damit wird $\mathbb{R}(t)$ zu einem angeordneten Körper. Ein solcher Körper (der mit der 1 auch alle natürlichen Zahlen und damit sogar $\mathbb{Q}$ enthält) heißt ***archimedisch angeordnet***, wenn es zu jedem Element x eine natürliche Zahl n mit $n > x$ gibt. Im Falle des Körpers $\mathbb{R}(t)$ gilt: Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $r_n(t) := t - n$ positiv (denn für $t > n$ ist $r_n(t) > 0$). Weil $r_n(t) = r_0(t) - n$ mit $r_0(t) := t$ ist, folgt: $r_0(t) > n$ für **jede** natürliche Zahl n. Man nennt solche Elemente auch „unendlich groß“. Entsprechend sind Elemente wie $q_0(t) := 1/t$ „unendlich klein“, weil sie positiv und dabei kleiner als jede positive reelle Zahl sind. Der Körper $\mathbb{R}(t)$ ist nicht archimedisch angeordnet. Man muss ihn sich ungefähr folgendermaßen vorstellen:



Leider kann man in $\mathbb{R}(t)$ nicht so ohne weiteres Wurzeln ziehen. Man kann sich aber folgendermaßen behelfen:

$\mathbb{R}(t)$ lässt sich in eine Obermenge $\widehat{\mathscr{C}}$ einbetten, die alle fehlenden Wurzeln enthält. Wie im Falle der euklidischen Zahlen kann man dann auch hier aus $\mathbb{R}(t)$ durch sukzessive Adjunktion von Wurzeln einen größeren angeordneten Körper $\Omega(t)$ zurechtbasteln, in dem jedes positive Element eine Wurzel besitzt. Natürlich ist auch $\Omega(t)$ nicht-archimedisch geordnet. (Details dazu finden sich im Anhang zu diesem Abschnitt).

Als Modell $\mathscr{M}_6$ führen wir nun die „nicht-archimedische Ebene“ $\Omega(t) \times \Omega(t)$ ein, die Geraden werden wie üblich definiert. In diesem Modell sind alle Inzidenz-, Anordnungs- und Bewegungsaxiome erfüllt, sowie das Kreisaxiom. Alle bisher bewiesenen Sätze gelten, aber nicht das Axiom (S.2). Damit ist dieses unabhängig von den vorherigen Axiomen.

Man braucht das Archimedische Axiom zum Beispiel für die Einführung eines Längenbegriffs.

Die Kongruenz von Strecken liefert eine Äquivalenzrelation. Die allen Elementen einer Äquivalenzklasse gemeinsame Eigenschaft ist das, was wir uns anschaulich unter einer „Länge“ vorstellen. Deshalb wollen wir eine solche Äquivalenzklasse auch als ***Länge*** bezeichnen. Λ sei die Menge aller Längen.

Die Äquivalenzklasse einer Strecke $\overline{AB}$ bezeichnen wir mit $[AB]$. Ist $\overline{CD}$ eine weitere Strecke, so kann man einen Punkt E mit $A-B-E$ finden, so dass $[BE] = [CD]$ ist. Wir schreiben dann: $[AE] = [AB] + [CD]$.

Die Definition ist unabhängig von den Repräsentanten, und offensichtlich ist die Addition auf Λ kommutativ und assoziativ. Weiter gibt es zwischen den Elementen von Λ eine $<$-Beziehung mit folgenden Eigenschaften:

1. Für je zwei Elemente $a, b \in \Lambda$ ist entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$.
2. Ist $a < b$ und $b < c$, so ist auch $a < c$.
3. Ist $a < b$, so ist auch $a + c < b + c$, für jedes $c \in \Lambda$.

Unter diesen Umständen ist Λ ist eine ***angeordnete kommutative Halbgruppe***.

Definition

Eine ***Längenfunktion*** ist eine Funktion $\lambda : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\lambda(a + b) = \lambda(a) + \lambda(b)$.
2. Es gibt ein $e \in \Lambda$ mit $\lambda(e) = 1$.

Jede Strecke $\overline{AB}$ mit $\lambda([AB]) = 1$ wird als ***Einheitsstrecke*** (bezüglich λ) bezeichnet.

Satz: *Ist λ eine Längenfunktion, so gilt:*

1. *Ist $a < b$, so ist auch $\lambda(a) < \lambda(b)$.*
2. *Ist (a_n) eine Folge von Längen, die man derart durch Strecken $\overline{AB_n}$ repräsentieren kann, dass B_{n+1} jeweils der Mittelpunkt von $\overline{AB_n}$ ist, so ist*
$$\lambda(a_{n+1}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda(a_n) = 0.$$
3. *Die Einheitslänge e ist eindeutig bestimmt, d.h. je zwei Einheitsstrecken für λ sind zueinander kongruent.*

Beweis:

1) Seien $a, b \in \Lambda$ mit $a < b$. Dann gibt es ein c mit $a+c = b$, also $\lambda(a)+\lambda(c) = \lambda(b)$. Da $\lambda(c) > 0$ ist, ist $\lambda(a) < \lambda(b)$.

2) Es ist $a_{n+1} + a_{n+1} = a_n$. Daraus folgt: $2 \cdot \lambda(a_{n+1}) = \lambda(a_n)$, oder $\lambda(a_{n+}) = \frac{1}{2}\lambda(a_n)$.

Sukzessive folgt: $\lambda(a_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\lambda(a_1)$, und im Grenzwert strebt $\lambda(a_n)$ gegen 0.

3) Seien e, e' zwei Längen mit $\lambda(e) = \lambda(e') = 1$. Wäre $e \neq e'$, etwa $e < e'$, so müsste $\lambda(e) < \lambda(e')$ sein. ∎

Eine Längenfunktion ist also ein Homomorphismus $\lambda : \Lambda \to \mathbb{R}_+$ zwischen angeordneten Halbgruppen.

