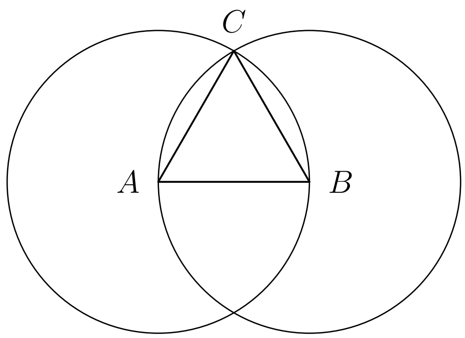
2.3 Sätze und Konstruktionen

Proposition 1. *Über einer gegebenen Strecke kann ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.*

Beweis: Die Formulierung ist etwas eigenartig. Aber viele der euklidischen Sätze sind rein algorithmische Konstruktionsvorschriften.



1. AB sei die gegebene Strecke.
2. Schlage Kreis um A mit Radius AB.
3. Schlage Kreis um B mit Radius AB.
4. Sei C ein Punkt, wo sich die Kreise treffen.
5. Verbinde C mit A zur Strecke AC.
6. Verbinde C mit B zur Strecke BC.
7. Es ist $AC = AB$ (Radien eines Kreises).
8. Es ist $BC = AB$ (Radien eines Kreises).
9. Also ist auch $AC = BC$. (Axiom)
10. Somit ist gezeigt, dass ABC ein gleichseitiges Dreieck ist. ∎

Die Formulierung ist in halbwegs moderner Sprache abgefasst, aber die einzelnen Schritte entsprechen dem Originalbeweis von Euklid.

Ein großes Problem stellt Schritt 4 dar, denn es ist durch nichts gesichert, dass sich die Kreise tatsächlich schneiden. Würde man als Modell der Ebene z.B. die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ wählen, so würde man keinen Schnittpunkt erhalten!

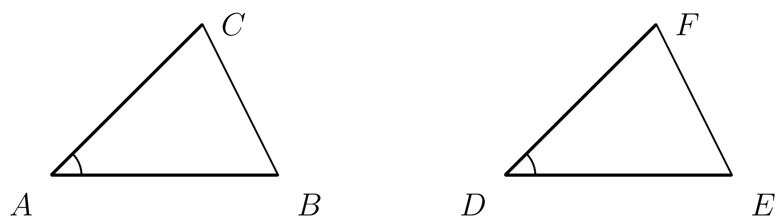
In modernen Axiomensystemen werden deshalb zusätzliche Postulate über die Anordnung von Punkten in der Ebene eingefügt. Dass das nötig ist, war den Mathematikern bis ins 19. Jahrhundert kaum bewusst geworden. Erst Moritz Pasch stellte 1882 ein Axiomensystem für die ebene Geometrie auf, das in seiner Logik wesentlich strenger als das euklidische war und insbesondere die Probleme der Anordnung von Punkten sehr viel besser berücksichtigte.

Proposition 2 zeigt, wie man eine gegebene Strecke an einem gegebenen Punkt anlegen kann.

Proposition 3 zeigt, wie man von zwei ungleichen Strecken die kleinere auf der größeren abtragen kann.

Proposition 4. *Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel eines Dreiecks entsprechend zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines anderen Dreiecks gleich sind, dann stimmen die Dreiecke auch in allen anderen einander entsprechenden Größen überein. (In moderner Sprache ist das der SWS-Kongruenzsatz)*

Beweis: Hier ist schon Euklids Original-Formulierung des Satzes, der auch die Fläche anspricht, etwas problematisch.



Sei $AB = DE$ und $AC = DF$, sowie $\angle BAC = \angle EDF$.

Nun schreibt Euklid:

> *Deckt man nämlich Dreieck ABC auf Dreieck DEF und legt dabei Punkt A auf Punkt D sowie die gerade Linie AB auf DE, so muss auch Punkt B den Punkt E decken, weil $AB = DE$ ist.*

Weil $\angle BAC = \angle EDF$ ist, muss dann auch AC die Linie DF decken. Also muss C den Punkt F decken. Weil zwei Strecken keine Fläche umfassen, deckt BC die Strecke EF.

