2.4 Inzidenz, Anordnung und Pasch-Axiom

Wir haben davon gesprochen, wo bei Euklid große Ungenauigkeiten liegen. 1863 äußerte Gauß bereits: „Es müssen solche Worte wie 'zwischen' auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.“

Der Mann, der das leistete, war Moritz Pasch (1843 - 1930). Er wurde in Breslau geboren, studierte in Berlin und lehrte später in Giessen. Zunächst arbeitete er über Algebraische Geometrie, später wandte er sich den Grundlagen der Geometrie zu, einem bis dahin kaum existenten Gebiet. Er stellte erstmals deutlich fest, dass jede axiomatische Theorie mit primitiven Termen beginnen muss. In der Geometrie entdeckte er zahlreiche Lücken bei Euklid, die darauf beruhten, dass unzulässige Annahmen über die Lage der Punkte zueinander gemacht wurden. Das führte zu den sogenannten „Anordnungsaxiomen“, die u.a. sicherstellen, dass eine Gerade die Ebene in zwei disjunkte Teile zerlegt. 1882 veröffentlichte Pasch seine „Vorlesungen über neuere Geometrie“.

Pasch hat sicherlich David Hilbert maßgeblich beeinflusst, der ab 1894 in mehreren Versionen unter dem Titel „Grundlagen der Geometrie“ das erste vollständige Axiomensystem der ebenen euklidischen Geometrie herausgab.

Wir wollen in der Vorlesung ein modernes Axiomensystem für die ebene Geometrie aufstellen, das noch ein klein wenig den Geist Euklids atmet. Parallel sollen andere Axiomensysteme betrachtet werden, allen voran das System von Hilbert.

Wir benutzen einige Begriffe aus der elementaren Mengenlehre (Element- und Teilmengenbeziehung, leere Menge, endliche Durchschnitte und Vereinigungen, Differenzen). Man könnte – wie bei Hilbert – auch darauf noch verzichten und alles mit den Methoden der formalen Logik beschreiben, aber das würde die ganze Darstellung recht schwerfällig machen.

Seit Hilbert fasst man die Axiome der Geometrie gerne in Gruppen zusammen. Wir beginnen mit der Gruppe der „Inzidenzaxiome“, die noch am ehesten wie bei Euklid aussehen.

Die primitiven Terme sind **„Punkt“, „Gerade“, „Ebene“ und „Inzidenz“.**

Die ***Ebene*** ist eine Menge $\mathscr{E}$, ihre Elemente heißen ***Punkte***. Gewisse Teilmengen von $\mathscr{E}$ werden ***Geraden*** genannt. Ist X ein Punkt, g eine Gerade und $X \in g$, so sagt man „*X liegt auf g*“, oder auch „*g enthält X*“.

Bei Hilbert ist von einer Beziehung (der „Inzidenz“) zwischen den primitiven Termen die Rede, die in gewissen Fällen erfüllt ist. Näheres regeln die Axiome.

Für die Inzidenz zwischen Punkten, Geraden und der Ebene gilt:

Inzidenz-Axiom (I.1):

Je zwei verschiedene Punkte liegen auf **genau** einer Geraden.

Inzidenz-Axiom (I.2):

Jede Gerade enthält wenigstens zwei Punkte.

Axiom (I.1) entspricht dem Postulat I von Euklid, wobei zusätzlich die Eindeutigkeit gefordert wird. Das Axiom (I.2) hätte Euklid sicher für überflüssig gehalten.

Definition

1. Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnet AB die dadurch eindeutig bestimmte Gerade.
2. Punkte $A, B, C, \ldots$, die auf einer Geraden liegen, heißen ***kollinear***.

Offensichtlich ist $AB = BA$.

Inzidenz-Axiom (I.3):

Es gibt wenigstens drei Punkte in der Ebene, die nicht kollinear sind.

Man nennt (I.3) auch das „Dimensions-Axiom“. Eine Gerade enthält mindestens 2 verschiedene Punkte, eine Ebene mindestens 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und im Raum wird man die Existenz von 4 Punkten fordern, die nicht alle in einer Ebene liegen.

In Beweisen benötigt man oft eine Folgerung aus Axiom (I.1):

> *Stimmen zwei Geraden in wenigstens zwei verschiedenen Punkten überein, so müssen sie gleich sein.*

Daraus ergibt sich insbesondere:

Satz: *Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemeinsam.*

Definition

Haben die Geraden g und h genau einen Punkt X gemeinsam, so sagt man, „sie schneiden sich“ in X. Wenn sie gleich sind oder keinen Punkt gemeinsam haben, nennt man sie ***parallel***.

Im Gegensatz dazu sind bei Euklid parallele Geraden immer verschieden.

Satz: *Es gibt mindestens drei paarweise verschiedene Geraden in $\mathscr{E}$.*

Beweis: Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind (Axiom I.3), so sind die drei Geraden AB, AC und BC paarweise verschieden. ■

Ein Modell für die Inzidenz-Axiome kann schnell angegeben werden. Man nehme für $\mathscr{E}$ eine beliebige Menge mit 3 Elementen A, B, C. Die Geraden seien die 2-elementigen Teilmengen $\{A, B\}$, $\{A, C\}$ und $\{B, C\}$. Dieses Modell, das wir mit $\mathcal{M}_1$ bezeichnen wollen, zeigt schon die Widerspruchsfreiheit der Inzidenz-Axiome.

Als Modell $\mathcal{M}_2$ bezeichnen wir die gewöhnliche Ebene der analytischen Geometrie:

$$\mathscr{E} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Dieses Modell haben wir in Kapitel 1 schon genau studiert.

Wenn wir als Ebene die Einheits-Sphäre

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

nehmen, und als Geraden die „Großkreise“, die sich als Schnitte von S^2 mit Ebenen durch den Nullpunkt ergeben, so sind die Inzidenz-Axiome nicht erfüllt (siehe Übungsaufgabe).

Man kann dies aber etwas modifizieren, um ein echtes Modell $\mathcal{M}_3$ zu erhalten:

Ein „projektiver Punkt“ soll eine 2-elementige Menge der Gestalt $[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$ sein, mit $\mathbf{x} \in S^2$. Dadurch wird jeweils ein Punkt der Sphäre mit seinem Antipodenpunkt identifiziert. Als Ebene $\mathscr{E}$ nehmen wir die Menge aller projektiven Punkte. Da ein Großkreis mit jedem Punkt der Sphäre auch den entsprechenden Antipodenpunkt enthält, kann man sagen: Eine Gerade in $\mathscr{E}$ ist die Menge aller projektiven Punkte $[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\}$, bei denen $\mathbf{x}$ einen Großkreis durchläuft. Eine solche „Gerade“ ist eine geschlossene Kurve (der Länge π), und man kann sich davon überzeugen, dass die Inzidenz-Axiome für das Modell $\mathcal{M}_3$ erfüllt sind.

Um besser zu verstehen, was hier passiert, soll eine etwas allgemeinere Situation betrachtet werden:

Mit $\mathbb{K}$ sei einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ bezeichnet, und dann werde auf $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ wie folgt eine Äquivalenzrelation eingeführt:

$$v \sim w \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w.$$

Die Äquivalenzklassen sind Geraden durch 0 (also 1-dimensionale $\mathbb{K}$-Unterräume von $\mathbb{K}^{n+1}$), ohne Nullpunkt.

Definition

Die Menge $P_n(\mathbb{K})$ der Geraden durch 0 in $\mathbb{K}^{n+1}$ bezeichnet man als den n-dimensionalen ***projektiven Raum*** (über $\mathbb{K}$). Im Falle $n = 2$ spricht man von der ***projektiven Ebene***.

Ist $E \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein $(k+1)$-dimensionaler $\mathbb{K}$-Unterraum, so nennt man

$$\mathbb{P}(E) := \{L \in P_n(\mathbb{K}) \,:\, L \subset E\}$$

einen (k-dimensionalen) ***projektiven Unterraum***.

0-dimensionale projektive Unterräume sind Punkte, die 1-dimensionalen projektiven Unterräume nennt man projektive Geraden.

Satz: *Seien $M, N \subset P_n(\mathbb{K})$ zwei projektive Unterräume mit*

$$\dim M + \dim N \geq n.$$

Dann ist $M \cap N \neq \varnothing$.

Beweis: Sei $M = \mathbb{P}(E)$ und $N = \mathbb{P}(F)$. Nach der Dimensionsformel für Untervektorräume ist

$$\begin{aligned}
\dim(E \cap F) &= \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) \\
&\geq \dim(E) + \dim(F) - (n+1) \\
&= \dim M + \dim N + 2 - n - 1 \;\geq\; 1.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cap F) \neq \varnothing$. ∎

Folgerung: *Zwei projektive Geraden in der projektiven Ebene schneiden sich immer.*

Beweis: Sind $\ell_1, \ell_2 \subset P_2(\mathbb{K})$ zwei projektive Geraden, so ist $\dim \ell_1 + \dim \ell_2 = 1 + 1 = 2 \geq 2 = \dim(P_2(\mathbb{K}))$. ∎

Es gibt also in der projektiven Ebene keine Parallelen!

