2.5 Bewegungen und Kongruenz

Schon öfter wurde das Axiomensystem von Hilbert erwähnt. Hier soll kurz auf dieses System eingegangen werden. Die Einteilung in Gruppen von Axiomen haben wir schon von Hilbert übernommen.

Hilberts 1. Axiomengruppe: Inzidenz

Auf die Notationen der Mengenlehre wird verzichtet. Primitive Terme sind Punkte, Geraden und Ebenen, sowie Wörter wie „liegen auf“ etc.

(1.i) und (1.ii): Je zwei Punkte liegen auf genau einer Geraden.

(1.iii): Auf einer Geraden liegen wenigstens zwei Punkte, und es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Die Axiome (1.iv) bis (1.viii) behandeln Geraden und Ebenen im Raum.

Hilberts 2. Axiomengruppe: Anordnung

Es gibt den primitiven Term „zwischen“. Zur Abkürzung übernehmen wir auch hier die Bezeichnung $A - B - C$, wenn B zwischen A und C liegt.

(2.i): $A - B - C-$ hat zur Folge, dass A, B und C paarweise verschieden sind und auf einer Geraden liegen. Außerdem gilt dann auch $C - B - A$.

(2.ii): Zu $A \neq B$ gibt es stets einen Punkt C mit $A - B - C$.

(2.iii): Von drei paarweise verschiedenen Punkten auf einer Geraden liegt genau einer zwischen den beiden anderen.

(2.iv): Das Pasch-Axiom wird wörtlich so gefordert, wie wir es schon kennen.

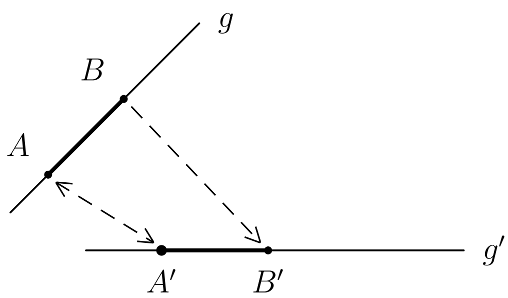
Mit Hilfe der Anordnung werden Strecken, Halbstrahlen und Vielecke erklärt, sowie die beiden Seiten eines Punktes auf einer Geraden, die beiden Seiten einer Geraden in der Ebene (und die beiden Seiten einer Ebene im Raum). Die Strecke mit den Endpunkten A und B wird AB genannt.

Hilberts 3. Axiomengruppe: Kongruenz

Primitiver Term: Es gibt eine Beziehung zwischen Strecken, die man „kongruent“ (in Zeichen: „$\widehat{=}$“) oder manchmal auch „gleich“ nennt.

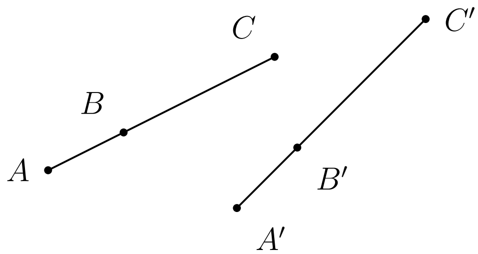
(3.i): Liegen die Punkte A, B auf der Geraden g und A' auf der Geraden g', so gibt es auf einer gegebenen Seite von A' auf g' einen Punkt B' mit $AB \widehat{=} A'B'$.

Dies bedeutet die Möglichkeit der Streckenabtragung. Eindeutigkeit wird nicht gefordert, weil sich die später beweisen lässt.



(3.ii): Ist $A'B' \mathrel{\widehat{=}} \overline{A}B$ und $A''B'' \mathrel{\widehat{=}} AB$, so ist auch $A'B' \mathrel{\widehat{=}} A''B''$.

(3.iii): Ist $A - B - C$ und $A' - B' - C'$, sowie $AB \mathrel{\widehat{=}} A'B'$ und $BC \mathrel{\widehat{=}} B'C'$, so ist auch $AC \mathrel{\widehat{=}} A'C'$.



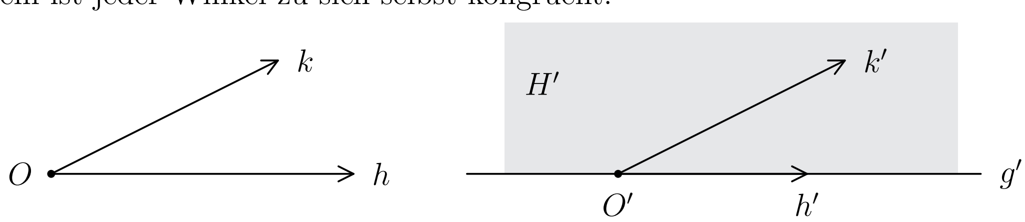
Dies bedeutet die Möglichkeit der Streckenaddition.

Zwei verschiedene Halbstrahlen h und k (auf verschiedenen Geraden) mit gleichem Ausgangspunkt definieren einen Winkel $\angle(h,k)$, die Reihenfolge der Halbstrahlen ist egal. Ein Winkel gehört immer einer bestimmten Ebene an. Die inneren Punkte eines Winkels werden so definiert, wie das auch im vorigen Abschnitt gemacht wurde.

Weiterer primitiver Term: Auch zwischen Winkeln gibt es eine Beziehung, die man „kongruent“ oder „gleich“ nennt.

(3.iv): Ist ein Winkel $\angle(h,k)$ gegeben, sowie eine Gerade g', eine Seite H' von g', ein Punkt O' von g' und ein von O' ausgehender bestimmter Halbstrahl h' auf g', so gibt es genau einen ebenfalls von O' ausgehenden Halbstrahl k', so dass $\angle(h,k) \mathrel{\widehat{=}} \angle(h',k')$ ist und die inneren Punkte dieses Winkels in H' liegen.

Außerdem ist jeder Winkel zu sich selbst kongruent.



Ist A der Ausgangspunkt der Strahlen h und k, B ein Punkt auf h und C ein Punkt auf k, so bezeichnet man den Winkel $\angle(h,k)$ auch mit $\angle BAC$.

(3.v): Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \mathrel{\widehat{=}} A'B$, $AC \mathrel{\widehat{=}} A'C'$ und $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle B'A'C'$ gelten, so ist auch $\angle ABC \mathrel{\widehat{=}} \angle A'B'C'$.

Eine zweite Anwendung dieses Axioms zeigt, dass auch $\angle ACB \mathrel{\widehat{=}} \angle A'C'B'$ ist, und dann beweist man recht schnell, dass die beiden Dreiecke kongruent sind (also in allen Stücken übereinstimmen). Das ist der SWS-Kongruenzsatz.