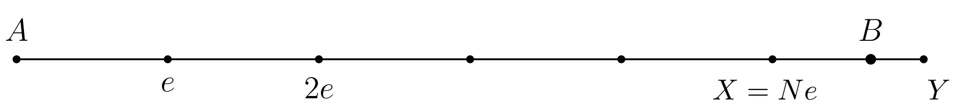
Satz: *Zu jeder beliebigen Strecke $\overline{PQ}$ gibt es eine eindeutig bestimmte Längenfunktion λ, so dass $\overline{PQ}$ eine Einheitsstrecke für λ ist.*

Beweis: (Idee) Sei $a \in \Lambda$ eine Länge, repräsentiert durch eine Strecke $\overline{AB}$, sowie e die Länge von $\overline{PQ}$.

Nach Archimedes gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass entweder $N \cdot e = a$ oder $N \cdot e < a < (N+1) \cdot e$.

Im ersten Fall setzen wir $\lambda(a) := N$ und sind fertig.

Im zweiten Fall gibt es Punkte X, Y auf $\overrightarrow{AB}$ mit $A - X - B$ und $X - B - Y$ gibt, so dass $\lambda([AX]) = N$ und $\lambda([AY]) = N + 1$ ist.



Dann wird sukzessive die Strecke $\overline{XY}$ halbiert. Liegt B beim i-ten Schritt genau auf dem oder rechts vom Mittelpunkt, setzen wir $\varepsilon_i := 1$ und machen mit dem rechten Teilintervall weiter, andernfalls setzen wir $\varepsilon_i := 0$ und machen mit dem linken Teilintervall weiter.

Endet das Verfahren nach n Schritten (so dass der linke Randpunkt des n-ten Teilintervalls $= B$ ist), so setzen wir $\lambda(a) := N + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ und sind fertig.

Andernfalls setzen wir

$$\lambda(a) = N + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}.$$

Da es nicht passieren kann, dass $\varepsilon_n = 1$ für alle $n \geq 1$ gilt, und da alle ε_n in $\{0, 1\}$ liegen, folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} < \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n - 1 = \frac{1}{1 - 1/2} - 1 = 1.$$

Die Reihe ist konvergent und hat einen Wert < 1.

Die Additivität von λ kann man nachrechnen, ebenso die Monotonie. ∎

Im Modell $\mathcal{M}_5$ liegt es nahe, $\overline{OE}$ mit $O := (0, 0)$ und $E := (1, 0)$ als Einheitsstrecke zu wählen. Die dazu konstruierte Längenfunktion liefert die gewöhnliche euklidische Länge. Natürlich erhält man nur Zahlen, die in $\mathrm{Eu}(\mathbb{Q})$ liegen.

Die Messung von Winkeln ist etwas schwieriger, darauf können wir hier nicht eingehen.

In der modernen Literatur wird an Stelle des Kreisaxioms (S.1) meist ein anderes Axiom benutzt, zum Beispiel das Cantor-Axiom:

Das **Cantor-Axiom (C):** Es sei eine Gerade g und eine Folge von Strecken $s_i = \overline{A_i B_i} \subset g$ gegeben, so dass jeweils $s_{i+1} \subset s_i$ ist und zu jeder Strecke $\overline{PQ}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{A_n B_n} < \overline{PQ}$ existiert. Dann gibt es einen Punkt $X \in g$ mit $X \in s_i$ für alle i.

Archimedes-Axiom und Cantor-Axiom zusammen sind äquivalent zum Dedekind-Axiom:

Das **Dedekind-Axiom (D):** Die Menge der Punkte einer Geraden g sei in zwei nicht-leere Teilmengen $\mathscr{M}$ und $\mathscr{N}$ zerlegt, so dass kein Punkt von $\mathscr{M}$ zwischen zwei Punkten von $\mathscr{N}$ und kein Punkt von $\mathscr{N}$ zwischen zwei Punkten von $\mathscr{M}$ liegt.

Dann gibt es genau einen Punkt $Z \in g$, so dass für $X \in \mathscr{M}$ und $Y \in \mathscr{N}$ gilt: Entweder ist $Z = X$ oder $Z = Y$ oder es gilt $X - Z - Y$.

Die Dedekind-Eigenschaft sorgt dafür, dass jede positive reelle Zahl als Streckenlänge vorkommt. Also ist das Axiom (D) von den bisherigen Axiomen unabhängig. Ein passendes Modell ist die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$. Man kann die Axiome (S.1) und (S.2) aus (D) herleiten. Beim Archimedes-Axiom ist das klar, beim Kreis-Axiom ist das nicht ganz so einfach. Wenn das Parallelenaxiom zur Verfügung stände, könnte man Koordinaten einführen und direkt im $\mathbb{R}^2$ arbeiten. Dann geht es einfacher, man muss nur ein quadratisches Gleichungssystem lösen.

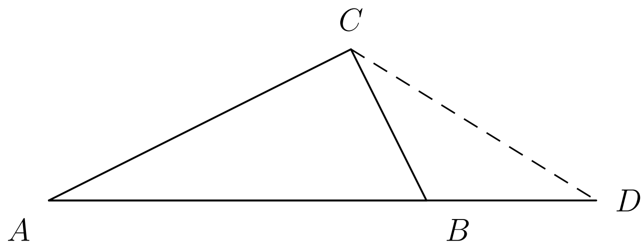
Für Euklid und seine Zirkel-und-Lineal-Geometrie reichen die Axiome (S.1) und (S.2) aus. Das Dedekind-Axiom (D) ist eng mit den reellen Zahlen verknüpft und passt deshalb nicht so recht in die Antike Welt, es gehört in die Mathematik nach Cantor, in der mengentheoretische Begriffsbildungen keine Probleme mehr bereiten. Wir wollen hier vorerst noch beim Standpunkt Euklids bleiben und das Dedekind-Axiom erst benutzen, wenn dies unumgänglich ist.

Unter der ***neutralen Geometrie*** versteht man die Sammlung aller derjenigen Resultate, die ohne Parallelenaxiom bewiesen werden können. Wir vervollständigen diesen Vorrat noch durch einige weitere Sätze und gehen dann zur „euklidischen Geometrie“ über, die das Parallelenaxiom benutzt.