Satz: *Zu zwei Punkten $p \neq q$ im projektiven Raum $P_n(\mathbb{K})$ gibt es genau eine projektive Gerade durch p und q.*

Beweis: In $\mathbb{K}^3$ gibt es Geraden $L \neq M$ durch 0 mit $\mathbb{P}(L) = \{p\}$ und $\mathbb{P}(M) = \{q\}$. Diese Geraden spannen eine eindeutig bestimmte Ebene $E \subset \mathbb{K}^3$ auf, und dann ist $\ell = \mathbb{P}(E)$ eine projektive Gerade mit $p, q \in \ell$. Offensichtlich ist ℓ dadurch eindeutig bestimmt. ∎

Manchmal möchte man ja gerne mit Koordinaten rechnen. Woher bekommt man die im projektiven Raum?

Jeder Punkt $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiert genau eine Gerade $L_\mathbf{x} \subset \mathbb{K}^{n+1}$ durch $\mathbf{0}$, die man aber auch als projektiven Punkt auffassen kann. Das ergibt eine surjektive Abbildung $\pi : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\} \to P_n(\mathbb{K})$ mit $\pi(\mathbf{x}) = L_\mathbf{x}$ und $\pi^{-1}(L_\mathbf{x}) = L_\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Man nennt π die ***kanonische Projektion*** und schreibt auch

$$\pi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}] \quad \text{oder} \quad \pi(x_0, x_1, \ldots, x_n) =: (x_0 : x_1 : \ldots : x_n).$$

Die Komponenten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nennt man die ***homogenen Koordinaten*** des projektiven Punktes $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$. Sie sind nicht eindeutig bestimmt, denn für $\lambda \neq 0$ ist

$$(\lambda x_0 : \lambda x_1 : \ldots : \lambda x_n) = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n).$$

Die Gleichung einer projektiven Geraden in $P_2(\mathbb{K})$ ist zugleich die Gleichung einer Ebene durch 0 in $\mathbb{K}^3$, also von der Form $ax + by + cz = 0$ (mit festen Koeffizienten a, b und c).

Satz: *Die Gleichung der projektiven Geraden durch die beiden verschiedenen projektiven Punkte $(x_0 : x_1 : x_2)$ und $(y_0 : y_1 : y_2)$ ist gegeben durch*

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Beweis: Durch die Gleichung wird die Menge der Punkte (x, y, z) beschrieben, die von (x_0, x_1, x_2) und (y_0, y_1, y_2) linear abhängig sind. ■

Die Nicht-Eindeutigkeit der Darstellung eines projektiven Punktes mit Hilfe homogener Koordinaten kann manchmal ziemlich lästig werden. Für die Punkte gewisser Teilmengen von $P_n(\mathbb{K})$ kann man aber eine eindeutige Darstellung finden. Sei etwa $U_i := \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in P_n(\mathbb{K}) \,:\, x_i \neq 0\}$. Liegt $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ in U_i, so kann man alle Komponenten durch x_i teilen. Die Komponente $x_i/x_i = 1$ wird dadurch überflüssig, und die restlichen Komponenten sind eindeutig bestimmt.

Ist zum Beispiel $i = 0$, so erhält man

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = \big(1 : \frac{x_1}{x_0} : \ldots : \frac{x_n}{x_0}\big),$$

und der Punkt $\big(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\big) \in \mathbb{K}^n$ und der projektive Punkt $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ bestimmen sich gegenseitig eindeutig. Auf diese Weise kann man $\mathbb{K}^n$ als Teilmenge von $P_n(\mathbb{K})$ auffassen. Der Rest $P_n(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}^n$ besteht aus den Punkten

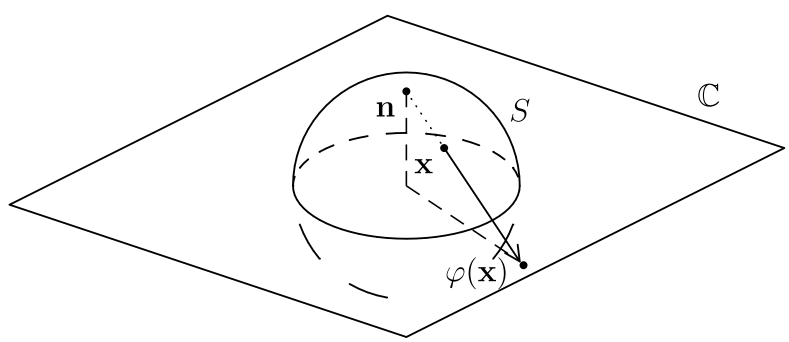
$$\{(0 : x_1 : \ldots : x_n) \in P_n(\mathbb{K}) \,:\, (x_0, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)\} = P_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Man kann die Punkte $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ mit $x_0 \neq 0$ als „endlich“ bezeichnen, die anderen als „unendlich-fern“. Also ist der n-dimensionale projektive Raum die Vereinigung eines n-dimensionalen affinen Raumes mit einer „unendlich-fernen“ $(n-1)$-dimensionalen „projektiven Hyperebene“:

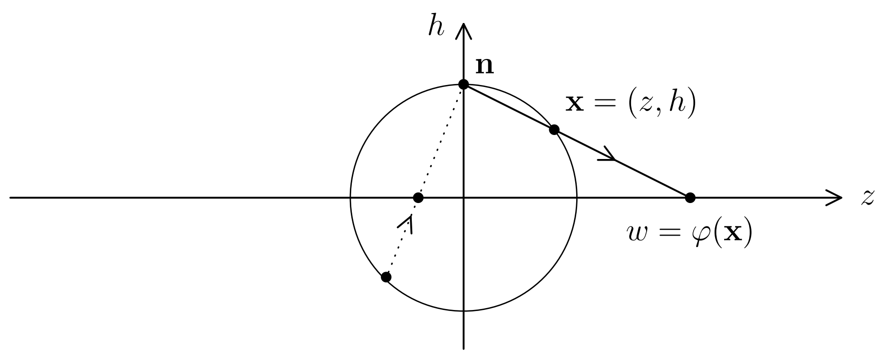
$$P_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}, \quad P_2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^2 \cup P_1(\mathbb{K}), \quad P_3(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^3 \cup P_2(\mathbb{K}) \quad \text{u.s.w.}$$

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist $P_1(\mathbb{K})$ ein Kreis, und $P_2(\mathbb{R})$ erhält man, indem man in der Sphäre S^2 Antipodenpunkte miteinander identfiziert.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist $P_1(\mathbb{K})$ die sogenannte „Riemann'sche Zahlenkugel“ $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sie stimmt überein mit der Sphäre $S := S^2 = \{(z,h) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + h^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$. Ist $\mathbf{n} := (0,1) \in S$ der „Nordpol“, so wird die ***stereographische Projektion*** $\varphi : S \setminus \{\mathbf{n}\} \to \mathbb{C}$ folgendermaßen definiert:



Ist $\mathbf{x} = (z,h) \in S \setminus \{\mathbf{n}\}$, so trifft der Strahl, der von $\mathbf{n}$ ausgeht und bei $\mathbf{x}$ die Sphäre S durchstößt, in einem Punkt $\varphi(\mathbf{x})$ die komplexe Ebene:

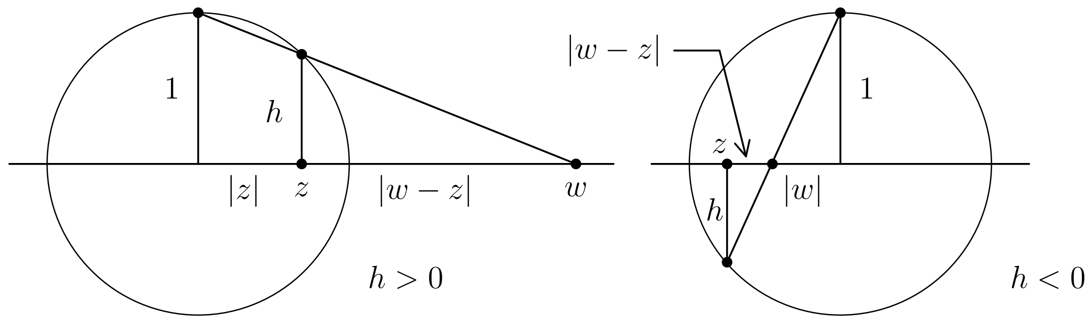


Ist $w = \varphi(z,h)$, so liegen w und z auf dem gleichen Strahl in $\mathbb{C}$, der von 0 ausgeht. Also muss $w = \lambda z$ sein, mit einem reellen Faktor $\lambda > 0$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: Ist $h > 0$, so ist $z \neq 0$, $\lambda > 1$, und nach dem Strahlensatz besteht das Verhältnis

$$h : 1 = |w - z| : |w|.$$

Also ist $h = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$, und daher $\lambda = \dfrac{1}{1-h}$.