Soweit Hilberts Axiome, die er um 1900 aufgestellt hat. Die Kongruenzaxiome sind recht abstrakt formuliert und erlauben nicht das klassische Konstruieren mit Zirkel und Lineal. Euklids Vorstellung von der Deckungsgleichheit findet sich nicht.

Das Axiomensystem, das wir in der Vorlesung verwenden, findet man an mehreren Stellen. Wer es erfunden hat, ist schwer zu sagen. Kongruenz wird nun durch den Begriff der „Bewegung" eingeführt. Wir denken dabei an Verschiebungen (Translationen), Drehungen (Rotationen) und Spiegelungen (Reflektionen).

Primitiver Term „Bewegung":

Es gibt gewisse Abbildungen von $\mathscr{E}$ auf sich, die ***Bewegungen*** genannt werden.

Bewegungsaxiom (B.1): Die Menge $\mathscr{B}$ aller Bewegungen bildet eine Gruppe.

Insbesondere ist die identische Abbildung eine Bewegung, jede Bewegung ist bijektiv und ihre Umkehrabbildung ist wieder eine Bewegung.

Bewegungsaxiom (B.2): Gilt $A - B - C$ und ist $\varphi \in \mathcal{B}$, so gilt auch $\varphi(A) - \varphi(B) - \varphi(C)$.

Bewegungen bilden also Geraden auf Geraden ab und erhalten die Anordnung auf den Geraden. Insbesondere werden auch Strecken auf Strecken und Strahlen auf Strahlen abgebildet.

Bewegungsaxiom (B.3): Es seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und O, P, Q drei ebenfalls nicht-kollineare Punkte. Dann gibt es **genau** eine Bewegung φ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\varphi(A) = O$.
2. $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$.
3. $\varphi(C) \in H(OP, Q)$.

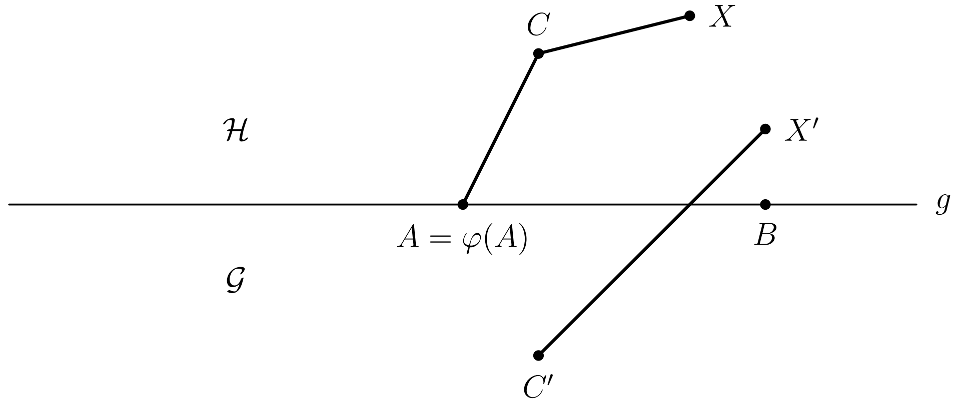
Axiom (B.3) ist sehr weitreichend! Wir werden es benutzen, um die Existenz von Spiegelungen zu beweisen.

Sei etwa $g = AB$ eine feste Gerade und $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ die beiden durch g bestimmten Halbebenen.

Ist C ein beliebiger Punkt in $\mathcal{H}$, so gibt es genau eine Bewegung φ, die A auf A, B auf einen Punkt $B' \in \overrightarrow{AB}$ und C nach $\mathcal{G}$ abbildet.

Satz: *Unter den gerade beschriebenen Bedingungen gilt:*

1. *Für alle $X \in \mathscr{E} \setminus g$ liegen X und $\varphi(X)$ auf verschiedenen Seiten von g.*
2. *Es ist $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.*
3. *Für alle $X \in g$ ist $\varphi(X) = X$.*



Beweis: φ bildet offensichtlich die Gerade g auf sich ab, und das gilt dann auch für φ^{-1}.

1) Sei $X \in \mathcal{H}$, $X \neq C$. Dann ist $\overline{CX} \cap g = \varnothing$ (weil alle Punkte in $\mathcal{H}$ auf der gleichen Seite von g liegen).

Annahme: $X' := \varphi(X) \in \mathcal{H}$. Für $C' := \varphi(C) \in \mathcal{G}$ gilt dann: $\overline{C'X'} \cap g \neq \varnothing$. Also gibt es ein $Y' \in g$ mit $C' - Y' - X'$. Weil $\varphi(\overline{CX}) = \overline{C'X'}$ ist, muss es ein $Y \in \overline{CX}$ mit $\varphi(Y) = Y'$ geben. Da auch φ^{-1} die Gerade g auf sich abbildet, muss Y auf g liegen, obwohl $Y \subset \overline{CX} \subset \mathscr{E} \setminus g$ ist. Das ist ein Widerspruch!

Jedes $X \in \mathcal{H}$ wird also nach $\mathcal{G}$ abgebildet. Analog folgt, dass jedes $Y \in \mathcal{G}$ nach $\mathcal{H}$ abgebildet wird.

2) $\psi := \varphi \circ \varphi$ ist eine Bewegung, die A fest lässt, B nach $\overrightarrow{AB}$ und $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ abbildet. Das tut auch die Identität. Aber es gibt nach Axiom B-3 nur eine Bewegung mit dieser Eigenschaft. Also ist $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

3) **Annahme:** Es gibt ein $X \in g$, so dass $X' := \varphi(X) \neq X$ ist. Dann ist $\varphi(X') = X$, und es gibt drei Möglichkeiten:

a) Ist $A - X - X'$, so ergibt die nochmalige Anwendung von φ die Beziehung $A - X' - X$. Beides zugleich kann aber nicht gelten.

b) Ist $A - X' - X$, so führt das auf die gleiche Weise zu einem Widerspruch.

c) $X' - A - X$ kann aber auch nicht gelten, weil φ den Strahl $\overrightarrow{AB}$ auf $\overrightarrow{AB}$ abbildet. Also war die Annahme falsch. ∎

Definition
Eine Bewegung, die eine Gerade g punktweise festlässt und die durch g bestimmten Halbebenen miteinander vertauscht, heißt ***Spiegelung*** an der Geraden g.