Satz (Euklids Proposition 20, „Dreiecks-Ungleichung“):

In einem Dreieck sind zwei beliebige Seiten zusammen größer als die dritte Seite.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass im Dreieck ABC gilt: $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$.



Sei D mit $A-B-D$ so gewählt, dass $\overline{BD} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$ ist. Im Dreieck ADC ist $\angle ACD > \angle BCD \mathrel{\widehat{=}} \angle ADC$, also $\overline{AD} > \overline{AC}$ (weil dem größeren Winkel gemäß Proposition 19 die größere Seite gegenüberliegt). Es ist aber $[AD] = [AB] + [BD] = [AB] + [BC]$.

∎

Man erinnere sich an Euklids Proposition 22:

Sind drei Strecken a, b, c mit $a + b > c$, $a + c > b$ und $b + c > a$ gegeben, so kann man ein Dreieck mit den Seiten a, b, c konstruieren.

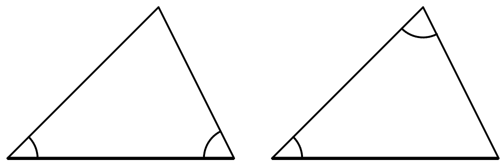
Nun ist noch klarer geworden, wozu die Voraussetzungen nötig waren.

Mehrfach wurde schon gesagt, dass Euklid nicht nur Kongruenzsätze beweist, sondern auch die zugehörigen Konstruktionsbeschreibungen angibt. Fassen wir zusammen:

(1) Im Falle SWS ist nicht viel zu sagen, man verbindet einfach die freien Enden der beiden gegebenen Seiten miteinander.

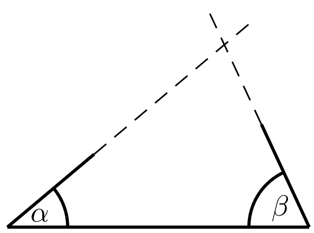
(2) Über den Fall SSS wurde schon gerade schon gesprochen, mit Zirkel und Lineal (also mit Hilfe des Kreisaxioms) ist die Konstruktion möglich.

(3) Euklids Proposition 26 hat die WSW- und die WWS-Kongruenz zum Thema:



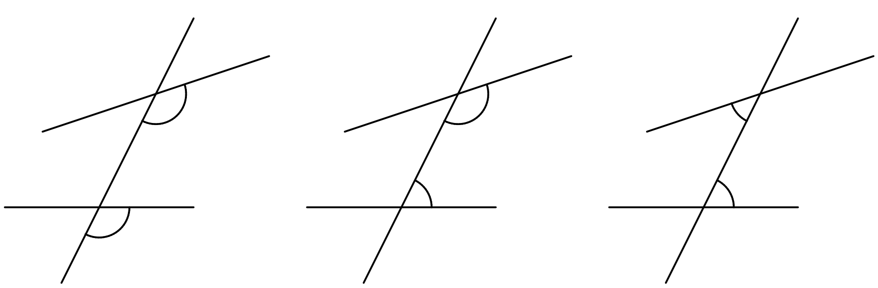
Offen ist noch die Frage der Konstruierbarkeit im Falle WSW!

Um den fehlenden dritten Punkt des Dreiecks zu erhalten, muss man lediglich den Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel aufsuchen. Doch woher weiß man, dass ein solcher Schnittpunkt existiert? Man weiß es eben nicht! Genau hierfür braucht man Euklids Postulat V. Das sichert die Existenz des Schnittpunktes (unter den gegebenen Bedingungen) und damit die Konstruierbarkeit des Dreiecks. (Im Fall WWS treten die gleichen Probleme auf).



Tatsächlich beginnt Euklid mit Proposition 27 seine Theorie der Parallelen, und in Proposition 29 benutzt er zum ersten Mal sein Postulat V.

In Kapitel 1 wurde für den Fall, dass eine Gerade h zwei parallele Geraden g_1 und g_2 trifft, die Bezeichnung F-Winkel, E-Winkel und Z-Winkel eingeführt. Diese Bezeichnungen kann man auch verwenden, wenn g_1 und g_2 nicht parallel sind.



Wir sagen, in der gegebenen Situation gilt

eine Bedingung (F), falls zwei Stufenwinkel gleich sind,
eine Bedingung (E), falls zwei Ergänzungswinkel zus. zwei Rechte ergeben,
eine Bedingung (Z), falls zwei Wechselwinkel gleich sind.

Lemma:

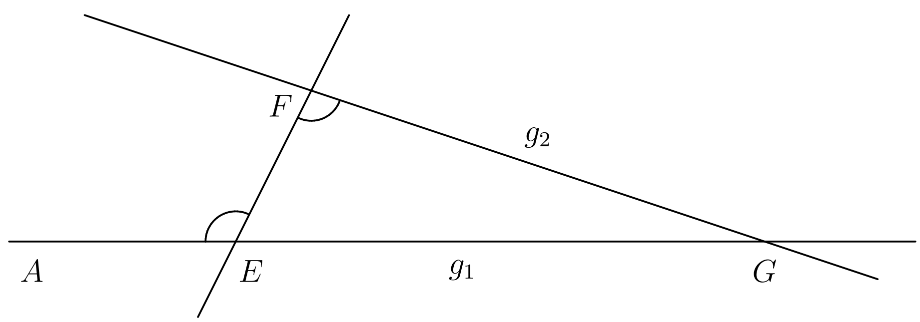
Gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so gelten auch alle anderen.

Beweis: Einfache Übungsaufgabe. ∎

Satz (Euklids Proposition 27 und 28, benötigt nicht Postulat V):

Wird die Gerade h von zwei Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen und gilt eine Bedingung (F), (E) oder (Z), so sind g_1 und g_2 parallel.

Beweis: Es seien E und F die Schnittpunkte von h mit g_1 bzw. g_2. Wir nehmen an, g_1 und g_2 seien nicht parallel. Dann müssen sie sich auf einer Seite von h treffen, G sei der Schnittpunkt. Wir wählen noch einen Punkt A auf g_1 mit $A - E - G$.