Ist $-1 < h < 0$, so ist ebenfalls $z \neq 0$ und $0 < \lambda < 1$, und man kommt zum gleichen Ergebnis. Schließlich ist $\varphi(0,-1) = 0$. Somit ist die stereographische Projektion gegeben durch

$$\boxed{\varphi(z,h) = \frac{1}{1-h} \cdot z.}$$

Diese Abbildung ist sogar bijektiv! Ist nämlich $w \in \mathbb{C}$, so ist der Strahl, der von $\mathbf{n}$ aus durch w geht, gegeben durch die Menge

$$\{(t(w,0) + (1-t)(0,1) \,:\, t \geq 0\} = \{(tw, 1-t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t \geq 0\}.$$

Es gibt genau ein $t > 0$ mit $|tw|^2 + (1-t)^2 = 1$, nämlich $t = \dfrac{2}{|w|^2+1}$. Bei diesem Parameter trifft der Strahl die Sphäre im Punkt

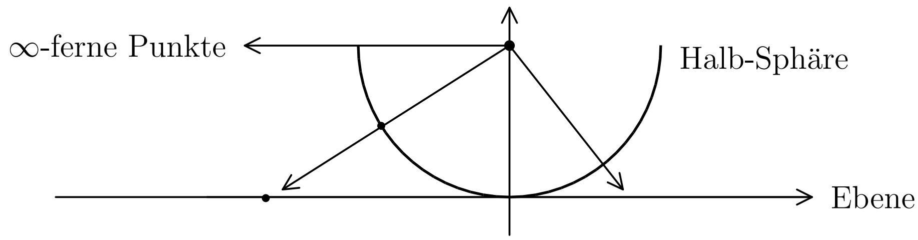
$$\boxed{\varphi^{-1}(w) = (tw, 1-t) = \left(\frac{2w}{|w|^2+1}, \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\right).}$$

Nähert sich $\mathbf{x} = (z,h) \in S$ dem Nordpol $(0,1)$, so wandert $\varphi(\mathbf{x}) = (1/(1-h))z$ immer weiter ins Unendliche, denn es ist

$$|\varphi(z,h)|^2 = \frac{|z|^2}{(1-h)^2} = \frac{1-h^2}{(1-h)^2} = \frac{1+h}{1-h} \text{ . (denn es ist } |z|^2 + h^2 = 1).$$

Erweitert man die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ zur „abgeschlossenen Ebene“ $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so kann man auch die stereographische Projektion φ zu einer Abbildung $\overline{\varphi} : S \to \overline{\mathbb{C}}$ erweitern, mit $\mathbf{n} = (0,1) \mapsto \infty$.

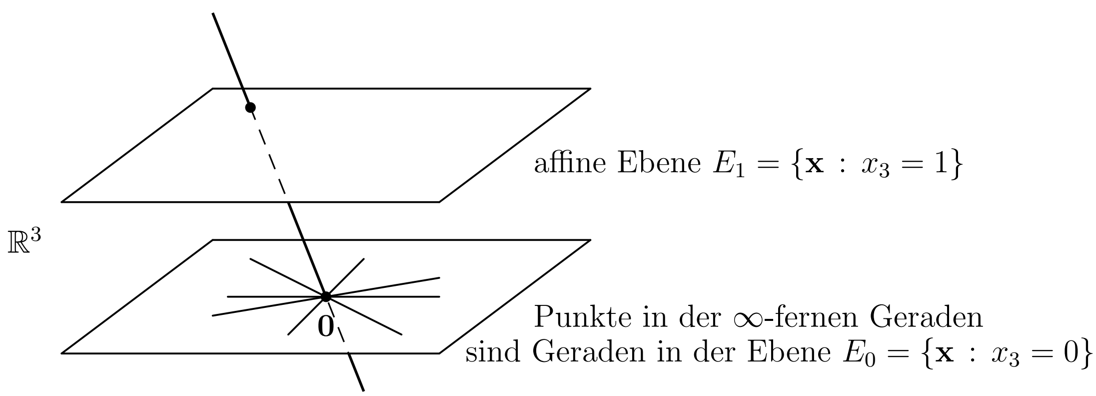
Um eine anschauliche Vorstellung von der **reellen projektiven Ebene** zu bekommen, benutzt man besser eine andere Projektion. Man projiziert die untere Halb-Sphäre vom Mittelpunkt der Einheitskugel aus auf die Tangentialebene im Südpol:



Auf diese Weise werden alle projektiven Punkte (bzw. ihre Repräsentanten in der unteren Halbsphäre) auf die Ebene abgebildet. Die Punkte auf dem Äquator müssen allerdings mit ihren Antipoden-Punkten identifiziert werden, und ihre Bilder sind „unendlich ferne Punkte", die nicht mehr zur affinen Ebene gehören.

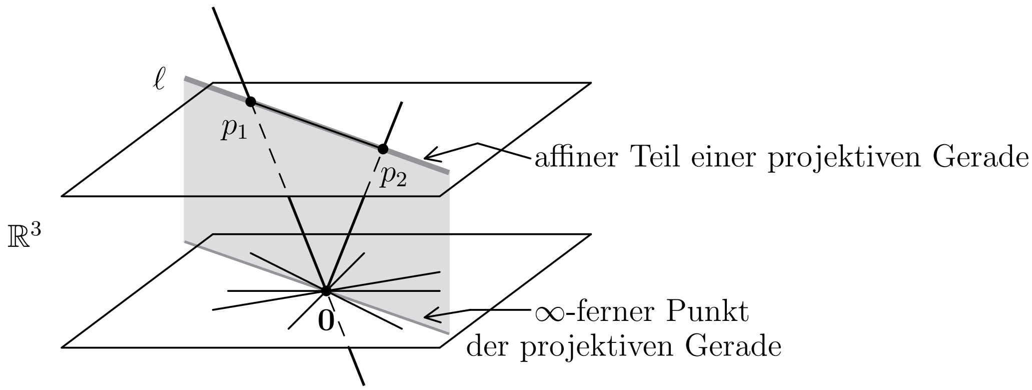
Es ist natürlich unbefriedigend, dass man sich die projektive Ebene so schlecht vorstellen kann. Was soll man schon von unendlich fernen Punkten halten? Das Problem ist, dass die projektive Ebene in sich geschlossen und eine sogenannte „nicht orientierbare Fläche" ist, also eine Fläche, auf der nach einem „Rundgang" um die Welt die Unterscheidung von Rechts und Links wechselt, so ähnlich, wie bei einem Möbiusband. Eine solche Fläche kann man im $\mathbb{R}^3$ nicht ohne Selbstdurchdringungen (die es in Wirklichkeit natürlich nicht gibt) realisieren, man müsste in den 4-dimensionalen Raum ausweichen.

Eine andere Möglichkeit, einen Überblick über $P_2(\mathbb{R})$ zu gewinnen, bietet sich noch an: Man ersetzt die Punkte der projektiven Ebene, die ja eigentlich Geraden durch $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^3$ sind, durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit einer affinen Ebene, die nicht durch $\mathbf{0}$ geht. Allerdings erwischt man dabei erst mal wieder nur die Punkte im Endlichen.



Die Geraden in der Ebene $E_0 := \{\mathbf{x} : x_3 = 0\}$ treffen die affine Ebene $E_1 := \{\mathbf{x} : x_3 = 1\}$ nicht, also muss man sie als unendlich ferne Punkte auffassen. Alle anderen Geraden treffen E_1 jeweils in genau einem Punkt. Das ergibt den affinen Teil des projektiven Raumes.

Ist ℓ eine projektive Gerade durch zwei projektive Punkte p_1 und p_2 (die ihrerseits durch zwei Geraden $L_1, L_2 \subset \mathbb{K}^3$ repräsentiert werden), so spannen L_1 und L_2 eine Ebene $E \subset \mathbb{K}^3$ durch den Nullpunkt auf. Diese Ebene schneidet E_0 entlang derjenigen Geraden L_0, die den unendlich-fernen Punkt von ℓ repräsentiert. Das bedeutet, dass die Gerade L_0 die Richtung vorgibt, in der man den durch L_0 repräsentierten unendlich-fernen Punkt suchen muss. Man beachte, dass die Gerade nur **eine** Richtung vorgibt. Egal, ob man von links nach rechts oder von rechts nach links an dieser Geraden entlang läuft, man erreicht immer den gleichen unendlich-fernen Punkt.



Der primitive Term „zwischen“:

Wir kommen jetzt zu den von Pasch angestellten Überlegungen:

Zwischen gewissen Punkten $A, B, C \in \mathscr{E}$ kann eine Beziehung $A - B - C$ bestehen. Ist dies der Fall, so sagt man: B ***liegt zwischen*** A *und* C.

Für diese Beziehung gelten die Anordnungs-Axiome:

Anordnungs-Axiom (A.1):

Gilt $A - B - C$, so sind die Punkte A, B, C paarweise verschieden und liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Anordnungs-Axiom (A.2):

Gilt $A - B - C$, so gilt auch $C - B - A$.