Satz: *Zu jeder Geraden gibt es genau eine Spiegelung.*

Beweis: Die Existenz haben wir oben gezeigt, die Eindeutigkeit folgt direkt aus Axiom (B.3). ∎

Unter einer ***geometrischen Figur*** verstehen wir eine beliebige Teilmenge von $\mathscr{E}$. Ist $\mathcal{F}$ eine geometrische Figur und φ eine Spiegelung, so nennt man $\varphi(\mathcal{F})$ das *Spiegelbild* von $\mathcal{F}$.

Definition
Zwei geometrische Figuren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ heißen ***kongruent*** (in Zeichen: $\mathcal{F} \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{F}'$), falls es eine Bewegung $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ mit $\varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ gibt.

Aus den Gruppeneigenschaften von $\mathcal{B}$ folgt trivial:

Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

Folgerung: *Ist $\mathcal{F} \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{F}^*$ und $\mathcal{F}' \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{F}^*$, so ist auch $\mathcal{F} \mathrel{\widehat{=}} \mathcal{F}'$.*

Das ist Axiom 1 von Euklid: *Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.*

Satz:

1. *Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$ und $\psi(B) = C$ gibt.*

2. *Sind die Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kongruent vermöge einer Bewegung φ, so ist auf jeden Fall $\varphi(A) = C$.*

Beweis: 1) Da jede Bewegung bijektiv ist und die „zwischen"-Beziehung respektiert, ist die erste Aussage klar.

2) Wir nehmen an, es wäre $\varphi(A) \neq C$. Dann muss es ein $Y \in \overrightarrow{AB}$ mit $Y \neq A$ und $\varphi(Y) = C$ geben. Für jedes X mit $X - A - Y$ ist dann

$$\varphi(X) - \varphi(A) - \varphi(Y) = C,$$

wobei $\varphi(A) \in \overrightarrow{CD}$ und $\varphi(X)$ nicht auf dem Strahl $\overrightarrow{CD}$ liegt. Das kann aber nicht sein! ∎

Wir können nicht beweisen, dass es – wenn $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ist – eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$ gibt. Die Anschauung sagt uns jedoch, dass das der Fall sein müsste. Bei Hilbert ist die Kongruenz eine Beziehung zwischen Strecken, und da $\overline{AB} = \overline{BA}$ ist, ist auch $\overline{AB} \cong \overline{BA}$).

Es ist daher Zeit für ein weiteres Bewegungs-Axiom:

Bewegungsaxiom (B.4): Zu je zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.

Jetzt ist klar:

Ist $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D$.

Man kann in diesem Fall sogar noch mehr sagen: Die Werte von φ auf $\overline{AB}$ sind durch die Zuordnung $A \mapsto C$ und $B \mapsto D$ schon eindeutig festgelegt. Das ergibt sich aus dem nächsten Satz.

Satz über das Abtragen von Strecken: *Es sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl $\overrightarrow{OP}$ gegeben. Dann gibt es genau einen Punkt $Q \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{OQ}$.*

Beweis: 1) Existenz:

Nach Axiom (B.3) existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = O$ und $\varphi(B) \in \overrightarrow{OP}$. Setzt man $Q := \varphi(B)$, so ist $\overline{AB} \cong \overline{OQ}$.

2) Eindeutigkeit:

Seien $Q_1, Q_2 \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{OQ_1} \cong \overline{OQ_2}$.

Nach Axiom (B.4) und der anschließenden Bemerkung gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(O) = O$ und $\varphi(Q_1) = Q_2$. Nun sei $R \notin g := OP$ und $\mathscr{H}$ die durch R definierte Seite von g. Wenn R und $\varphi(R)$ auf verschiedenen Seiten von g liegen, dann ersetze man φ durch $\sigma \circ \varphi$ (wobei σ die Spiegelung an g ist). Also kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\varphi(R) \in \mathscr{H}$ ist.

Nach Axiom (B.3) gibt es genau eine Bewegung ψ mit $\psi(O) = O$, $\psi(Q_1) \in \overrightarrow{OP}$ und $\psi(R) \in \mathscr{H}$. Die Bewegung φ hat diese Eigenschaften, aber die Identität $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ hat die gleichen Eigenschaften. Also muss $\varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ sein.

Daraus folgt, dass $Q_1 = Q_2$ ist, und das bedeutet, dass es genau ein $Q \in \overrightarrow{OP}$ mit $\overline{AB} \cong \overline{OQ}$ gibt. ∎

Dieser Satz ist recht wichtig!

Auch der Vergleich von Strecken ist jetzt möglich: Sind zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben und ist $Q \in \overrightarrow{CD}$ der eindeutig bestimmte Punkt mit $\overline{AB} \cong \overline{CQ}$, so muss genau eine der drei folgenden Aussagen zutreffen:

1. $Q = D$. Dann ist $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
2. Es ist $C - Q - D$. Dann sagt man: $\overline{AB} < \overline{CD}$.
3. Es ist $C - D - Q$. Dann sagt man: $\overline{AB} > \overline{CD}$.

Das entspricht genau Euklids Vorstellung vom Vergleich zweier Strecken.

Eine andere Anwendung des neuen Axioms ist der

Satz über die Addition von Strecken: *Sei $A - B - C$ und $A' - B' - C'$. Ist $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, so ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.*

Das entspricht Euklids Axiom 2 (*Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich*) und Hilberts Axiom III-3.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$. Dann gilt aber:

$$A' - B' - \varphi(C) \quad \text{und} \quad A' - B' - C'.$$

Die Gerade $g' = A'B'$ wird durch B' in zwei Halbgeraden aufgeteilt. Dabei liegen $\varphi(C)$ und C' auf der gleichen Halbgeraden. Mit anderen Worten:

$$\text{Es ist} \quad \varphi(C) \in \overrightarrow{B'C'}.$$

Da $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ ist, muss $\varphi(C) = C'$ sein. Also ist auch $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$. ■

Definition

Seien ein Punkt $O \in \mathscr{E}$ und eine Strecke $\overline{AB}$ gegeben. Die Menge

$$\mathcal{K} := \{P \in \mathscr{E} \mid \overline{OP} \cong \overline{AB}\}$$

heißt der ***Kreis um*** O ***mit Radius*** $\overline{AB}$.

Ein Punkt $Q \in \mathscr{E}$ ***liegt im Inneren*** des Kreises, wenn $Q = O$ oder $\overline{OQ} < \overline{AB}$ ist.

Der Punkt Q liegt ***im Äußeren*** des Kreises, wenn $\overline{OQ} > \overline{AB}$ ist.

Ein ***Durchmesser*** des Kreises ist eine Strecke $\overline{XY}$ mit $X, Y \in \mathcal{K}$ und $X - O - Y$.