Euklid sagt nie, wie die „Superposition“ (das Überdecken von Figuren) funktioniert oder welchen Axiomen sie genügt. Heute sprechen wir von Deck-Abbildungen, Bewegungen oder Kongruenzabbildungen. Im Prinzip kann man sie auch schon in den Beweisen von Euklid erkennen, aber die Beweisführung ist doch sehr verbesserungswürdig. ■

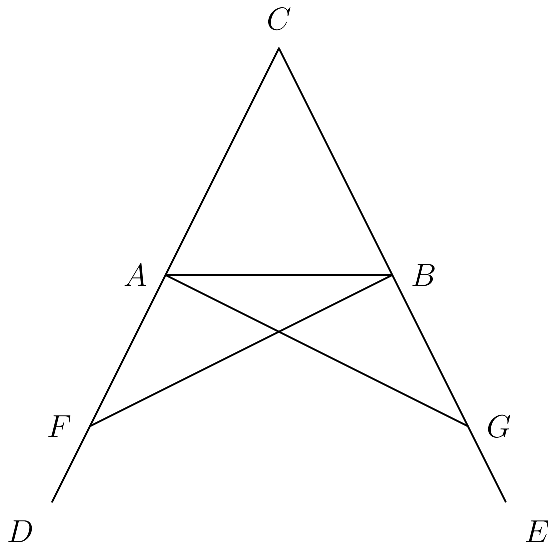
Proposition 4 ist übrigens der erste Satz, der keine Konstruktionsbeschreibung darstellt. Letzteres gilt auch für den folgenden Satz:

Proposition 5. *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.*

Beweis: Euklid bezeichnet meist eine Seite des Dreiecks als Grundlinie.

1. Es sei ABC das gleichschenklige Dreieck mit der Grundlinie AB und den Schenkeln $AC = BC$.
2. Man verlängere CA über A hinaus zu einer Strecke CD, und verlängere CB über B hinaus zu einer Strecke CE. Man kann annehmen, dass $CE \geq CD$ ist, also $BE \geq AD$ (denn sonst vertauscht man die Rollen von A und B bzw. D und E).

3. Man wähle F auf AD, $F \neq A, D$. Dann ist $AF < BE$.
4. Man trage AF auf BE bei B an. Das ergibt die Strecke $BG = AF$.
5. Verbinde A mit G und F mit B.
6. Es ist $CF = CG$ und $CA = CB$, sowie $\angle FCB = \angle ACG$, also $FBC \mathrel{\widehat{=}} AGC$ nach SWS. („$\widehat{=}$“ steht für „kongruent“ oder „deckungsgleich“)
7. Daher ist auch $FB = AG$ und $\angle CFB = \angle AGB$.
8. Da außerdem $AF = BG$ ist, ist $FBA \mathrel{\widehat{=}} AGB$ (nach SWS).



9. Also ist $\angle FBA = \angle GAB$, und außerdem ist $\angle FBC = \angle GAC$.
10. Durch Subtraktion erhält man nun: $\angle BAC = \angle ABC$.

Der recht komplizierte Beweis, den Euklid hier liefert, ist typisch für die deduktive Methode. Er beginnt mit irgendwelchen schwer durchschaubaren Aktionen und fügt dann Folgerung an Folgerung, bis irgendwann ganz überraschend das Ergebnis auftaucht. Man nennt so etwas einen *synthetischen Beweis*, im Gegensatz zum *analytischen Beweis*, bei dem die zu beweisende Aussage zerlegt und auf einfachere Aussagen zurückgeführt wird. Synthetische Beweise sind besonders schwer zu lesen und i.a. das Ergebnis einer vorangegangenen Analyse. ∎

Wegen der brückenartigen Figur spricht man auch von der „Eselsbrücke“ („pons asinorum“). Es ist ein wenig verwunderlich, dass Euklid einen derartig komplizierten Weg gewählt hat. Auf Pappus, den letzten bedeutenden griechischen Mathematiker in Alexandria (um 300 n.Chr.), geht der folgende einfache Beweis zurück:

Es ist $AC = BC$, $BC = AC$ und $\angle ACB = \angle BCA$. Also ist $ABC \mathrel{\widehat{=}} BAC$ und insbesondere $\angle BAC = \angle ABC$. Q.e.d!