Anordnungs-Axiom (A.3):

Sind A, B, C paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden, so gilt genau eine der drei folgenden Beziehungen:

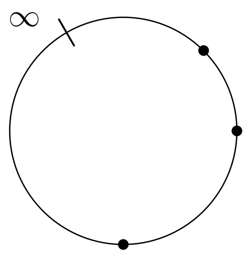
$$A - B - C \quad \text{oder} \quad B - C - A \quad \text{oder} \quad C - A - B.$$

Die Axiome A-1 bis A-3 sind die Formulierungen ganz simpler und anschaulicher Sachverhalte. Von Euklid wären sie sicher als überflüssig abgetan worden. Weiter unten folgen noch zwei etwas weniger triviale Anordnungsaxiome.

Im Modell $\mathcal{M}_1$ sind die Axiome A-1 bis A-3 gegenstandslos, weil nie mehr als 2 Punkte auf einer Geraden liegen.

Im Modell $\mathcal{M}_2$ kann man die Axiome leicht verifizieren: Sind $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ Punkte in $\mathbb{R}^2$, so liegt $\mathbf{b}$ zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{c}$, wenn es ein $t \in (0,1)$ gibt, so dass $\mathbf{b} = \mathbf{a} + t(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ ist. Nun muss man nur noch ein bisschen rechnen. Die Widerspruchsfreiheit ist damit schon mal gesichert.

Im Modell $\mathcal{M}_3$ (also der projektiven Ebene) haben die Geraden kreisförmige Gestalt, und sie enthalten jeweils genau einen unendlich fernen Punkt:



Dann liegt von drei Punkten auf einer Geraden **jeder** zwischen den beiden anderen. Also sind im Modell $\mathcal{M}_3$ die Anordnungsaxiome **nicht** erfüllt.

Definition

Seien $A, B \in \mathscr{E}$, $A \neq B$.

1. $\overline{AB} := \{A\} \cup \{B\} \cup \{X \in \mathscr{E} \mid A - X - B\}$ heißt ***Strecke mit den Endpunkten*** A und B.

2. $\overrightarrow{AB} := \overline{AB} \cup \{X \in \mathscr{E} \mid A - B - X\}$ heißt ***Strahl von*** A ***in Richtung*** B.

Satz: *Sind $A, B \in \mathscr{E}$, $A \neq B$, so gilt:*

1. $\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \subset AB$.
2. $\overline{AB} = \overline{BA}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = \overline{AB}$ *und* $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} = AB$.

Beweis: 1) und 2) sind trivial. Außerdem ist offensichtlich

$$\overline{AB} \subset \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subset AB.$$

Sei nun $X \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. Wäre $X \notin \overline{AB}$, so müsste zugleich $A - B - X$ und $B - A - X$ gelten. Das ist aber nicht möglich.

Ist $X \in AB$, so ist entweder $X \in \overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$, oder es muss $X - A - B$ oder $A - B - X$ gelten. In jedem Fall liegt X in $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. ∎

Wie angekündigt, brauchen wir noch zwei weitere Anordnungsaxiome:

Anordnungsaxiom (A.4):

Für alle $A, B \in \mathscr{E}$ mit $A \neq B$ gibt es ein C mit $A - B - C$.

Dieses Axiom entspricht dem Postulat II von Euklid über die Verlängerbarkeit von Geraden über einen Punkt hinaus. Hier wird nur etwas genauer gesagt, was das bedeuten soll.

Anordnungsaxiom (A.5):

Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte und l eine Gerade, die A, B und C nicht enthält. Ist $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$, so ist

$$\overline{AC} \cap l \neq \varnothing \quad \text{oder} \quad \overline{BC} \cap l \neq \varnothing.$$

Das Axiom (A.5) bezeichnet man als **Pasch-Axiom**. Es schließt eine echte Lücke im Euklidischen Axiomensystem.

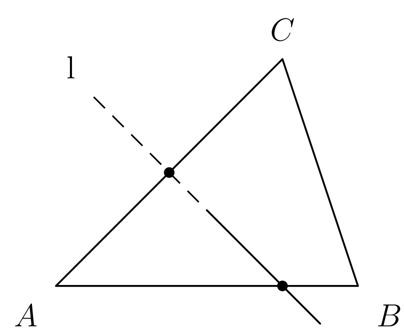
Sind A, B, C drei nicht-kollineare Punkte, so heißt

$$ABC := \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

das ***Dreieck*** mit den ***Ecken*** A, B und C und den ***Seiten*** $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$.

Das Pasch-Axiom bedeutet nun anschaulich folgendes:

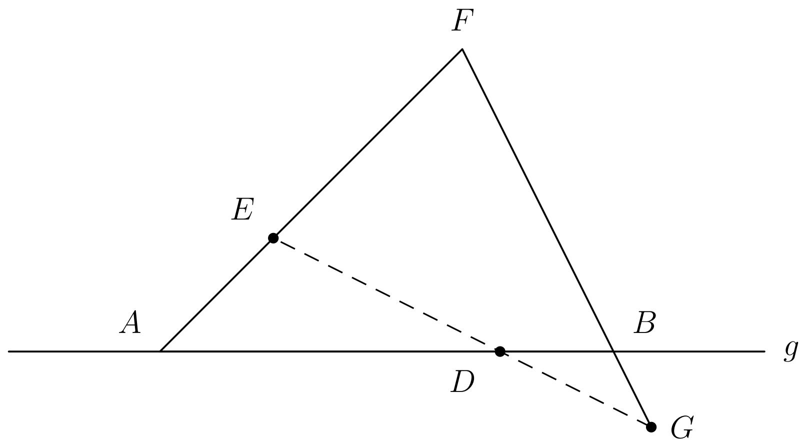
Wenn eine Gerade eine Seite eines Dreiecks trifft, aber keine der Ecken, so trifft die Gerade notwendigerweise noch eine andere Seite des Dreiecks.



Folgerung: *Für beliebige Punkte $A \neq B$ gibt es ein D mit $A - D - B$.*

Beweis: Sei $g = AB$ und E ein Punkt, der nicht auf g liegt (Axiom I-3).

Es gibt nach Axiom A-4 einen Punkt F mit $A - E - F$. Da $AE \cap g = \{A\}$ und $F \neq A$ ist, kann F nicht auf AB liegen und insbesondere nicht $= B$ sein. Also gibt es auch einen Punkt G mit $F - B - G$.



Wir wollen zeigen, dass EG einen Punkt zwischen A und B enthält. Zunächst trifft EG die Seite $\overline{AF}$ des Dreiecks ABF in E, aber nicht die Seite $\overline{BF}$, denn dann gäbe es neben G noch einen Punkt $\neq G$ von EG auf FB, und es wäre $EG = FB$, also $E \in FG$ und damit auch $EF = FG$ und $A \in FG$. Das würde bedeuten, dass $FG = g$ ist, was unmöglich ist.

Nach dem Axiom von Pasch trifft EG die Seite $\overline{AB}$ in einem Punkt D. Es ist $A - D - B$. ∎

Folgerung: *Jede Gerade enthält unendlich viele Punkte.*

Beweis: Schon jede Strecke $\overline{AB}$ enthält unendlich viele Punkte. Man kann nach dem gerade bewiesenen Satz einen Punkt P_1 mit $A - P_1 - B$ finden, dann einen Punkt P_2 mit $A - P_2 - P_1$ usw. ∎

Eine Gerade ℓ, die keine der Ecken eines Dreiecks ABC enthält, kann nicht durch alle drei Seiten dieses Dreiecks gehen. Wenn es nämlich Punkte X, Y, Z mit $A - X - B$, $B - Y - C$ und $C - Z - A$ gibt, so können diese nicht kollinear sein (siehe Übungsaufgabe!), also nicht alle auf ℓ liegen.

Was passiert, wenn eine Gerade auf drei kollineare Punkte trifft?

Gilt $A - B - C$ und ist $X \in \overline{AC}$, so sollte man meinen, dass X zu $\overline{AB}$ oder zu $\overline{BC}$ gehört. Der Beweis erweist sich als nicht so einfach. Man braucht einen technischen Hilfssatz.

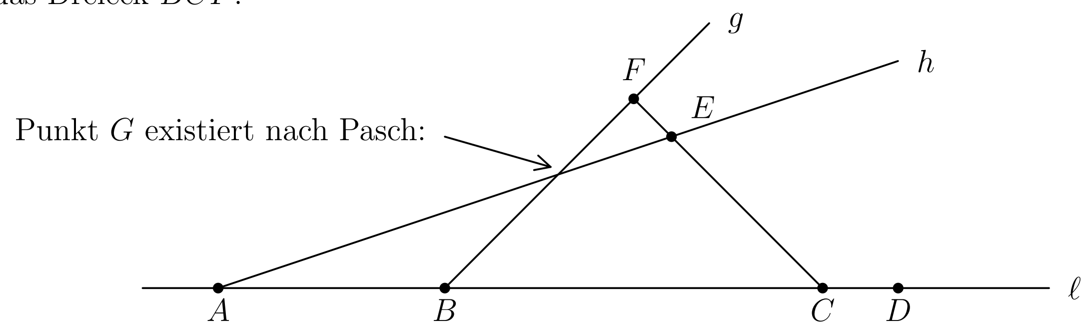
Satz von der 4-er-Relation:
Gilt $A - B - C$ und $B - C - D$, so gilt auch $A - C - D$ und $A - B - D$.

Beweis: Die Punkte A, B, C und D liegen alle auf einer Geraden ℓ, das folgt aus den „Zwischen“-Beziehungen.