Unsere Definition des Kreises entspricht recht gut derjenigen von Euklid. Aber was besagt dann das Postulat III? Die Existenz eines Kreises bei gegebenem Mittelpunkt und Radius ist trivial. Anscheinend muss man Euklid doch noch etwas anders interpretieren.

Man könnte sich vorstellen, dass Euklid in seiner Definition 15 eigentlich folgendes sagen wollte:

Revidierte Version von Euklids Definition 15.

> Ein *Kreis mit Mittelpunkt* O ist eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathscr{E}$ mit folgenden Eigenschaften:
>
> 1. Auf jedem von O ausgehenden Strahl liegt genau ein Punkt von $\mathcal{K}$.
> 2. Für je zwei Punkte $A, B \in \mathcal{K}$ ist $\overline{OA} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OB}$.

Bei dieser Formulierung ist die Existenz des Kreises nicht mehr selbstverständlich, aber es sind die typischen Eigenschaften einbezogen. In Wirklichkeit versteht Euklid zwar unter einem „Kreis“ die Kreisfläche, er braucht aber zur Abgrenzung dieser Fläche die berandende Linie. Deshalb benutzen wir hier die moderne Sprechweise, nach der ein „Kreis“ der Rand einer Kreisfläche ist. Auch Euklids Definition 17 (des „Durchmessers“) bekommt nun einen Sinn: Jede durch O gehende Gerade besteht aus zwei verschiedenen von O ausgehenden Strahlen. Und wenn ein Kreis $\mathcal{K}$ um O gegeben ist, dann müssen die beiden Strahlen den Kreis in Punkten A und B treffen, für die gilt: $A - O - B$. Die Strecke $\overline{AB}$ nennt man dann einen ***Durchmesser*** von $\mathcal{K}$.

Euklid kann mit Hilfe seines Postulats III den Satz über das Abtragen von Strecken beweisen, wobei er aber weitere unbewiesene Annahmen benutzt. Bei uns folgt nun umgekehrt mit dem Satz über das Abtragen von Strecken die Existenz des Kreises (und damit Euklids Postulat III) als nicht-leere Menge.

Ist g eine Gerade durch O, so teilt sie den Rest der Ebene in zwei Halbebenen $\mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}_+$. Die beiden Figuren $\mathcal{K}_- := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_-$ und $\mathcal{K}_+ := \mathcal{K} \cap \mathcal{H}_+$ nennt man die durch g bestimmten ***Halbkreise***. Ist φ die Spiegelung an g und $P \in \mathcal{K}_+$, so liegt $\varphi(P)$ in der Halbebene $\mathcal{H}_-$, und es ist $\overline{O\varphi(P)} = \overline{\varphi(O)\varphi(P)} \mathrel{\widehat{=}} \overline{OP}$. Also bildet φ die Halbkreise aufeinander ab, sie sind zueinander kongruent.

Wir wollen nun die Kongruenz von Winkeln näher untersuchen!

> **Satz:** *Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$ oder eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = D$, $\psi(B) \in \overrightarrow{DF}$ und $\psi(C) \in \overrightarrow{DE}$ gibt.*

Beweis: Die eine Richtung ist trivial, wir zeigen nur „ $\Longrightarrow$ “.

Sei $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \beta$, vermöge einer Bewegung φ. Wir nehmen an, es sei $\varphi(A) \neq D$. Dann gibt es (o.B.d.A.) ein $X \in \overrightarrow{AB}$ mit $X \neq A$ und $\varphi(X) = D$. (Der Fall $X \in \overrightarrow{AC}$ wird analog behandelt)

Wir wählen ein Q mit $A - X - Q$. Dann gehört auch Q zu $\overrightarrow{AB}$, und es ist

$$\varphi(A) - \varphi(X) - \varphi(Q), \text{ also } \varphi(A) - D - \varphi(Q).$$

Also liegen $\varphi(A)$ und $\varphi(Q)$ weder beide in $\overrightarrow{DE}$ noch beide in $\overrightarrow{DF}$. Aber sie liegen beide auf einer Geraden durch D. Das ist nicht möglich!

Wir wissen somit, dass $\varphi(A) = D$ sein muss. Liegt $\varphi(B)$ in $\overrightarrow{DE}$, so muss $\varphi(C)$ in $\overrightarrow{DF}$ liegen, und umgekehrt. ∎

Die Situation ist so ähnlich wie bei der Kongruenz von Strecken. Um zeigen zu können, dass es ein φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$ gibt, brauchen wir noch ein weiteres Bewegungsaxiom:

Bewegungsaxiom (B.5): Zu jedem Winkel $\alpha = \angle BAC$ gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}$.

Damit ist die Liste der Bewegungsaxiome vollständig!

Satz: *Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sich ihre Ecken so mit A, B, C bzw. A', B', C' bezeichnen lassen, dass es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$ gibt.*

Einander entsprechende Seiten und Winkel sind dann automatisch zueinander kongruent.

Beweis: Wenn es die Bewegung φ mit der genannten Eigenschaft gibt, ist klar, dass die Dreiecke kongruent sind.

Umgekehrt seien die beiden Dreiecke kongruent. Dann gibt es eine Bewegung φ, die die Dreiecke (also die Vereinigungen ihrer Seiten) aufeinander abbildet. φ bildet dann z.B. die Gerade AB auf eine Gerade g_1 und die Gerade AC auf eine Gerade g_2 ab, sowie den Schnittpunkt A auf den Schnittpunkt von g_1 und g_2. Nach geeigneter Bezeichnung der Ecken des Bilddreiecks folgt die Behauptung. ∎

Satz (SWS, Euklids Proposition 4): *Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

Beweis: Weil $\alpha = \angle BAC$ und $\alpha' = \angle B'A'C'$ kongruent sind, gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ und $\varphi(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$. Weil $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ und $\overline{AB} \cong \overline{A'\varphi(B)}$ ist, folgt mit dem Satz über das Abtragen von Strecken, dass $\varphi(B) = B'$ ist, und analog sieht man, dass $\varphi(C) = C'$ ist. ∎

> ### Definition
> Ein Dreieck ABC heißt ***gleichschenklig***, wenn $\overline{AC} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BC}$ ist. Die Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle ABC$ nennt man die ***Basiswinkel*** des Dreiecks.

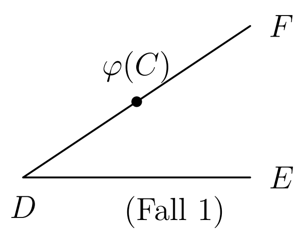
> **Folgerung (Euklids Proposition 5, „pons asinorum“)** *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent.*

Der Beweis kann nun nach Pappus geführt werden.