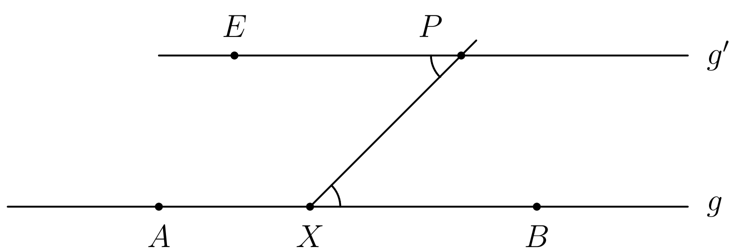


Nach dem Lemma können wir voraussetzen, dass die Wechselwinkel $\angle AEF$ und $\angle EFG$ gleich sind. Aber $\angle AEF$ ist Außenwinkel zum Dreieck EGF, und $\angle EFG$ ein nicht anliegender Innenwinkel. Das ist ein Widerspruch! ∎

Satz (Euklids Proposition 31, benötigt nicht Postulat V):

Ist eine Gerade g und ein nicht auf g gelegener Punkt P gegeben, so kann man durch P eine Gerade g' ziehen, die parallel zu g ist.

Beweis: Wir wählen auf g drei verschiedene Punkte A, X, B mit $A - X - B$. An die Strecke $\overline{XP}$ tragen wir bei P einen Winkel $\angle XPE \mathrel{\widehat{=}} \angle BXP$ an und setzen $g' := EP$.



Die Geraden g, g' treffen dann $h := XP$ in zwei verschiedenen Punkten und haben gleiche Wechselwinkel. Nach dem vorigen Satz müssen sie parallel sein. ∎

Man beachte: Der Beweis liefert ein Konstruktionsverfahren, aber nicht die Eindeutigkeit der Parallelen zu g durch P. Es kann nicht – wie in der projektiven Geometrie – passieren, dass eine Gerade überhaupt keine Parallele besitzt. Es ist aber nicht ausgeschlossen, dass durch P mehrere Parallelen zu g gezogen werden können.

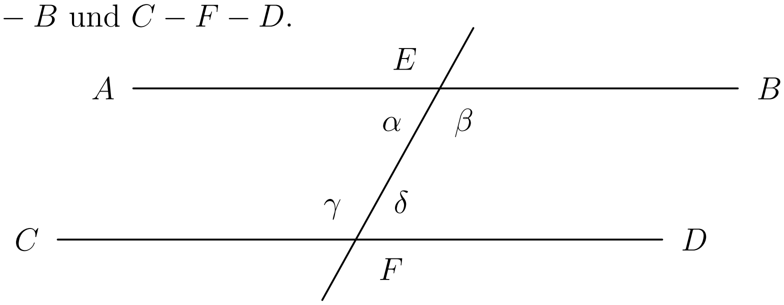
Das Euklidische Parallelenaxiom (E-P): Wenn eine Gerade h von zwei verschiedenen Geraden g_1, g_2 in zwei verschiedenen Punkten getroffen wird und dabei auf einer Seite von h Ergänzungswinkel entstehen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind, so schneiden sich g_1 und g_2 auf dieser Seite von h.

Wie oben schon bemerkt, ist es nun möglich, ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren.

Satz (Euklids Proposition 29, benutzt (E-P)):

Trifft eine Gerade zwei verschiedene Parallelen, so gelten die Bedingungen (F), (E) und (Z).

Beweis: Die Schnittpunkte der Geraden h mit den Parallelen g_1, g_2 seien mit E und F bezeichnet. Außerdem seien Punkte $A, B \in g_1$ und $C, D \in g_2$ gewählt, mit $A - E - B$ und $C - F - D$.



Es genügt zu zeigen, dass $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \delta$ ist. Angenommen, das wäre nicht der Fall, es wäre etwa $\alpha > \delta$.

Dann ist $\delta + \beta < \alpha + \beta$, und letztere ergeben als Nebenwinkel zusammen zwei Rechte. Also sind die Voraussetzungen des Parallelenaxioms erfüllt, $g_1 = AB$ und $g_2 = CD$ müssen sich auf der Seite von h, auf der B und D liegen, treffen. Das ist ein Widerspruch zur Parallelität. ∎

Dies ist in der Tat der erste Satz bei Euklid, der mit Hilfe des Parallelenaxioms bewiesen wird.

Satz (Euklids Proposition 30, benutzt Prop. 29, also Postulat V):

Sind zwei Geraden parallel zu einer dritten Geraden, so sind sie auch untereinander parallel.

Der rein technische Beweis wird hier weggelassen.

Die Parallelität ist also eine Äquivalenzrelation, wenn Gleichheit auch als Parallelität gilt.

Besonders wichtig ist natürlich der folgende Satz:

Satz (Euklids Proposition 32):

Bei jedem Dreieck gilt:

1. *Jeder Außenwinkel ist gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.*
2. *Die Summe der drei Innenwinkel ergibt zwei Rechte.*

Der Beweis geht genauso, wie er in Kapitel 1 vorgeführt wurde. Natürlich benutzt er das Parallelenaxiom.

Der Begriff des Dreiecks soll nun etwas verallgemeinert werden. Es seien Punkte A_0, A_1, A_2, …, A_n gegeben. $s_i := \overline{A_{i-1}A_i}$ seien die Verbindungsstrecken aufeinander folgender Punkte, für $i = 1, \ldots, n$. Dann nennt man die Vereinigung $\Sigma = s_1 \cup \ldots \cup s_n$ einen ***Streckenzug***. Man schreibt auch $A_0A_1A_2 \ldots A_n$ an Stelle von Σ.

Σ heißt ***geschlossen***, wenn $A_n = A_0$ ist.

Σ heißt ***einfach***, wenn gilt:

a) Jeder innere Punkt einer Strecke gehört nur zu dieser Strecke.

b) Jeder der Punkte A_i gehört zu höchstens zwei Strecken.