1) Nach Axiom I.3 gibt es einen Punkt E außerhalb der Geraden ℓ, und nach Axiom A.4 gibt es einen Punkt F mit $C - E - F$.

2) Wenn F auf ℓ läge, so hätten ℓ und die Gerade FC zwei Punkte gemeinsam, müssten also übereinstimmen. Das kann nicht sein, weil E nicht auf ℓ liegt. Also ist auch $F \notin \ell$.

3) Verbindet man A mit E, so erhält man die Gerade $h := AE$ und das Dreieck ACE. Verbindet man außerdem B mit F, so erhält man die Gerade $g := BF$ und das Dreieck BCF.



4) Im Dreieck ACE schneidet $g = BF$ die Seite $\overline{AC}$ (wegen $A - B - C$ im Punkt B), trifft aber keine der Ecken. Läge nämlich A oder C auf g, so wäre (wegen $B \in g$) $g = \ell$, was nicht sein kann. Und läge E auf g, so wäre $g = CF$ und wieder $g = \ell$.

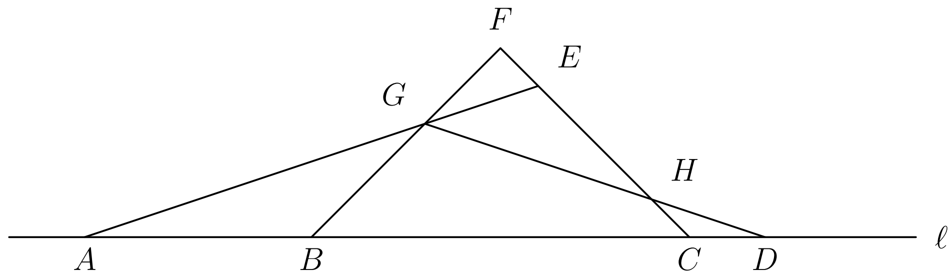
Nun kann man das Pasch-Axiom A.5 anwenden: g muss noch eine weitere Seite von ACE treffen, also $\overline{AE}$ oder $\overline{EC}$. Würde g die Seite $\overline{EC}$ treffen, so hätten BF und CF zwei Punkte gemeinsam und wären gleich. Da das nicht sein kann, trifft g die Seite $\overline{AE}$ in einem Punkt G. Dann gilt $A - G - E$.

5) Die Gerade $h = AE$ trifft keine der Ecken des Dreiecks BCF (man argumentiert wie in (4)). Da h die Seite $\overline{CF}$ dieses Dreiecks trifft, aber die Seite $\overline{BC}$ nicht treffen kann (weil dann $h = \ell$ wäre), muss h nach Pasch noch die Seite $\overline{BF}$ treffen. Weil $G \in h \cap BF$ und $h \neq BF$ ist, folgt, dass $B - G - F$ gilt.

6) Nun betrachten wir die Gerade $m := GD$ und das Dreieck BCF. Weil m die Seite $\overline{BF}$ (in G) schneidet und $B - G - F$ gilt, liegen B und F nicht auf m. Der Punkt C kann auch nicht auf m liegen, sonst wäre $m = \ell$ und $G \in \ell$, was nicht sein kann. Also muss m nach Pasch noch eine weitere Seite des Dreiecks BCF treffen. Die Seite $\overline{BC}$ kann es nicht sein, denn dann hätten m und ℓ zwei Punkte gemeinsam. Also trifft m die Seite $\overline{CF}$ in einem Punkt H. Dann gilt $C - H - F$.

7) Die Gerade CF trifft die Seite $\overline{BD}$ des Dreiecks BDG im Punkt C (wegen der Voraussetzung $B - C - D$). Die Punkte B, D und G liegen nicht auf CF. Bei B und D ist das wieder klar, weil sonst $CF = \ell$ wäre. Läge G auf CF, so wäre $CF = BF$ und damit $CF = \ell$. Wieder einmal kann man Pasch bemühen und erhält, dass CF eine der Seiten $\overline{BG}$ oder $\overline{DG}$ trifft. CF kann $\overline{BG}$ aber nicht treffen, denn sonst wäre $CF = BF$ und damit $CF = \ell$. Also trifft CF die Seite $\overline{DG}$. Weil H der einzige Schnittpunkt von CF und DG ist, folgt die Beziehung $G - H - D$.

8) Im Dreieck ADG trifft CF die Seite $\overline{DG}$ im Punkt H. Die Punkte A, D und G liegen nicht auf CF, das ist für D und G schon bekannt und folgt für A wie in (7) für B. Wegen $A - G - E$ (siehe (4)) liegt E nicht auf $\overline{AG}$. Weil E der einzige gemeinsame Punkt von CF und AE ist, kann CF die Seite $\overline{AG}$ nicht treffen. Also muss CF nach Pasch die Seite $\overline{AD}$ treffen, und das kann nur bei C passieren. Also gilt $A - C - D$.



9) Wir haben gezeigt: Aus den Beziehungen $A - B - C$ und $B - C - D$ folgt die Beziehung $A - C - D$.

Gilt aber $A - B - C$ und $B - C - D$, so so gilt auch $D - C - B$ und $C - B - A$, und daraus folgt dann $D - B - A$, also $A - B - D$. ∎

Jetzt kann man den Satz über eine Gerade und drei kollineare Punkte beweisen:

Satz: *Es gelte $A - B - C$. Dann folgt für jeden Punkt $X \in AC$:*

$$X \in \overline{AC} \iff X \text{ liegt in } \overline{AB} \text{ oder in } \overline{BC}.$$

Beweis: Sei $X \in \overline{AC}$ gegeben. Ist $X = A$ oder $X = C$, so ist nichts weiter zu zeigen.

Es gelte also $A - X - C$. Für die Lage der Punkte A, B und X zueinander gibt es drei Möglichkeiten:

1) Gilt $A - X - B$, so liegt X in $\overline{AB}$.

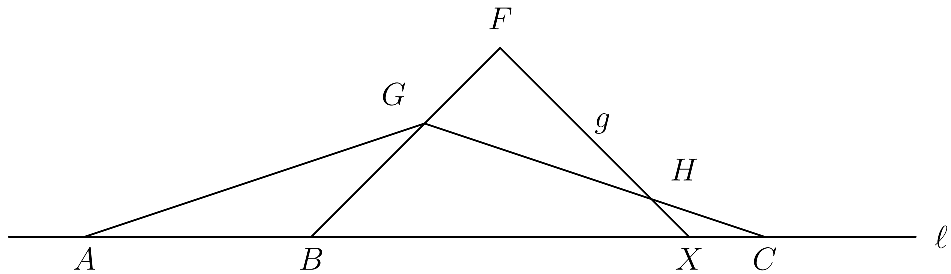
2) Gilt $X - A - B$, so gilt auch $B - A - X$. Zusammen mit $C - B - A$ ergibt das nach dem Satz von der 4-er-Relation die Beziehung $C - A - X$. Das ist aber ein Widerspruch zu der Relation $A - X - C$.

3) Es gelte $A - B - X$.

a) Man wähle einen Punkt G außerhalb $\ell := AC$ und einen Punkt F mit $B - G - F$.

b) Die Gerade $g := FX$ trifft im Dreieck ABG **nicht** $\overline{AB}$ (wegen $A - B - X$) und **nicht** $\overline{BG}$ (sonst wäre $BF = FX$ und damit $g = \ell$). Also kann g im Dreieck ABG nach Pasch auch die Seite $\overline{AG}$ **nicht** treffen.

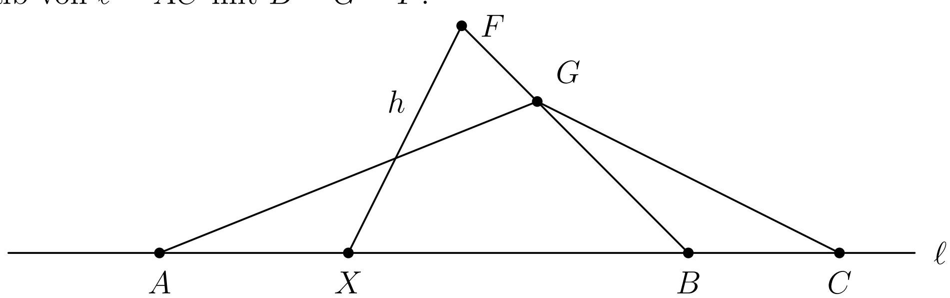
c) Im Dreieck ACG trifft g die Seite $\overline{AC}$ im Punkt X (wegen $A - X - C$), aber nicht $\overline{AG}$, muss nach Pasch also noch die Seite $\overline{CG}$ in einem Punkt H treffen.



d) Im Dreieck BCG trifft g die Seite $\overline{CG}$ in H, nicht aber die Seite $\overline{BG}$ (denn es ist $B - G - F$). Also muss g noch die Seite $\overline{BC}$ treffen, und das kann nur in X passieren. Demnach gilt $B - X - C$, also $X \in \overline{BC}$.