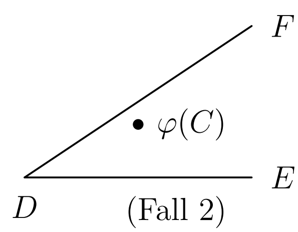
Wir betrachten noch den Vergleich von Winkeln:

Es seien zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle EDF$ gegeben. Dann gibt es eine (eindeutig bestimmte) Bewegung φ mit $\varphi(A) = D$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{DE}$ und $\varphi(C) \in H(DE, F)$. Drei Fälle sind möglich:

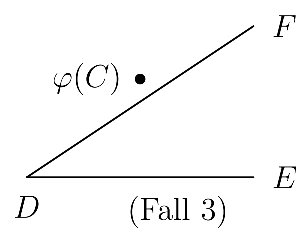
1. Ist $\varphi(C) \in \overrightarrow{DF}$, so ist $\alpha \mathrel{\widehat{=}} \beta$.
2. Liegt $\varphi(C)$ in $H(DF, E)$, also in $I(\beta)$, so sagen wir: $\alpha < \beta$.
3. Liegen $\varphi(C)$ und E auf verschiedenen Seiten von DF, so liegt $\varphi(C)$ in $A(\beta)$, und wir sagen: $\alpha > \beta$.



(Fall 1)



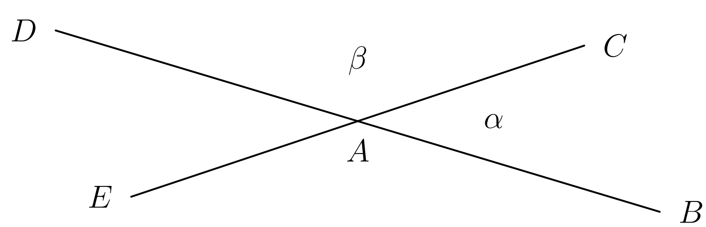
(Fall 2)



(Fall 3)

Es ist klar, dass sich die drei Möglichkeiten gegenseitig ausschließen.

> ### Definition
> Zwei Winkel $\alpha = \angle BAC$ und $\beta = \angle CAD$ mit $C \notin DB$ und der Eigenschaft $D - A - B$ heißen ***Nebenwinkel***. Ist $E \notin DB$ ein weiterer Punkt mit $E - A - C$, so nennt man die Winkel $\angle BAC$ und $\angle DAE$ ***Scheitelwinkel***.



> ### Definition
> Ein ***rechter Winkel*** ist ein Winkel, der zu einem seiner Nebenwinkel kongruent ist.

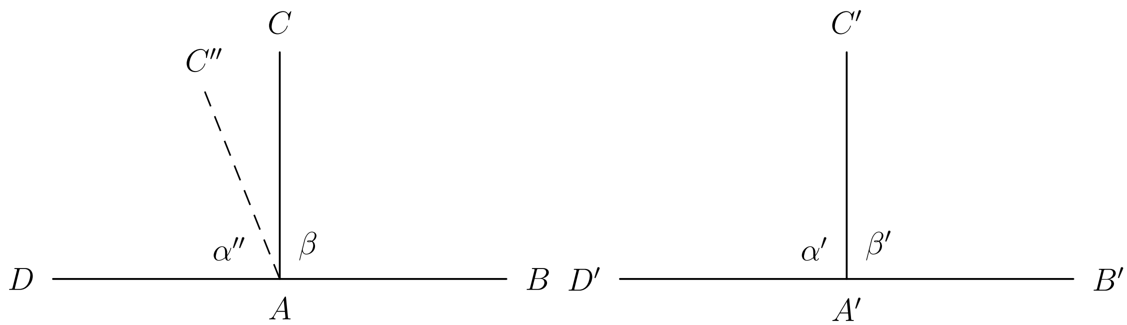
Wir können leicht rechte Winkel erzeugen:

Satz: *Sei g eine Gerade, φ die Spiegelung an g und $X \in \mathcal{E} \setminus g$. Weiter sei A der (eindeutig bestimmte) Punkt in $\overline{X\varphi(X)} \cap g$. Sind $B, D \in g$ mit $D - A - B$, so ist $\angle BAX$ ein rechter Winkel.*

Beweis: Vermöge φ ist ABX kongruent zu $AB\varphi(X)$, also $\angle BAX \cong \angle BA\varphi(X)$. Kongruente Nebenwinkel sind Rechte Winkel. ∎

Satz: *Je zwei rechte Winkel sind kongruent.*

Beweis: Wir betrachten zwei Paare von Nebenwinkeln (α, β) und (α', β'), mit $\alpha \cong \beta$ und $\alpha' \cong \beta'$.



Wir nehmen an, α sei nicht kongruent zu α'. O.B.d.A. sei $\alpha' < \alpha$. Dann gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A') = A$, $\varphi(\overrightarrow{A'D'}) = \overrightarrow{AD}$ und $C'' := \varphi(C') \in I(\alpha)$. Sei $\alpha'' = \angle DAC'' = \varphi(\angle D'A'C')$ und $\varepsilon := \angle C''AB$ der Nebenwinkel zu α''.

Es ist $\beta < \varepsilon$ (da $C \in I(\varepsilon)$) und $\beta \cong \alpha$, also auch $\alpha < \varepsilon$. Mit $\alpha' < \alpha$ und $\alpha'' \cong \alpha'$ ist andererseits $\alpha'' < \alpha$. Zusammen ergibt das die Beziehung $\alpha'' < \varepsilon$.

Weil $\alpha' \cong \alpha''$ und β' Nebenwinkel zu α' ist, folgt: $\beta' \cong \varepsilon$. Es ist aber auch $\beta' \cong \alpha'$, und damit $\alpha'' \cong \alpha' \cong \varepsilon$. Das steht im Widerspruch zur Aussage $\alpha'' < \varepsilon$. ∎

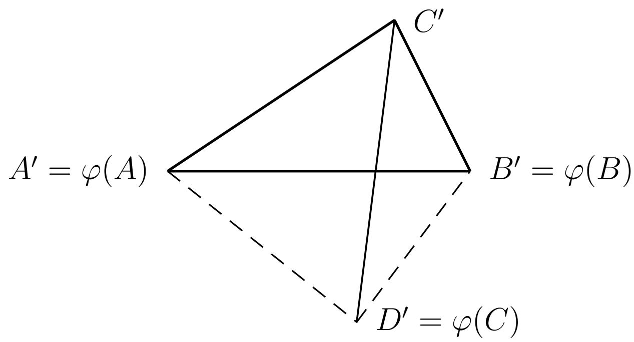
Euklids Postulat IV kann also als Satz bewiesen werden. Der Beweis geht auf Hilbert zurück. Nun sind wir auch in der Lage, den rechten Winkel als universelles Winkelmaß zu benutzen.