Ein ***Polygon*** ist ein einfacher geschlossener Streckenzug. Die Strecken s_i nennt man die ***Seiten*** des Polygons, die Punkte A_i die ***Ecken*** des Polygons. Ein Polygon mit den Ecken A_0, A_1, …, A_{n-1}, $A_n = A_0$ wird auch als n-***Eck*** bezeichnet.

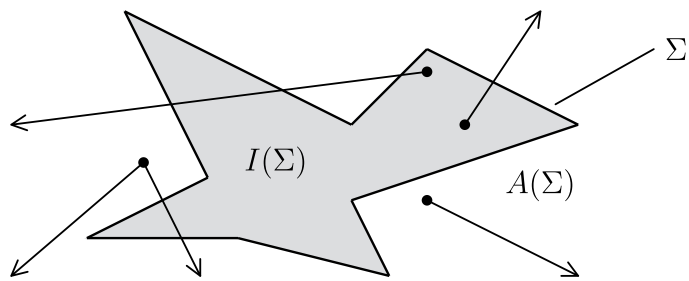
Ein Polygon Σ trennt die Ebene in zwei Bereiche, die Menge $I(\Sigma)$ der „inneren" Punkte und die Menge $A(\Sigma)$ der „äußeren" Punkte von Σ.

Man kann die Punkte $X \in \mathscr{E} \setminus \Sigma$ folgendermaßen mit Hilfe der von X ausgehenden Strahlen unterscheiden:[1]

[1] Ich habe in der Vorlesung versucht, eine einfachere Definition für ein Polygongebiet zu finden. Leider klappte das nicht so, wie ich dachte.

- X liegt in $A(\Sigma)$, wenn es entweder einen von X ausgehenden Strahl $\overrightarrow{s}$ mit $\overrightarrow{s} \cap \Sigma = \varnothing$ gibt oder einen von X ausgehenden Strahl, der eine gerade Anzahl von Seiten von Σ in je einem inneren Punkt trifft.

- X liegt in $I(\Sigma)$, falls X nicht in $A(\Sigma)$ liegt. Das bedeutet: Jeder von X ausgehende Strahl $\overrightarrow{s}$ trifft das Polygon Σ, und wenn er endlich viele Seiten von Σ in je einem inneren Punkt trifft, dann ist deren Anzahl ungerade.

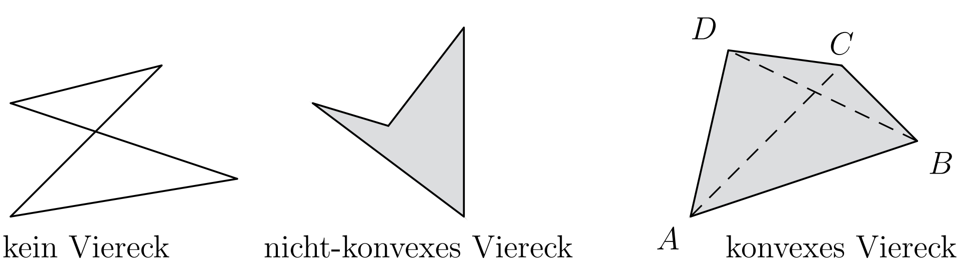


Man nennt $I(\Sigma)$ ein ***Polygongebiet***.

Bei Dreiecken erhält man die bekannten Begriffe, und auch bei Vierecken verhält sich alles so, wie man es erwartet. Man nennt ein Viereck $ABCD$ ***konvex***, wenn $I(ABCD)$ eine konvexe Menge ist, wenn sie also mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält. Die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ nennt man die ***Diagonalen*** des Vierecks $ABCD$. Wir setzen stets voraus, dass keine drei Ecken kollinear sind. Man kann zeigen:

- Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn jede Seite ganz in einer durch die gegenüberliegende Seite bestimmten Halbebene liegt.

- Sind in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten parallel, so ist das Viereck konvex.



kein Viereck nicht-konvexes Viereck konvexes Viereck

Definition

Ein ***Parallelogramm*** ist ein Viereck, in dem gegenüberliegende Seiten parallel sind.

Ein ***Rechteck*** ist ein Viereck mit 4 rechten Winkeln.

Ein ***Quadrat*** ist ein Rechteck, in dem alle Seiten gleich lang sind.

Offensichtlich ist jedes Parallelogramm konvex.

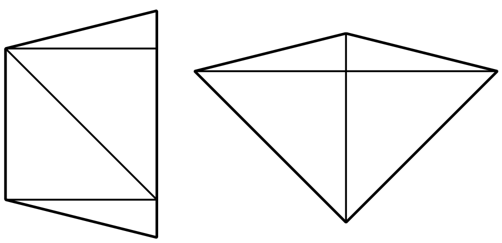
Nun muss man über Flächen sprechen. Ausgangspunkt ist die Tatsäche, dass man jedes Polygongebiet in endlich viele Dreiecksgebiete zerlegen kann (auch wenn es schwierig ist, das allgemein zu beweisen).

Definition

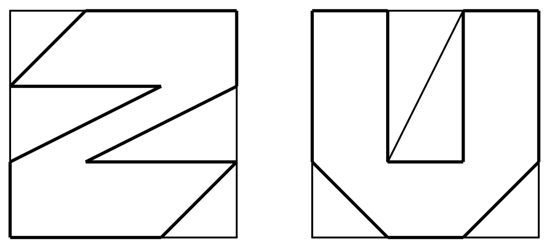
Zwei Polygongebiete heißen ***zerlegungsgleich***, wenn sie in endlich viele paarweise kongruente Dreiecksgebiete zerlegt werden können.

Zwei Polygongebiete heißen ***ergänzungsgleich***, wenn man sie durch endlich viele paarweise zerlegungsgleiche Polygongebiete zu zerlegungsgleichen Polygongebieten ergänzen kann.