Nun zur umgekehrten Richtung:

Es gelte $A - B - C$, und außerdem sei $X \in \overline{AB}$. Wieder wähle man Punkte G, F außerhalb von $\ell = AC$ mit $B - G - F$.



Im Dreieck ABG trifft $h := FX$ die Seite $\overline{AB}$ im Punkt X, aber nicht die Seite $\overline{BG}$, muss also auch noch $\overline{AG}$ in einem Punkt H treffen. Dann gilt $A - H - G$.

Im Dreieck ACG trifft h die Seite $\overline{AG}$, nicht aber $\overline{CG}$. Also muss h noch $\overline{AC}$ treffen, und dafür kommt nur der Punkt X in Frage. Also gilt $A - X - C$.

Wenn X in $\overline{BC}$ liegt, argumentiert man analog. ∎

Jetzt kann man wie in der Vorlesung fortfahren.

Satz: *Sei ℓ eine Gerade, A, B, C paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf ℓ liegen und $\overline{AB} \cap \ell = \varnothing$. Dann gilt*

1. *Ist $\overline{BC} \cap \ell = \varnothing$, so ist auch $\overline{AC} \cap \ell = \varnothing$.*
2. *Ist $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$, so ist auch $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$.*

Beweis: Man muss zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: A, B und C liegen auf einer Geraden. Dann muss einer der Punkte zwischen den beiden anderen liegen.

a) Es gelte $A - B - C$. Aufgrund des vorigen Satzes sind die beiden Aussagen (1) und (2) trivial.

b) Gilt $A - C - B$ und $\overline{AB} \cap \ell = \varnothing$, so muss auch $\overline{BC} \cap \ell = \varnothing$ und $\overline{AC} \cap \ell = \varnothing$ gelten. Das ergibt (1), und (2) ist gegenstandslos.

c) Es gelte $B - A - C$. Ist $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$, so ist erst recht $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$, und per Kontraposition gilt (1). Ist $\overline{BC} \cap \ell \neq \varnothing$, so ist entweder $\overline{AB} \cap \ell \neq \varnothing$ (aber das kann nicht zutreffen), oder es ist $\overline{AC} \cap \ell \neq \varnothing$, und das will man zeigen.

2. Fall: A, B und C sind nicht kollinear. Dann bilden die Punkte ein Dreieck, und ℓ trifft keine der drei Ecken. Nach Pasch trifft ℓ dann keine der Seiten oder mindestens zwei. Daraus folgen (1) und (2) sofort. ■

Nun kann man die Punkte der Ebene in Bezug auf ihre Lage zu einer Geraden besser klassifizieren. Sei also eine Gerade $g \subset \mathscr{E}$ festgehalten. Für Punkte $A, B \in \mathscr{E} \setminus g$ erklären wir eine Relation

$$A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; A = B \text{ oder } \overline{AB} \cap g = \varnothing.$$

Wir sagen dafür auch: A und B ***liegen auf der gleichen Seite*** von g.

Satz: *„Auf der gleichen Seite von g liegen“ ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis: Offensichtlich ist $A \sim A$ (Reflexivität), und mit $A \sim B$ ist auch $B \sim A$ (Symmetrie). Die Relation ist aber auch transitiv: Sei $A \sim B$ und $B \sim C$. Ist $A = B$ oder $B = C$, so ist offensichtlich auch $A \sim C$. Wir können uns daher auf den Fall beschränken, dass A, B, C paarweise verschieden sind. Dann folgt die Transitivität aus dem vorigen Satz. ■

Liegen A und B nicht auf der gleichen Seite von g, so sagen wir, sie ***liegen auf verschiedenen Seiten*** von g. Wir wollen zeigen, dass jede Gerade genau zwei Seiten hat.

Definition

Ist $g \subset \mathscr{E}$ eine Gerade und $A \in \mathscr{E} \setminus g$, so heißt

$$\mathscr{H}(g, A) := \{X \in \mathscr{E} \setminus g \mid X \text{ liegt auf der gleichen Seite von } g \text{ wie } A\}$$

die durch A bestimmte ***Seite*** von g.

$\mathscr{H}(l, A)$ ist nichts anderes als die Äquivalenzklasse von A bezüglich der oben betrachteten Äquivalenzrelation. Damit ist schon einmal klar, dass $\mathscr{E} \setminus g$ in disjunkte derartige Klassen zerfällt.

Satz: *Jede Gerade hat genau zwei Seiten.*

Beweis: Sei g die gegebene Gerade.

1) Es gibt einen Punkt A, der nicht auf g liegt (Axiom (I.3)).

2) Es gibt einen Punkt $O \in g$ (Axiom (I.2)).

3) Es gibt einen Punkt B mit $A - O - B$ (Axiom (A.4)).

4) Dann ist $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$, also nicht $A \sim B$.

Demnach gibt es wenigstens zwei verschiedene Äquivalenzklassen.

Seien A und B die Repräsentanten zweier verschiedener Äquivalenzklassen, sowie S der Schnittpunkt von g und $\overline{AB}$. Außerdem sei C ein beliebiger Punkt aus $\mathscr{E} \setminus g$. Ist $C = A$ oder $C = B$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also $C \neq A$ und $C \neq B$.

Liegt C auf AB, so ist $C \neq S$ (weil C nicht auf g liegt). Es gilt dann: $C - A - S$ oder $A - C - S$ oder $S - C - B$ oder $S - B - C$. In all diesen Fällen ist entweder $\overline{AC} \cap g = \varnothing$ oder $\overline{BC} \cap g = \varnothing$, also $C \sim A$ oder $C \sim B$.

Es bleibt nur die Möglichkeit, dass A, B, C nicht kollinear sind. Dann kann g von den drei Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ nur genau zwei treffen. Wenn C nicht äquivalent zu A ist, dann ist $\overline{AC} \cap g \neq \varnothing$. Da außerdem schon $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$ ist, muss $\overline{BC} \cap g = \varnothing$ sein, also $C \sim B$. Damit gibt es nur die beiden durch A und B repräsentierten Klassen. ∎

Definition

Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathscr{E}$ heißt ***konvex***, wenn gilt:

Für alle $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \neq B$ ist $\overline{AB} \subset \mathcal{M}$.

Satz: *Die Mengen $\mathscr{H}(\ell, A)$ sind konvex.*

Beweis: Sind $X, Y \in \mathscr{H}(\ell, A)$, so ist $X \sim A$ und $Y \sim A$. Also ist auch $X \sim Y$, und das bedeutet, dass $\overline{XY} \subset \mathscr{E} \setminus \ell$ ist.

Wir nehmen an, dass es ein $Z \in \overline{XY}$ mit $Z \neq X$ und $Z \neq Y$ gibt, so dass Z nicht zu A äquivalent ist. Dann ist $X - Z - Y$ und Z weder zu X noch zu Y äquivalent (weil beide Punkte zu A äquivalent sind).

Es muss also zum Beispiel ein $R \in \ell$ mit $X - R - Z$ geben. Das bedeutet, dass R zu $\overline{XZ}$ gehört. Wegen $X - Z - Y$ liegt R dann erst recht in $\overline{XY}$. Das kann aber nicht sein. Also liegt die ganze Strecke $\overline{XY}$ in $\mathscr{H}(\ell, A)$. ∎

Zusammenfassend erhalten wir den

Satz von Pasch: *Eine Gerade ℓ teilt den Rest der Ebene in zwei disjunkte nicht-leere konvexe Teilmengen $\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$, so dass für $A \in \mathscr{H}_1$ und $B \in \mathscr{H}_2$ gilt: $\overline{AB} \cap \ell \neq \varnothing$.*

Die (eindeutig bestimmten) Teilmengen $\mathscr{H}_1$ und $\mathscr{H}_2$ werden als die durch ℓ bestimmten ***Halbebenen*** oder ***Seiten*** bezeichnet.

So wie eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt, so zerlegt ein Punkt eine Gerade in zwei Halbgeraden.

Satz: *Wenn der Punkt O zwischen den beiden Punkten A und B liegt, dann gilt:*

1. $AB = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$.
2. $\overrightarrow{OA} \cap \overrightarrow{OB} = \{O\}$.

Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. O teilt also die durch A und B bestimmte Gerade ℓ in die disjunkten Mengen $\{O\}$, $\overrightarrow{OA}\setminus\{O\}$ und $\overrightarrow{OB}\setminus\{O\}$, und man kann sagen, wann zwei Punkte von ℓ auf der gleichen Seite oder auf zwei verschiedenen Seiten von O liegen.

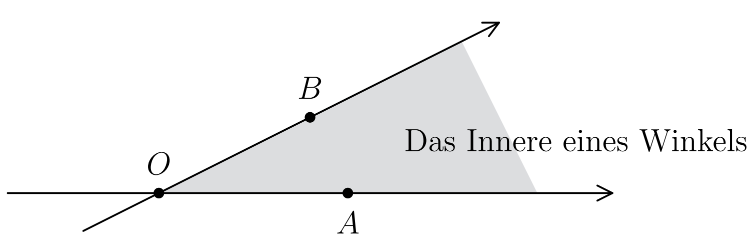
Definition

Es seien O, A, B drei nicht-kollineare Punkte. Unter dem ***Winkel*** $\angle AOB$ versteht man die Vereinigung der Strahlen $\vec{O}A$ und $\vec{O}B$. Der Punkt O heißt ***Scheitel*** des Winkels, die beiden Strahlen heißen die ***Schenkel*** des Winkels.

