Korrektur zur Anwendung des Pasch-Axioms

In der Vorlesung habe ich kühn folgendermaßen argumentiert:

Gilt $A - B - C$ und ist $X \in \overline{AC}$, so muss X zu $\overline{AB}$ oder zu $\overline{BC}$ gehören. Anders kann es ja gar nicht sein, oder? Anschaulich ist das klar, aber Anschauung gilt nicht! Und der Beweis erweist sich als nicht so einfach. Man braucht einen technischen Hilfssatz, von dem ich dachte, ich könnte ihn weglassen, weil er etwas langwierig zum Vorführen an der Tafel ist.

Vorausgesetzt werden die Inzidenz- und die Anordnungs-Axiome inklusive Pasch-Axiom.

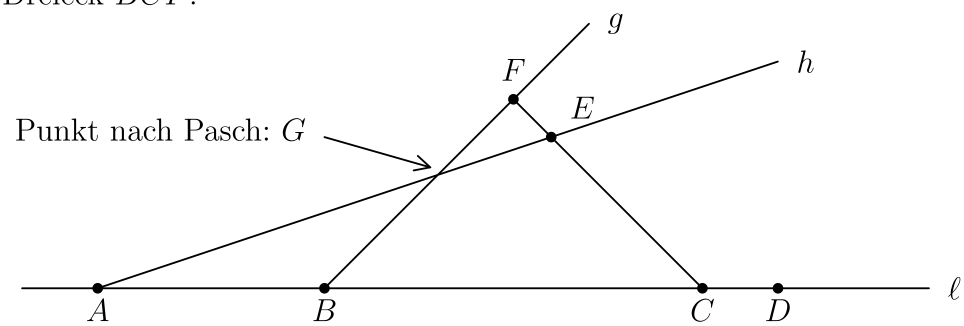
Satz von der 4-er-Relation:
Gilt $A - B - C$ und $B - C - D$, so gilt auch $A - C - D$ und $A - B - D$.

Beweis: Die Punkte A, B, C und D liegen alle auf einer Geraden ℓ, das folgt aus den „Zwischen"-Beziehungen.

1) Nach Axiom I.3 gibt es einen Punkt E außerhalb der Geraden ℓ, und nach Axiom A.4 gibt es einen Punkt F mit $C - E - F$.

2) Wenn F auf ℓ läge, so hätten ℓ und die Gerade FC zwei Punkte gemeinsam, müssten also übereinstimmen. Das kann nicht sein, weil E nicht auf ℓ liegt. Also ist auch $F \notin \ell$.

3) Verbindet man A mit E, so erhält man die Gerade $h := AE$ und das Dreieck ACE. Verbindet man außerdem B mit F, so erhält man die Gerade $g := BF$ und das Dreieck BCF.



4) Im Dreieck ACE schneidet $g = BF$ die Seite $\overline{AC}$ (wegen $A - B - C$ im Punkt B), trifft aber keine der Ecken. Läge nämlich A oder C auf g, so wäre (wegen $B \in g$) $g = \ell$, was nicht sein kann. Und läge E auf g, so wäre $g = CF$ und wieder $g = \ell$.

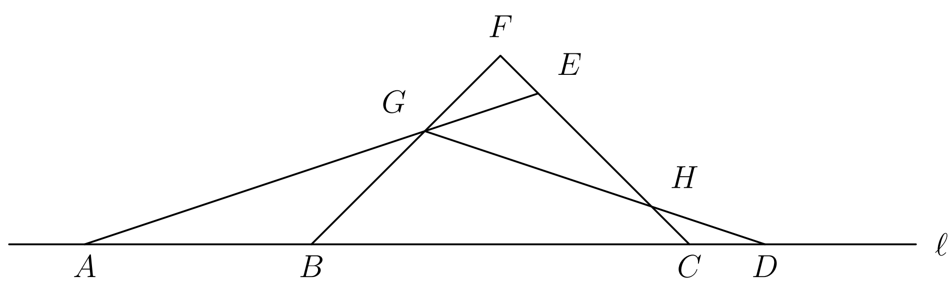
Nun kann man das Pasch-Axiom A.5 anwenden: g muss noch eine weitere Seite von ACE treffen, also $\overline{AE}$ oder $\overline{EC}$. Würde g die Seite $\overline{EC}$ treffen, so hätten BF und CF zwei Punkte gemeinsam und wären gleich. Da das nicht sein kann, trifft g die Seite $\overline{AE}$ in einem Punkt G. Dann gilt $A - G - E$.