Hier sind zwei Beispiele:



zerlegungsgleiche Figuren



ergänzungsgleiche Figuren

Man kann zeigen, dass beide Bedingungen Äquivalenzrelationen auf der Menge der Polygongebiete definieren.

Satz (Euklids Proposition 34):

In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang, und die Diagonale halbiert die Fläche.

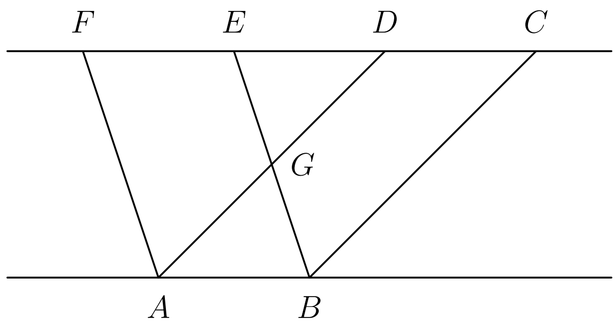
Beweis: Ist $ABCD$ das Parallelogramm, so folgt leicht mit Z-Winkeln und WSW, dass die Dreiecke ABC und CDA kongruent sind. Insbesondere sind dann auch die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.

Bei der Aussage über die Fläche stutzt man, denn es wurde noch nicht definiert, was unter der „Fläche“ zu verstehen ist, und Euklids Original-Definition ist bestenfalls die Einführung eines primitiven Terms. Aber offensichtlich verwendet Euklid das Prinzip der Zerlegungs- oder Ergänzungsgleichheit. Da die Dreiecke ABC und CDA kongruent sind, ist die Fläche des Parallelogramms doppelt so groß wie die der einzelnen Dreiecke. ■

Deutlicher wird das Prinzip beim folgenden Satz:

Satz (Euklids Proposition 35): *Es seien zwei Parallelogramme $ABCD$ und $ABEF$ zwischen den Parallelen AB und $CD = EF$ gegeben, mit gleicher Grundlinie $\overline{AB}$. Dann haben sie die gleiche Fläche.*

Beweis: Man muss eigentlich verschiedene Fälle untersuchen. Wir betrachten nur den Fall $F - E - D$ und $E - D - C$.



Euklid argumentiert folgendermaßen: Da ADF und BCE kongruent sind, haben sie die gleiche Fläche. Subtrahiert man von beiden die Dreiecksfläche GDE, so erhält man gleiche Vierecksflächen $AGEF$ und $BCDG$. Fügt man nun die Dreiecksfläche ABG hinzu, so erhält man die Gleichheit der Parallelogrammflächen. ∎

Man kann eine ***Flächenfunktion*** einführen, die jedem beschränkten Polygongebiet $\mathcal{G}$ eine reelle Zahl $\mu(\mathcal{G}) \geq 0$ zuordnet, so dass μ additiv und invariant unter Bewegungen ist. Eigenartigerweise geht das ohne Parallelenaxiom, die Existenz ist aber sehr schwer zu zeigen. Wenn das Parallelenaxiom gilt, kann man die Flächenfunktion so definieren, dass ein Quadrat der Seitenlänge a den Flächeninhalt a^2 besitzt. Natürlich braucht man dafür eine Längenfunktion, aber es wurde ja schon gezeigt, wie man mit Hilfe des Archimedes-Axioms eine solche Längenfunktion bekommt.

Der folgende Satz findet sich **nicht** bei Euklid, er wird sich aber bei späteren Untersuchungen als sehr nützlich erweisen:

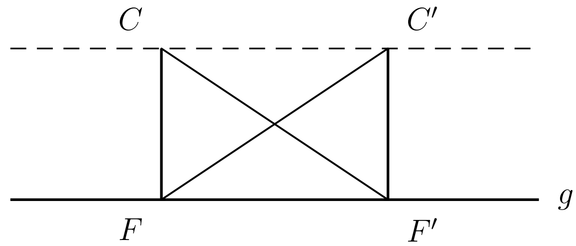
Satz über Äquidistanz: *(E-P) sei zunächst nicht vorausgesetzt.*

Sei g eine Gerade, C, C' zwei Punkte $\notin g$, aber auf der gleichen Seite von g. Mit F bzw. F' seien die Fußpunkte der Lote von C bzw. C' auf g bezeichnet.

1. *Ist $\overline{FC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{F'C'}$, so ist $\angle FCC' \mathrel{\widehat{=}} \angle F'C'C$.*
2. *Setzt man zusätzlich (E-P) voraus, so gilt:*

   $\overline{FC}$ und $\overline{F'C'}$ sind genau dann kongruent, wenn C und C' auf einer Parallelen zu g liegen.

Beweis: Es liegt folgende Situation vor:



1) Die Winkel $\angle F'FC$ und $\angle FF'C'$ sind Rechte. Ist $\overline{FC} \cong \overline{F'C'}$, so ist $FF'C \cong FF'C'$ (SWS), und deshalb $\overline{FC'} \cong \overline{F'C}$ und $\angle FF'C \cong \angle F'FC'$. Damit ist aber auch $\angle CF'C' \cong \angle C'FC$, und es folgt: $CF'C' \cong C'FC$ (SWS). Also ist $\angle FCC' \cong \angle F'C'C$

2) Es gelte nun (E-P).

a) Sei $\overline{FC} \cong \overline{F'C'}$. Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ist $\angle FCC' + \angle F'C'C = 2R$. Da die beiden Winkel nach (1) gleich sind, müssen beide Rechte sein. Daraus folgt, dass CC' parallel zu g ist.

b) Sei umgekehrt CC' parallel zu $g = FF'$. Dann ist $FF'C'C$ ein Parallelogramm. In diesem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang. Also ist $\overline{FC} \cong \overline{F'C'}$. ∎

Wir haben damit auch gezeigt:

> *Gilt das euklidische Parallelenaxiom, so sind zwei Geraden, die überall den gleichen Abstand haben, parallel.*

Ab sofort und bis zum Ende des Abschnittes sei das Parallelenaxiom vorausgesetzt!