Es kommt beim Winkel nicht auf die Reihenfolge der Schenkel an, und statt der Punkte A und B kann man auch beliebige andere Punkte auf den Schenkeln zur Beschreibung heranziehen.

Definition

Sei $\alpha = \angle AOB$. Dann nennt man $I(\alpha) := \mathscr{H}(OA, B) \cap \mathscr{H}(OB, A)$ das ***Innere*** des Winkels α. Die Menge $A(\alpha)$ aller Punkte, die weder auf α noch in $I(\alpha)$ liegen, bezeichnet man als das ***Äußere*** des Winkels.

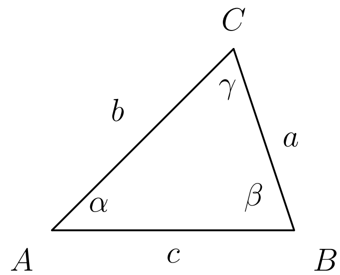


Das Innere eines Winkels ist immer eine echte nicht-leere konvexe Teilmenge einer Halbebene. Anschaulich bedeutet das, dass wir nur Winkel α mit $0° < \alpha < 180°$ betrachten. Das Äußere eines Winkels ist niemals konvex.

Definition

A, B, C seien drei nicht-kollineare Punkte. Unter den ***Winkeln des Dreiecks*** ABC versteht man die Winkel $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle ACB$.

Die Menge $I(ABC) := I(\alpha) \cap I(\beta) \cap I(\gamma)$ nennt man das ***Innere des Dreiecks***. Die Menge $A(ABC)$ aller Punkte, die nicht auf dem Dreieck und nicht im Inneren liegen, bezeichnet man als das ***Äußere des Dreiecks***.



Das Innere eines Dreiecks ist konvex, das Äußere nicht.

Jede Ecke eines Dreiecks gehört gleichzeitig zu zwei Seiten. Die dritte Seite, die die Ecke nicht enthält, nennt man auch ***die der Ecke gegenüberliegende Seite***.

Folgerung: *Eine Gerade, die durch eine Ecke und einen inneren Punkt eines Dreiecks geht, schneidet die der Ecke gegenüberliegende Seite.*

Beweis: Gegeben sei das Dreieck ABC und ein Punkt $X \in I(ABC)$. Wir betrachten die Gerade $l = CX$. Würde l zwei Ecken des Dreiecks ABC enthalten, so könnte X nicht im Innern des Dreiecks liegen. Also befinden sich die Punkte A und B nicht auf l.

Nach Axiom (A.4) gibt es ein S mit $B - C - S$. Dann liegen B und S auf verschiedenen Seiten von AC. Außerdem liegt S auf der Geraden BC und damit nicht im Innern des Dreiecks.

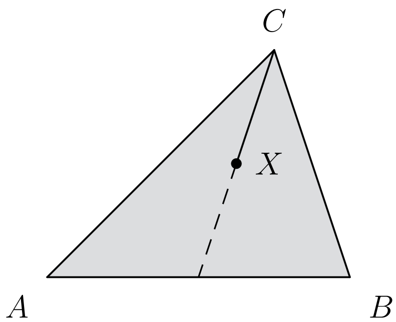
Es ist nun ein neues Dreieck entstanden, nämlich ABS. Da $BS \cap l = \{C\}$ ist, trifft l die Seite $\overline{BS}$ des neuen Dreiecks, aber keine der Ecken. Nach Pasch muss l dann noch eine andere Seite treffen. Ist dies die Seite $\overline{AB}$, so sind wir fertig. Also nehmen wir an: $l \cap \overline{AB} = \varnothing$ und $l \cap \overline{AS} \neq \varnothing$.

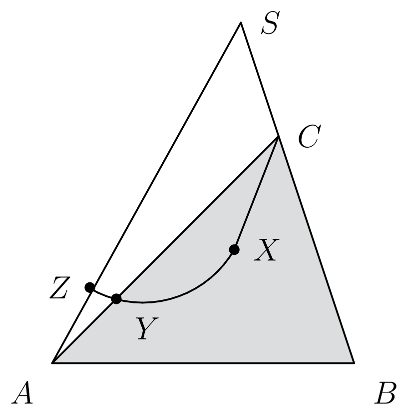
Es gibt dann ein Z mit $A - Z - S$ und $Z \in l$.

Da $SA \neq CA$ ist, treffen sich SA und CA nur im Punkte A. Wegen $S - Z - A$ liegen S und Z auf der gleichen Seite von AC und damit Z im Äußeren von ABC.

Weil nun Z und X auf verschiedenen Seiten von AC liegen, gibt es ein $Y \in AC$ mit $Z - Y - X$ (und damit $\overline{ZX} \cap AC = \{Y\}$).

Mit Z und X liegt auch Y auf l.





Weil X im Innern von ABC liegt, sind X und A auf der gleichen Seite von $BC = BS$. Aus der Beziehung $A - Z - S$ folgt, dass auch A und Z auf der gleichen Seite von BS liegen. Also sind schließlich auch X und Z auf der gleichen Seite von BS. Insbesondere ist $Y \neq C$. Also ist $AC = YC = l$. Das kann aber nicht sein! Die Annahme war demnach falsch. ■

Zum Schluss dieses Abschnittes soll noch einmal das Modell $\mathscr{M}_2$ betrachtet werden. Allerdings soll diesmal nicht die Vektorgeometrie benutzt werden, sondern einfache Koordinatengeometrie.

Als Ebene $\mathscr{E}$ benutzt man die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aller Paare von reellen Zahlen. Eine Gerade in $\mathscr{E}$ ist eine Menge der Form

$$g = \{(x, y) \in \mathscr{E} \,:\, ax + by = q\}, \text{ mit } (a, b) \neq (0, 0).$$

Ist $b = 0$, so ist $g = \{(x, y) \,:\, x = c\}$ (mit $c = q/a$) eine sogenannte „vertikale“ Gerade. Ist $b \neq 0$, so ist $g = \{(x, y) \,:\, y = mx + t\}$ (mit Steigung $m = -a/b$ und Achsenabschnitt $t = q/b$) eine „schräge Gerade“ (mit $m = 0$ sind die „horizontalen“ Geraden Spezialfälle der schrägen Geraden). Eine vertikale Gerade kann nicht schräg sein, und umgekehrt.

Die Inzidenz-Axiome sind erfüllt:

(I.1) Gegeben seien zwei Punkte $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Ist $x_1 = x_2 =: x_0$, so verbindet die vertikale Gerade $x = x_0$ die beiden Punkte, und nur die. Ist $x_1 \neq x_2$, so verbindet die schräge Gerade $y = mx + t$ mit

$$m := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad t := y_1 - mx_1 = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

die Punkte.

(I.2) Sei $ax + by = q$ eine beliebige Gerade g. Ist die Gerade vertikal, also $b = 0$, so liegen z.B. die Punkte $(q/a, 0)$ und $(q/a, 1)$ auf g. Ist g schräg, also $b \neq 0$, so liegen $(q/a, 0)$ und $((q - b)/a, 1)$ auf g.

(I.3) Die Ebene enthält die drei paarweise verschiedenen Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$, die nicht auf einer Geraden liegen.

Um die Gültigkeit der Anordnungsaxiome zu überprüfen, muss man zunächst definieren, wann ein Punkt $X = (x, y)$ zwischen zwei Punkten $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ (mit $A \neq B$) liegt (in Zeichen $A - X - B$). Das ist natürlich genau dann der Fall, wenn X ein „innerer Punkt" der Verbindungsstrecke von A und B ist. Will man nicht (wie in Kapitel 1) mit Parametrisierungen arbeiten, dann kann man „zwischen" folgendermaßen erklären:

a) Ist $a_1 = b_1$, so muss $a_2 \neq b_2$ sein. O.B.d.A. sei $a_2 < b_2$. In diesem Fall liegt X genau dann zwischen A und B, wenn $a_2 < y < b_2$ ist.

b) Ist $a_1 \neq b_1$, so kann man o.B.d.A. annehmen, dass $a_1 < b_1$ ist. In diesem fall liegt X genau dann zwischen A und B, wenn $a_1 < x < b_1$ ist.

Die anderen Fälle (z.B. $a_1 = b_1$ und $a_2 > b_2$) behandelt man analog.

Die Anordnungsaxiome sind nun einfach zu überprüfen (zum Teil war das auch Inhalt von Übungsaufgaben).

(A.1) Dies folgt aus der obigen Definition des „zwischen"-Begriffs.