Spitze Winkel und ***stumpfe Winkel*** definiert man dann wie üblich.

Satz (SSS, Euklids Proposition 8): *Es seien zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, mit $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$.*

Dann sind die beiden Dreiecke kongruent.

Beweis: Sei φ die eindeutig bestimmte Bewegung, die A auf A' abbildet, B auf einen Punkt von $\overrightarrow{A'B'}$ und C so, dass $D' := \varphi(C)$ und C' auf verschiedenen Seiten der Geraden $A'B'$ liegen. Da $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ ist, muss $\varphi(B) = B'$ sein.



Da $\overline{B'D'} \;\widehat{=}\; \overline{BC} \;\widehat{=}\; \overline{B'C'}$ ist, ist $C'D'B'$ gleichschenklig, und die Basiswinkel $\angle C'D'B'$ und $\angle D'C'B'$ sind kongruent. Genauso folgt auch, dass $\angle D'C'A'$ und $\angle C'D'A'$ kongruent sind. Mit Winkeladdition (oder -Subtraktion, je nach Gestalt der Dreiecke) erhält man:

$$\angle A'C'B' \;\widehat{=}\; \angle A'D'B'.$$

Mit dem SWS-Kongruenzsatz folgt: $A'B'C' \;\widehat{=}\; A'B'D' \;\widehat{=}\; ABC$. ■

Wie sieht es nun mit der Gültigkeit der Bewegungsaxiome im Modell $\mathbb{R}^2$ aus? Es ist klar, dass man als Gruppe der Bewegungen die Gruppe der Isometrien zu wählen hat, die sich aus Translationen und orthogonalen Transformationen zusammensetzt. Insbesondere gibt es die Spiegelung $S(x, y) = (x, -y)$, und Drehungen

$$(x, y) \mapsto (x, y) \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Drehmatrix hat die Gestalt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Ist $C = (a, b) \neq (0, 0)$, so definiert

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{ax}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{by}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bx}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ay}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

eine Drehung um den Nullpunkt $O := (0, 0)$, die $E := (1, 0)$ auf einen Punkt $P \in \overrightarrow{OC}$ abbildet.

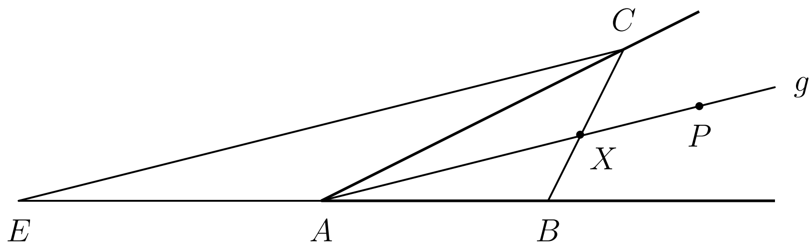
Da $\sqrt{a^2 + b^2} = b\sqrt{1 + (\frac{a}{b})^2}$ ist, spielt sich alles im Körper der pythagoräischen Zahlen ab. Deshalb gelten die Bewegungs-Axiome auch in der pythagoräischen Ebene $\mathscr{E}_p$.

Wir wollen noch die Lage eines Punktes relativ zu einem Winkel untersuchen:

Querbalken-Theorem: *Gegeben sei ein Winkel $\alpha := \angle BAC$. Dann gilt:*

$$P \in I(\alpha) \iff \exists\, X \in \overrightarrow{AP} \text{ mit } B - X - C\,.$$

Beweis: Sei $P \in I(\alpha)$.



Man wähle einen Punkt E mit $E - A - B$. Die Gerade $g = AP$ trifft die Seite $\overline{EB}$ des Dreiecks EBC im Punkt A. Liegt B auf g, so ist $g = AB$. Aber das kann wegen $P \in I(\alpha)$ nicht sein. Und analog folgert man, dass auch C nicht auf g liegen kann. Schließlich kann auch E nicht auf g liegen, denn dann wäre $g = AE = AB$. Nach Pasch muss g noch eine Seite des Dreiecks EBC treffen.

Wir nehmen an, dass g die Seite $\overline{EC}$ in einem Punkt Y trifft. Mit P liegen auch alle Punkte $X \neq A$ von $\overrightarrow{AP}$ in $\mathscr{H}(AB, C) \cap \mathscr{H}(AC, B)$. Weil E und B auf verschiedenen Seiten von AC liegen, liegen auch Y und P auf verschiedenen Seiten von AC. Es muss also $Y - A - P$ gelten. Daraus folgt, dass Y nicht in $H(AB, C)$ liegt. Das ist aber ein Widerspruch! Also trifft g die Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt X, es ist $B - X - C$.

Umgekehrt sei die Beziehung $B - X - C$ vorausgesetzt. Dann liegt X in $H(AB, C) \cap H(AC, B)$, also in $I(\alpha)$. ∎

Man beachte aber: Ist $P \in I(\alpha)$, so braucht es keine Punkte $B' \in \overrightarrow{AB}$ und $C' \in \overrightarrow{AC}$ zu geben, so dass $P \in \overline{B'C'}$ liegt.

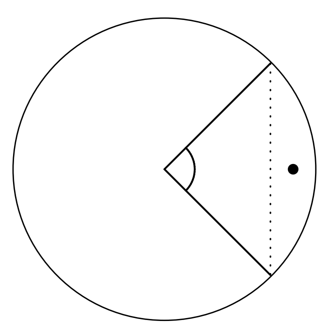
Um das zu belegen, betrachten wir folgendes Modell: Als Ebene benutze man die Menge

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

also das Innere des Einheitskreises. Und als Geraden nehme man einfach diejenigen Abschnitte von gewöhnlichen Geraden im $\mathbb{R}^2$, die innerhalb von $\mathcal{D}$ liegen.

Dann ist sofort klar, dass die Inzidenz-Axiome gelten, und man sieht leicht, dass auch die Anordnungsaxiome erfüllt sind.

Es gibt jedoch bei diesem Modell Punkte im Innern eines Winkels, die nicht auf einer Sehne liegen.