Satz (Euklids Proposition 37):

Zwei Dreiecke, die in einer Seite übereinstimmen, und deren Höhen auf diese Seite kongruent sind, haben die gleiche Fläche.

Beweis: Man kann annehmen, dass beide Dreiecke ihre Spitze auf der selben Seite der Grundlinie haben. Nach Voraussetzung und wegen des vorigen Satzes liegen diese Spitzen auf einer Parallelen zur Grundlinie. Ergänzt man die Dreiecke zu Parallelogrammen, so erhält man flächengleiche Parallelogramme. Also sind auch die Dreiecke flächengleich. ∎

Satz (Euklids Proposition 46): *Über einer Strecke kann man ein Quadrat errichten.*

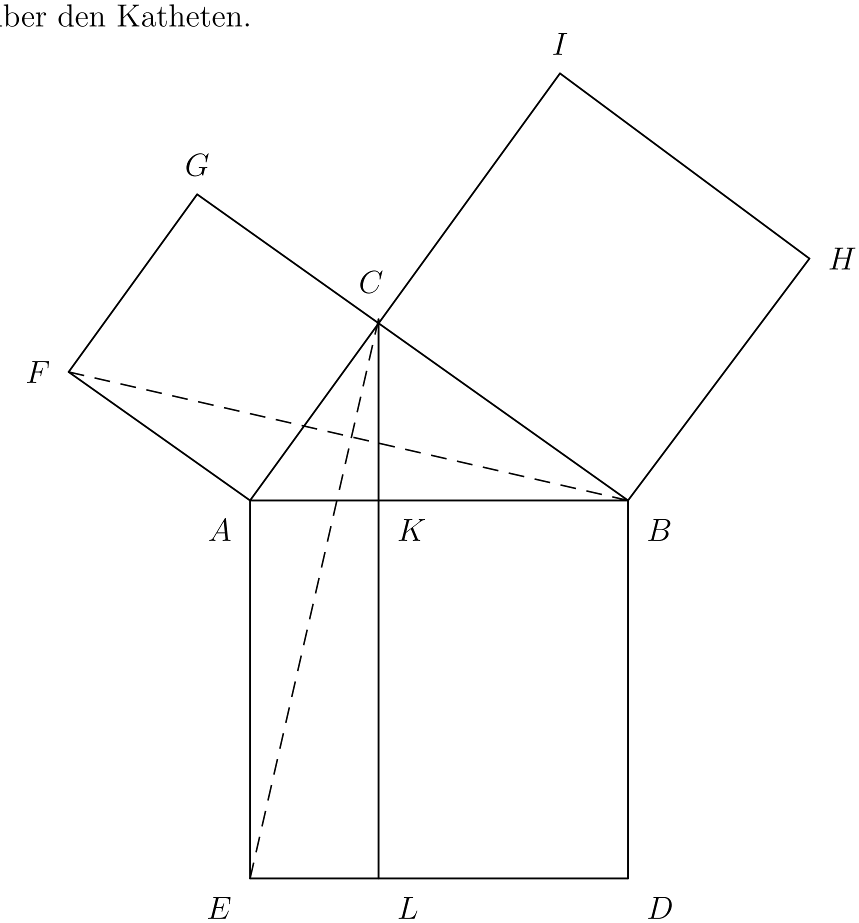
Der Satz liefert sowohl die Existenz von Quadraten, als auch eine Konstruktionsbeschreibung. Den Beweis kann sich jeder selbst überlegen.

Euklids Proposition 47 (der Satz des Pythagoras):

An einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse die gleiche Fläche wie die Quadrate über den Katheten zusammen.

Beweis: Das Dreieck ABC habe seinen rechten Winkel bei C, so dass $\overline{AB}$ die Hypotenuse ist.

Es sei $AEDB$ das Quadrat über der Hypotenuse, $ACGF$ und $CBHI$ die Quadrate über den Katheten.



Man fälle das Lot von C auf AB, es trifft dort einen Punkt K mit $A - K - B$ und kann über K hinaus bis zu einem Punkt L mit $E - L - D$ verlängert werden.

Da CL die Geraden AB und ED jeweils senkrecht trifft, ist CL parallel zu AE.

Die Dreiecke AEC und ABF sind kongruent (SWS, es ist $\angle FAB \mathrel{\widehat{=}} \angle CAE$), also haben sie die gleiche Fläche.

Das Dreieck FAB und das Quadrat $FACG$ haben die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe. Genauso haben AEC und das Rechteck $AELK$ die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe. Daraus folgt, dass $FACG$ und $AELK$ die gleiche Fläche haben. Und genauso folgt, dass $CBHI$ und $KLDB$ die gleiche Fläche haben.

Nimmt man alles zusammen, so erhält man die Behauptung. ∎

Steht eine Flächenfunktion zur Verfügung, so ergibt sich der Satz des Pythagoras in der gewohnten Form:

> *Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b ist* $a^2 + b^2 = c^2$.

Anhang:

Hier soll die Konstruktion des nicht-archimedischischen Körpers $\Omega(t)$ im Detail ausgeführt werden.

Sei $\mathbb{R}(t) := \{f/g \,:\, f, g$ Polynome, $g \neq 0\}$ der Körper der „rationalen Funktionen“. Die Elemente von $P := \{R \in \mathbb{R}(t) \,:\, \exists\, c \in \mathbb{R}$, so dass $R(t) > 0$ für $t > c$ ist $\}$ nennt man ***positiv***. Damit wird $\mathbb{R}(t)$ zu einem angeordneten Körper, d.h.:

- Ist $f \in \mathbb{R}(t)$, so ist entweder $f = 0$ oder $f > 0$ oder $f < 0$.
- Sind $f, g \in \mathbb{R}(t)$, $f > 0$ und $g > 0$, so ist auch $f + g > 0$ und $f \cdot g > 0$.

Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch angeordnet*, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit $n > x$ gibt.