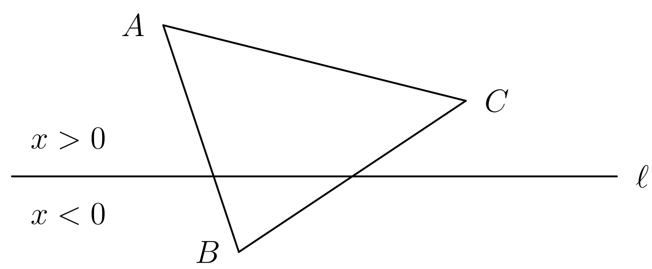
(A.2) Dies ist trivial, beim Übergang von $A - X - B$ zu $B - X - A$ muss man nur einige $<$-Zeichen in $>$-Zeichen verwandeln.

(A.3) Sind drei Punkte A, B und C auf einer Geraden gegeben, so handelt es sich entweder um eine vertikale oder um eine schräge Gerade. In beiden Fällen stellt man sehr leicht fest, dass genau eine der drei Beziehungen $A - B - C$, $B - C - A$ oder $C - A - B$ gilt.

(A.4) Auch die Existenz eines Punktes C (zu gegebenen Punkten $A \neq B$) mit $A - B - C$ ist offensichtlich.

(A.5) Dies ist das Pasch-Axiom. Gegeben seien drei nicht kollineare Punkte $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$, sowie eine Gerade ℓ, die A, B und C nicht enthält, aber $\overline{AB}$ in einem Punkt X zwischen A und B trifft.

Die Schwierigkeit besteht nun darin, dass man so viele verschiedene Fälle untersuchen muss. Das kann man sich etwas erleichtern, wenn man sich an die Isometrien erinnert, die in Kapitel 1 behandelt wurden. Es geht ja um Geraden, Strecken und die Schnittpunkte dieser Linien, und deren Konstellation ändert sich nicht, wenn man eine Isometrie darauf anwendet. Deshalb kann man o.B.d.A. annehmen, dass die gegebene Gerade ℓ die x-Achse ist. Die Koordinaten der Punkte A, B und C können dann natürlich nicht mehr frei gewählt werden. Weil ℓ allerdings die Seite $\overline{AB}$ trifft, kann man annehmen, dass $a_2 > 0$ und $b_2 < 0$ ist.



Der Punkt C liegt entweder in der oberen oder in der unteren Halbebene. Es sei angenommen, dass $c_2 > 0$ ist (dass also C in der oberen Halbebene liegt). Außerdem sei noch angenommen, dass $b_1 < c_1$ ist (d.h., dass C rechts von B liegt), sonst wende man eine Spiegelung an der Achse $x = b_1$ an.

Die Strecke $\overline{BC}$ ist der Graph der Funktion $f : [b_1, c_1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := b_2 + \frac{c_2 - b_2}{c_1 - b_1}\,(x - b_1).$$

Die Gleichung $f(x_0) = 0$ hat die eindeutige Lösung

$$x_0 = \frac{c_2 b_1 - b_2 c_1}{c_2 - b_2}\,.$$

Also trifft ℓ die Seite $\overline{BC}$ im Punkt $(x_0, 0)$.

Liegt C in der unteren Halbebene, so ist $c_2 < 0$, und man zeigt auf die gleiche Weise wie oben, dass ℓ die Seite $\overline{AC}$ trifft. Ist $c_1 = b_1$, so ist BC die vertikale Gerade $x = b_1$, die die x-Achse bei $(x_1, 0)$ trifft.

In jedem Fall ist das Pasch-Axiom erfüllt.

Es soll noch ein anderes Modell $\mathscr{M}_4$ betrachtet werden, wir machen nämlich ein kleines Gedankenexperiment. Wir lassen den alten Pythagoras ein Modell für die Ebene konstruieren.

Ein naheliegender Ausgangspunkt ist die rationale Ebene $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, zu Ehren der von den Pythagoräern gelehrten Harmonie der Zahlen. Die Inzidenz-Axiome gelten auch hier, denn bei der Bestimmung von Schnittpunkten zweier Geraden muss man nur ein lineares Gleichungssystem mit rationalen Koeffizienten lösen. Die Lösung ist wieder rational. Auch bei den Anordnungs-Axiomen braucht man nur rationale Operationen.

Aber wie steht es nun mit irrationalen Längen, die etwa als Hypotenusen rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Katheten auftreten können. Da bisher Längen keine Rolle gespielt haben, könnte es natürlich sein, dass das nichts ausmacht. Will man aber Standard-Konstruktionen wie etwa die einer Winkelhalbierenden ausführen, so muss man eine durch zwei Punkte (z.B. $(0, 0)$ und $(1, 0)$) gegebene Strecke an einem gegebenen Strahl antragen können, etwa beim Nullpunkt auf der reellen

Achse. Das ergäbe hier speziell die Strecke mit den Endpunkten $(0,0)$ und $(\sqrt{2},0)$. Aber der Punkt $(\sqrt{2},0)$ liegt überhaupt nicht in der rationalen Ebene. Also reichen die rationalen Punkte wohl doch nicht aus.

Normiert man eine Kathete zu 1 und hat die zweite Kathete die Länge ω, so hat die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1+\omega^2}$. Solche irrationalen Zahlen müssen auch zugelassen werden. Deshalb unternehmen wir einen kleinen Ausflug in die Algebra.

Ist K ein Körper mit $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$ und $\alpha \in K$, aber $\sqrt{\alpha} \notin K$, so setzen wir

$$K(\sqrt{\alpha}) := \{a + b\sqrt{\alpha} \mid a, b \in K\} \quad \text{(in Worten: „}K\text{ adjungiert }\sqrt{\alpha}\text{“).}$$

Man rechnet leicht nach, dass $K(\sqrt{\alpha})$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, d.h. die Addition und die Multiplikation in $\mathbb{R}$ führen aus $K(\sqrt{\alpha})$ nicht heraus. Aber es gilt noch mehr: Ist $x := a + b\sqrt{\alpha} \neq 0$, so muss $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ sein, und damit auch $a - b\sqrt{\alpha} \neq 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{a - b\sqrt{\alpha}}{(a+b\sqrt{\alpha})(a-b\sqrt{\alpha})} \\ &= \frac{a}{a^2 - b^2\alpha} - \frac{b}{a^2 - b^2\alpha}\sqrt{\alpha}, \end{aligned}$$

und diese Zahl liegt wieder in $K(\sqrt{\alpha})$. Das bedeutet, dass $K(\sqrt{\alpha})$ sogar ein Körper ist. Man bezeichnet diesen Körper als eine ***quadratische Körpererweiterung*** von K. Diese Erweiterung ist zugleich ein 2-dimensionaler K-Vektorraum, mit der Basis $\{1, \sqrt{\alpha}\}$.

Definition

Ein Element $x \in \mathbb{R}$ heißt ***pythagoräisch***, wenn es eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

der Form $K_i = K_{i-1}(\sqrt{1+\omega_i^2})$ mit $\omega_i \in K_{i-1}$ gibt, so dass x in K_n liegt.

Eine pythagoräische Zahl gewinnt man also aus rationalen Zahlen, indem man endlich oft die Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ und $\omega \mapsto \sqrt{1+\omega^2}$ anwendet.

Mit $\mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ bezeichnen wir die Menge aller pythagoräischen Zahlen.

Allgemein heißt ein angeordneter Körper K ***pythagoräisch***, falls mit jedem $a \in K$ das Element $1 + a^2$ in K eine Quadratwurzel besitzt. Dann ist natürlich auch $\mathbb{R}$ ein pythagoräischer Körper, und $\mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ ist der kleinste pythagoräische Unterkörper von $\mathbb{R}$. Manchmal wird $\mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$ auch als der ***Hilbert-Körper*** bezeichnet, weil er besonders von Hilbert studiert wurde. Dass es sich tatsächlich um einen Körper handelt, kann man sich relativ leicht überlegen.

Jetzt kann man das Modell $\mathscr{M}_4$ mit der Ebene

$$\mathscr{E}_p := \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}) \times \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q})$$

einführen. Die Geraden seien die Mengen der Gestalt

$$g = \{(x,y) \in \mathscr{E}_p \,:\, ax + by = r\}, \quad a,b,r \in \mathrm{Pyth}(\mathbb{Q}), \quad (a,b) \neq (0,0).$$

Man rechnet leicht nach, dass die Inzidenz-Axiome erfüllt sind. Die Größen a, b, r der Geraden durch zwei gegebene Punkte erhält man über rein rationale Operationen.

Die Zwischen-Beziehung vererbt sich von $\mathbb{R}^2$ auf $\mathscr{E}_p$, ebenso wie die Axiome (A.1) bis (A.4). Beim Pasch-Axiom (A.5) geht es um Schnittpunkte von Geraden. Im $\mathbb{R}^2$ existieren diese Schnittpunkte, und wenn die beteiligten Geraden durch Daten aus Pyth($\mathbb{Q}$) bestimmt werden, dann liegen auch die Schnittpunkte in $\mathscr{E}_p$. Also erfüllt die pythagoräische Ebene alle bisher eingeführten Axiome.

An dieser Stelle ist vielleicht nicht so recht klar, warum man sich nicht mit dem $\mathbb{R}^2$ als Modell begnügen soll. Allerdings ist klar, dass Euklid und seine Zeitgenossen keinerlei Vorstellungen von den reellen Zahlen hatten. Vielleicht war ihre Ebene doch eher so etwas wie $\mathscr{E}_p$?