5) Die Gerade $h = AE$ trifft keine der Ecken des Dreiecks BCF (man argumentiert wie in (4)). Da h die Seite $\overline{CF}$ dieses Dreiecks trifft, aber die Seite $\overline{BC}$ nicht treffen kann (weil dann $h = \ell$ wäre), muss h nach Pasch noch die Seite $\overline{BF}$ treffen. Weil $G \in h \cap BF$ und $h \neq BF$ ist, folgt, dass $B - G - F$ gilt.

6) Nun betrachten wir die Gerade $m := GD$ und das Dreieck BCF. Weil m die Seite $\overline{BF}$ (in G) schneidet und $B - G - F$ gilt, liegen B und F nicht auf m. Der Punkt C kann auch nicht auf m liegen, sonst wäre $m = \ell$ und $G \in \ell$, was nicht sein kann. Also muss m nach Pasch noch eine weitere Seite des Dreiecks BCF treffen. Die Seite $\overline{BC}$ kann es nicht sein, denn dann hätten m und ℓ zwei Punkte gemeinsam. Also trifft m die Seite $\overline{CF}$ in einem Punkt H. Dann gilt $C - H - F$.

7) Die Gerade CF trifft die Seite $\overline{BD}$ des Dreiecks BDG im Punkt C (wegen der Voraussetzung $B-C-D$). Die Punkte B, D und G liegen nicht auf CF. Bei B und D ist das wieder klar, weil sonst $CF = \ell$ wäre. Läge G auf CF, so wäre $CF = BF$ und damit $CF = \ell$. Wieder einmal kann man Pasch bemühen und erhält, dass CF eine der Seiten $\overline{BG}$ oder $\overline{DG}$ trifft. CF kann $\overline{BG}$ aber nicht treffen, denn sonst wäre $CF = BF$ und damit $CF = \ell$. Also trifft CF die Seite $\overline{DG}$. Weil H der einzige Schnittpunkt von CF und DG ist, folgt die Beziehung $G - H - D$.

8) Im Dreieck ADG trifft CF die Seite $\overline{DG}$ im Punkt H. Die Punkte A, D und G liegen nicht auf CF, das ist für D und G schon bekannt und folgt für A wie in (7) für B. Wegen $A - G - E$ (siehe (4)) liegt E nicht auf $\overline{AG}$. Weil E der einzige gemeinsame Punkt von CF und AE ist, kann CF die Seite $\overline{AG}$ nicht treffen. Also muss CF nach Pasch die Seite $\overline{AD}$ treffen, und das kann nur bei C passieren. Also gilt $A - C - D$.



9) Wir haben gezeigt: Aus den Beziehungen $A - B - C$ und $B - C - D$ folgt die Beziehung $A - C - D$.

Gilt aber $A - B - C$ und $B - C - D$, so so gilt auch $D - C - B$ und $C - B - A$, und daraus folgt dann $D - B - A$, also $A - B - D$. ∎

Jetzt kann man den fehlenden Satz beweisen:

Satz: *Es gelte $A - B - C$. Dann folgt für jeden Punkt $X \in AC$:*

$$X \in \overline{AC} \iff X \text{ liegt in } \overline{AB} \text{ oder in } \overline{BC}.$$

Beweis: Sei $X \in \overline{AC}$ gegeben. Ist $X = A$ oder $X = C$, so ist nichts weiter zu zeigen.

Es gelte also $A - X - C$. Für die Lage der Punkte A, B und X zueinander gibt es drei Möglichkeiten:

1) Gilt $A - X - B$, so liegt X in $\overline{AB}$.

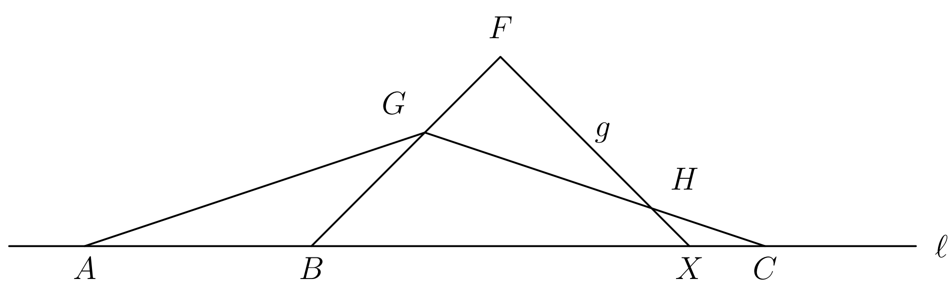
2) Gilt $X - A - B$, so gilt auch $B - A - X$. Zusammen mit $C - B - A$ ergibt das nach dem Satz von der 4-er-Relation die Beziehung $C - A - X$. Das ist aber ein Widerspruch zu der Relation $A - X - C$.