Im Fall $K = \mathbb{R}(t)$ gilt: Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $f_n(t) := t - n$ positiv (denn für $t > n$ ist $f_n(t) > 0$). Weil $f_n(t) = f_0(t) - n$ mit $f_0(t) := t$ ist, folgt: $f_0(t) > n$ für **jede** natürliche Zahl n. Der Körper $\mathbb{R}(t)$ ist nicht archimedisch angeordnet. Elemente wie f_0 kann man „unendlich groß“ nennen, denn es ist $f_0 > c$ für jede reelle Zahl c. Umgekehrt kann man das Element $1/f_0$ als „unendlich klein“ bezeichnen, weil es positiv und dabei kleiner als jede positive reelle Zahl ist.

Das Problem ist, dass man in $\mathbb{R}(t)$ nicht so ohne weiteres Wurzeln ziehen kann. Dazu muss man den Körper erweitern, und das ist nicht ganz so einfach.

Sei $\mathscr{C}$ die Menge der stetigen Funktionen, die auf einem Intervall (c, ∞) definiert sind und entweder $\equiv 0$ oder ohne Nullstellen sind. Zwei solche Funktionen $f_1 : (c_1, \infty) \to \mathbb{R}$ und $f_2 : (c_2, \infty) \to \mathbb{R}$ sollen äquivalent heißen, falls ein $c \geq \max(c_1, c_2)$ existiert, so dass $f_1 = f_2$ auf (c, ∞) ist. Es ist offensichtlich, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $f \in \mathscr{C}$ mit $< f >$ und die Menge aller Äquivalenzklassen mit $\widehat{\mathscr{C}}$. Man beachte, dass diese Menge weit davon entfernt ist, ein Körper zu sein! Schon die Summe zweier Klassen kann nicht immer gebildet werden (die Funktionen $f_1(t) := 2$ und $f_2(t) := 2 + \sin t$ liegen in $\mathscr{C}$, nicht aber die Funktion $f_2(t) - f_1(t) = \sin t$, die periodisch auftretende Nullstellen besitzt).

Wir nennen eine Klasse $< f >$ *positiv*, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(t) > 0$ für $t > c$ ist. Positive Klassen können addiert und multipliziert werden, das Ergebnis ist wieder positiv. Ist $< f > \neq 0$ (und damit $f(t) \neq 0$ für genügend großes t), so ist $< f >$ positiv oder $- < f >$ positiv.

Nun definieren wir $j : \mathbb{R}(t) \to \widehat{\mathscr{C}}$ durch $j(R) :=< R|_{(c,\infty)} >$, wobei c so zu wählen ist, dass $R(t)$ definiert und $R(t) \neq 0$ für $t > c$ ist. Die Abbildung ist wohldefiniert, denn das Ergebnis hängt nicht von der Wahl von c ab. Ist R positiv, so ist auch $j(R)$ positiv. Weiter ist $j(R_1+R_2) = j(R_1)+j(R_2)$ und $j(R_1 \cdot R_2) = j(R_1) \cdot j(R_2)$. Die Summen und Produkte auf der rechten Seite können gebildet werden, denn zu jeder rationalen Funktion $R \neq 0$ gibt es ein c, so dass $R(t)$ definiert und $R(t) \neq 0$ für $t > c$ ist. Schließlich ist j injektiv: Ist $j(R_1) = j(R_2)$, so gibt es ein c, so dass $R_1(t) = R_2(t)$ für $t > c$ ist. Dann ist $R_1 - R_2$ eine rationale Funktion, die für $t > c$ verschwindet. Das ist nur möglich, wenn $R_1 = R_2$ ist.

Wir können also $\mathbb{R}(t)$ als Teilmenge von $\widehat{\mathscr{C}}$ auffassen.

2.6.1 Satz

Sei $K \subset \widehat{\mathscr{C}}$ ein Körper, der $\mathbb{R}(t)$ umfasst, sowie $\alpha \in K$ ein positives Element, aber $\sqrt{\alpha} \notin K$. Dann ist

$$K' := K(\sqrt{\alpha}) = \{a + b\sqrt{\alpha} \,:\, a, b \in K\}$$

ein Körper, der K umfasst und seinerseits in $\widehat{\mathscr{C}}$ liegt.

Beweis: 1) Seien $f, g, h \in \mathscr{C}$, $a =< f >$, $b =< g >$ und $\alpha =< h >$. Alle drei Funktionen seien auf (c, ∞) definiert, stetig und ohne Nullstellen. Außerdem sei $h > 0$. Dann ist auch $F := f+g\sqrt{h}$ eine stetige Funktion auf (c, ∞). Wir nehmen an, es gibt eine unbeschränkte Folge (t_ν) mit $F(t_\nu) = 0$. Dann ist $f(t_\nu)^2 = g(t_\nu)^2 \cdot h(t_\nu)$ für alle ν. Aber $f^2 - g^2h$ ist ein Element von K und damit eine stetige Funktion, die für großes t keine Nullstelle mehr besitzt. Das ist ein Widerspruch. Also liegt F in $\mathscr{C}$ und K' in $\widehat{\mathscr{C}}$.

2) Summe und Produkt zweier Elemente von K' können gebildet werden und liegen wieder in K'. Die Existenz des Inversen folgt wie bei der Konstruktion der pythagoräischen Zahlen, und genau wie dort ergibt sich, dass K' ein Körper ist. ■

Definition

Es sei $\Omega(t)$ die Menge aller Elemente $x \in \widehat{\mathscr{C}}$, zu denen es eine (von x abhängige) Folge von Körpererweiterungen

$$\mathbb{R}(t) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{\alpha_i})$ mit positivem $\alpha_i \in K_{i-1}$ (und $\sqrt{\alpha_i} \notin K_{i-1}$) gibt, so dass x in K_n liegt.

Wir nennen $\Omega(t)$ den Körper der ***nichtarchimedischen Zahlen***.

$\Omega(t)$ enthält $\mathbb{R}$ und alle natürlichen Zahlen, die – aufgefasst als Äquivalenzklassen konstanter Funktionen – auch in $\mathscr{C}$ liegen. Aber in $\Omega(t)$ ist das Archimedische Axiom nicht erfüllt.