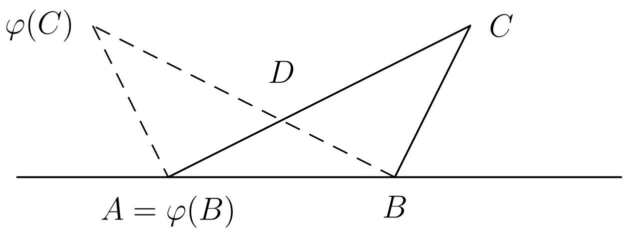
Euklid beweist in Proposition 1 die Existenz eines gleichseitigen Dreiecks über einer gegebenen Strecke. Er benutzt dafür eine Eigenschaft von Kreisen, die uns hier nicht zur Verfügung steht, und er verwendet dieses Hilfsmittel für zahlreiche Konstruktionen und Beweise (zum Beispiel zur Konstruktion von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten). Uns fehlt dieser Satz, aber wir können zeigen:

Satz über die Existenz gleichschenkliger Dreiecke: *Zu Punkten $A \neq B$ gibt es ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis $\overline{AB}$.*

Beweis: Sei $C \notin AB$. Ist $\angle BAC \mathrel{\widehat{=}} \angle ABC$, so ist man fertig. Wir nehmen daher an, dass $\angle BAC < \angle ABC$ ist. Es gibt nun eine Bewegung φ, so dass $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) \in \overrightarrow{BA}$ und $\varphi(C) \in \mathscr{H}(AB, C)$ ist.

Dann ist $\overline{B\varphi(B)} \mathrel{\widehat{=}} \overline{AB} \mathrel{\widehat{=}} \overline{BA}$, also $\varphi(B) = A$. Außerdem ist $\angle AB\varphi(C) = \angle BAC < \angle ABC$, also $\varphi(C) \in I(\angle ABC)$. Nach dem Querbalken-Theorem trifft die Gerade $B\varphi(C)$ die Strecke $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt D.

Weil φ den Winkel $\angle BAC$ auf den Winkel $\angle AB\varphi(C)$ abbildet, ist ABD gleichschenklig.



Dabei braucht man noch **Proposition 6**, die Umkehrung zum Pons-Asinorum-Satz („Ein Dreieck mit gleichen Basiswinkeln ist gleichschenklig"), aber der kann ganz leicht durch Widerspruch bewiesen werden:

Ist ABC ein Dreieck mit gleichen Basiswinkeln, aber $\overline{AC} > \overline{BC}$, so trage man $\overline{BC}$ bei A auf $\overrightarrow{AC}$ an, mit Endpunkt D. Dann ist $ABC \mathrel{\widehat{=}} ABD$, nach SWS, weil $\overline{AB}$ in beiden Dreiecken vorkommt, $\overline{AD} = \overline{BC}$ und $\angle BAD = \angle ABC$ ist. Aber das kann nicht sein, weil $\angle ABD < \angle ABC = \angle BAC$ ist. ∎

Bemerkung: Der obige Beweis benötigt tatsächlich keine Kreise, aber er hilft auch nur bei Beweisen, nicht bei der Suche nach Algorithmen zur geometrischen Konstruktion. es fehlen die Instrumente dafür (Zirkel und Lineal).

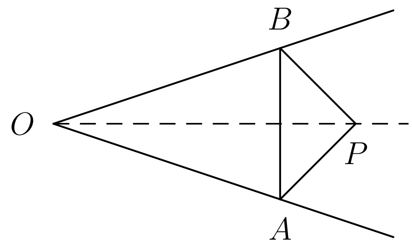
Euklids **Propositionen 2 und 3** befassen sich mit dem Antragen von Strecken und sind nun überflüssig geworden, dank der Bewegungsaxiome. Euklids Methode liefert liefert allerdings ein Konstruktionsverfahren, wir haben nur die Existenz des Endpunktes der angetragenen Strecke.

Euklids **Proposition 4** (SWS-Kongruenz) und **5** (Pons asinorum) haben wir bereits bewiesen.

Satz (Eulids Proposition 9, „Winkelhalbierung"):

Zu einem gegebenen Winkel $\alpha = \angle AOB$ kann man genau einen Strahl $\vec{s} = \overrightarrow{OP}$ mit $P \in I(\alpha)$ finden, so dass $\angle AOP \mathrel{\widehat{=}} \angle POB$ ist.

Beweis: O.B.d.A. sei $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.



Es gibt einen Punkt P, auf der zu O entgegengesetzten Seite von AB, so dass BAP gleichschenklig ist. Nach dem Satz von der SSS-Kongruenz sind dann die Dreiecke OPB und OPA kongruent, und damit auch die einander entsprechenden Winkel $\angle POB$ und $\angle POA$.

Wäre P nicht in $I(\alpha)$, so wäre $\angle POB < \angle POA$ oder umgekehrt. Das kann nicht sein.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit nimmt man die Existenz zweier Strahlen der gewünschten Art an und führt dann durch Vergleich aller auftretenden Winkel einen Widerspruch herbei. ∎

Satz (Euklids Proposition 10, „Streckenhalbierung“):

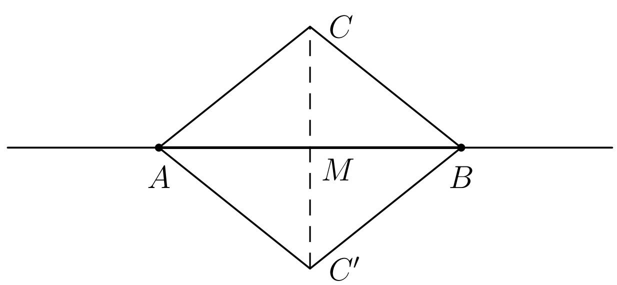
Zu zwei Punkten $A \neq B$ gibt es genau einen Punkt M mit

$$A - M - B \quad \text{und} \quad \overline{AM} \cong \overline{MB}.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt auch hier sehr einfach durch Streckenvergleiche.

Zum Nachweis der Existenz des Punktes M konstruieren wir auf beiden Seiten von AB gleichschenklige Dreiecke ABC und ABC'. Da C und C' auf verschiedenen Seiten von AB liegen, muss die Verbindungsstrecke $\overline{CC'}$ die Gerade AB in einem Punkt M treffen.

Aus dem Satz von der SSS-Kongruenz folgt, dass $CC'B \cong C'CA$ ist, insbesondere auch $\angle C'CA \cong \angle C'CB$.