3) Es gelte $A - B - X$.

a) Man wähle einen Punkt G außerhalb $\ell := AC$ und einen Punkt F mit $B - G - F$.

b) Die Gerade $g := FX$ trifft im Dreieck ABG **nicht** $\overline{AB}$ (wegen $A - B - X$) und **nicht** $\overline{BG}$ (sonst wäre $BF = FX$ und damit $g = \ell$). Also kann g im Dreieck ABG nach Pasch auch die Seite $\overline{AG}$ **nicht** treffen.

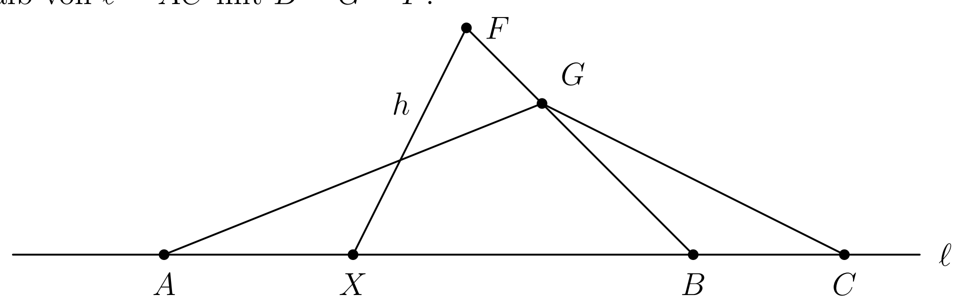
c) Im Dreieck ACG trifft g die Seite $\overline{AC}$ im Punkt X (wegen $A - X - C$), aber nicht $\overline{AG}$, muss nach Pasch also noch die Seite $\overline{CG}$ in einem Punkt H treffen.



d) Im Dreieck BCG trifft g die Seite $\overline{CG}$ in H, nicht aber die Seite $\overline{BG}$ (denn es ist $B - G - F$). Also muss g noch die Seite $\overline{BC}$ treffen, und das kann nur in X passieren. Demnach gilt $B - X - C$, also $X \in \overline{BC}$.

Nun zur umgekehrten Richtung:

Es gelte $A - B - C$, und außerdem sei $X \in \overline{AB}$. Wieder wähle man Punkte G, F außerhalb von $\ell = AC$ mit $B - G - F$.



Im Dreieck ABG trifft $h := FX$ die Seite $\overline{AB}$ im Punkt X, aber nicht die Seite $\overline{BG}$, muss also auch noch $\overline{AG}$ in einem Punkt H treffen. Dann gilt $A - H - G$.

Im Dreieck ACG trifft h die Seite $\overline{AG}$, nicht aber $\overline{CG}$. Also muss h noch $\overline{AC}$ treffen, und dafür kommt nur der Punkt X in Frage. Also gilt $A - X - C$.

Wenn X in $\overline{BC}$ liegt, argumentiert man analog. ∎

Jetzt kann man wie in der Vorlesung fortfahren.

Satz *Sei ℓ eine Gerade, A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf ℓ liegen und $\overline{AB} \cap \ell = \varnothing$. Dann gilt*

1. *Ist $\overline{BC} \cap \ell = \varnothing$, so ist auch $\overline{AC} \cap \ell = \varnothing$.*
2. *Ist $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$, so ist auch $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$.*

Beweis: Man muss zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: A, B und C liegen auf einer Geraden. Dann muss einer der Punkte zwischen den beiden anderen liegen.

a) Es gelte $A - B - C$. Aufgrund des vorigen Satzes sind die beiden Aussagen (1) und (2) trivial.

b) Gilt $A - C - B$ und $\overline{AB} \cap \ell = \varnothing$, so muss auch $\overline{BC} \cap \ell = \varnothing$ und $\overline{AC} \cap \ell = \varnothing$ gelten. Das ergibt (1), und (2) ist gegenstandslos.

c) Es gelte $B - A - C$. Ist $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$, so ist erst recht $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$, und per Kontraposition gilt (1). Ist $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$, so ist entweder $\overline{AB} \cap \ell \neq \varnothing$ (aber das kann nicht zutreffen), oder es ist $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$, und das will man zeigen.

2. Fall: A, B und C sind nicht kollinear. Dann bilden die Punkte ein Dreieck, und ℓ trifft keine der drei Ecken. Nach Pasch trifft ℓ dann keine der Seiten oder mindestens zwei. Daraus folgen (1) und (2) sofort. ∎