Aus dem Satz von der SWS-Kongruenz folgt, dass $AMC \cong MBC$ ist, und insbesondere $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

Wäre $M - A - B$, so wäre $\overline{MA} < \overline{MB}$, und genauso führt man die Beziehung $A - B - M$ zum Widerspruch. Also muss $A - M - B$ gelten. ■

Satz (Euklids Proposition 11, „Senkrechte errichten"):

Ist g eine Gerade und $O \in g$, so kann man auf eindeutige Weise in O die Senkrechte zu g errichten.

Beweis: Man konstruiere Punkte $A, B \in g$ mit $A - O - B$ und $\overline{AO} \cong \overline{OB}$. Dann errichte man über $\overline{AB}$ ein gleichschenkliges Dreieck ABP und setze $h := OP$. Weil $AOP \cong OBP$ ist (SSS), muss auch $\angle AOP \cong \angle BOP$ sein.

Die Eindeutigkeit ergibt sich wie im Beweis der Kongruenz aller rechten Winkel. ■

Definition

Ist M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und h die Senkrechte zu AB in M, so nennt man h auch die ***Mittelsenkrechte*** zu $\overline{AB}$.

Mit Hilfe der Kongruenzsätze kann man leicht zeigen: Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist die Menge

$$\{X \in \mathscr{E} \mid \overline{AX} \cong \overline{BX}\}.$$

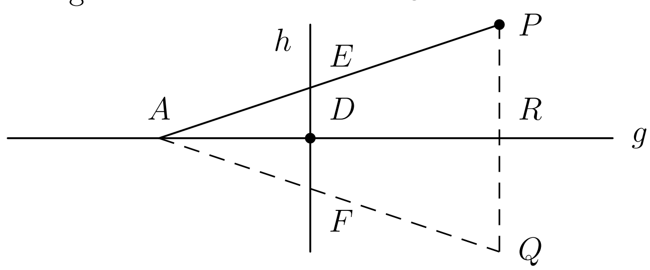
Satz (Euklids Proposition 12, „Lot fällen"): *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt, so kann man von P aus ein Lot auf g fällen.*

Beweis: Euklid verwendet zum Beweis eine weitere Eigenschaft des Kreises, die er nie gezeigt hat: *Eine Gerade durch einen inneren Punkt eines Kreises schneidet diesen Kreis auf beiden Seiten des Punktes.*

Wir müssen hier einen anderen Beweis finden.

Wir wählen einen Punkt D auf g und errichten dort die Senkrechte h zu g. Liegt zufällig P auf h, so sind wir fertig.

Sei also $P \notin h$. Wir wählen einen Punkt $A \in g$, so dass A und P auf verschiedenen Seiten von h liegen. Dann trifft $\overline{AP}$ die Gerade h in einem Punkt E.



Wir suchen den Punkt $F \in h$ mit $E - D - F$ und $\overline{DE} \cong \overline{DF}$. Anschließend verlängern wir $\overline{AF}$ über F hinaus bis zu einem Punkt Q, so dass $\overline{AQ} \cong \overline{AP}$ ist.

Behauptung: PQ ist das gesuchte Lot.

Beweis dafür: Da P und Q auf verschiedenen Seiten von g liegen, schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$ in einem Punkt R. Da die Dreiecke ADE und ADF kongruent sind (SWS), ist $\angle RAP \mathrel{\widehat{=}} \angle RAQ$. Daraus folgt, dass auch $ARP \mathrel{\widehat{=}} ARQ$ ist. Insbesondere ist dann $\angle ARP \mathrel{\widehat{=}} \angle ARQ$, also PQ senkrecht zu g.

Dieser Beweis stammt von Hilbert. Es geht aber noch einfacher: Ist φ die Spiegelung an der Geraden g (deren Existenz wir schon nachgewiesen haben), so wissen wir, dass die Gerade $P\varphi(P)$ die Gerade g unter einem rechten Winkel schneidet, also das gesuchte Lot ist. Da Hilbert keine Bewegungen benutzte, stand ihm die Spiegelung nicht so einfach zur Verfügung. ■

Der nächste wichtige Satz bei Euklid ist der

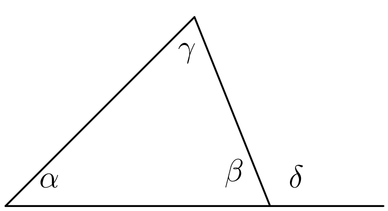
Satz (Euklids Proposition 16, „Außenwinkelsatz):

Bei jedem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Der Beweis kann so wie bei Euklid geführt werden.

Satz (Euklids Proposition 17):

In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte.



Beweis: Nach dem Außenwinkelsatz ist $\delta > \alpha$. Trägt man also α neben β an, so ragt der freie Schenkel des angetragenen Winkels ins Innere von δ. In salopper Schreibweise kann man dafür sagen: $\alpha + \beta < \beta + \delta$. Aber $\beta + \delta$ entspricht zwei Rechten.

Bei den anderen Winkeln geht's genauso. ■

Folgerung: *Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.*

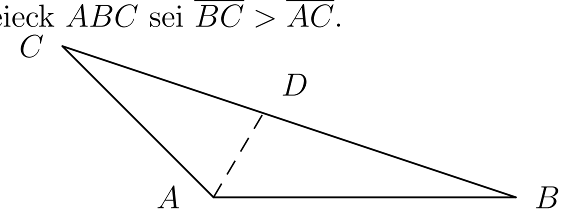
Folgerung: *Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade, die den Punkt nicht enthält, ist immer eindeutig bestimmt.*

Definition

Ein ***rechtwinkliges Dreieck*** ist ein Dreieck mit einem rechten Winkel. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt ***Hypotenuse***, die beiden anderen Seiten nennt man ***Katheten***.

Satz (Euklids Proposition 18): *In einem Dreieck liegt der größeren Seite stets der größere Winkel gegenüber.*

Beweis: Im Dreieck ABC sei $\overline{BC} > \overline{AC}$.



Sei $C - D - B$, mit $\overline{CD} \hat{=} \overline{CA}$. Nach dem Außenwinkelsatz ist $\angle CDA > \angle CBA$. Aber da CAD gleichschenklig ist, ist $\angle CAD \hat{=} \angle CDA$. Erst recht ist dann $\angle CAB > \angle CBA$. ∎

Satz (Euklids Proposition 19): *In einem Dreieck liegt dem größeren Winkel stets die größere Seite gegenüber.*

Beweis: Wir betrachten das Dreieck ABC, es sei $\angle CAB > \angle CBA$. Wäre $\overline{CA} \hat{=} \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zum Basiswinkelsatz. Wäre $\overline{CA} > \overline{CB}$, so wäre das ein Widerspruch zu Proposition 18. ∎

Folgerung: *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse stets die größte Seite.*