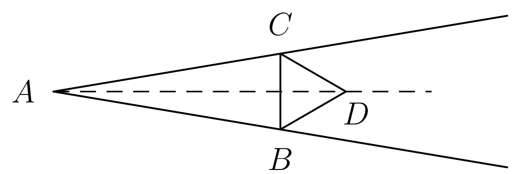
Proposition 6. *Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.*

Das ist die Umkehrung zu „Pons asinorum“. Euklid führt einen Widerspruchsbeweis. Wenn die Aussage des Satzes falsch wäre, könnte man ein Dreieck konstruieren, das in dem Ausgangsdreieck echt enthalten, aber auch zu ihm kongruent ist. Das widerspricht den Axiomen (4) und (5).

Proposition 7 und 8 liefern den SSS-Kongruenzsatz. Der Beweis wird wieder mit Superposition geführt und ist entsprechend undurchsichtig.

Proposition 9. *Ein gegebener Winkel kann halbiert werden.*

Die folgende Skizze zeigt die Beweisidee:

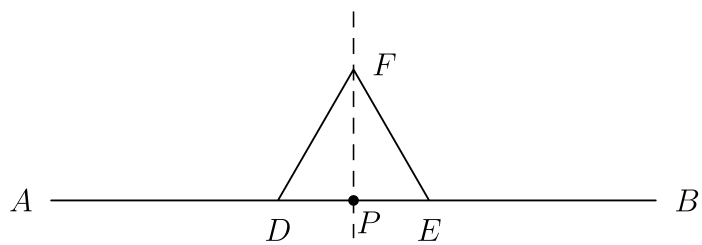


Sei $AB = AC$. Man errichte gleichseitig Dreieck CBD. Dann ist $ADC \mathrel{\widehat{=}} ADB$.

Proposition 10. *Eine gegebene Strecke kann halbiert werden.*

Zum Beweis errichtet man ein gleichseitiges Dreieck über der Strecke und halbiert den Winkel an der Spitze. Die Winkelhalbierende trifft den gesuchten Mittelpunkt der Strecke. Dass sie das tut, benutzt wieder mal eine unbewiesene Annahme über Lagebeziehugen.

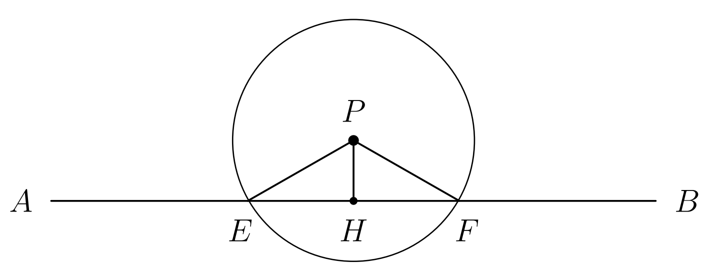
Proposition 11. *Auf einer gegebenen Strecke AB kann in einem gegebenen Punkt P eine Senkrechte errichtet werden.*



Dies ist die Stelle, wo ein rechter Winkel produziert wird, und wo sich Euklid auf sein Postulat IV bezieht, um das zu bestätigen. Zum Beweis trägt man auf der gegebenen Strecke auf beiden Seiten von P Punkte D und E im gleichen Abstand an, errichtet darüber ein gleichseitiges Dreieck DEF und halbiert wieder den Winkel an der Spitze. Die Winkelhalbierende trifft AB in P und steht dort auf AB senkrecht.

Proposition 12. *Von einem gegebenen Punkt aus kann man auf eine gegebene Gerade, auf der der Punkt nicht liegt, das Lot fällen.*

Den Beweis kann man sich im Stile der Schulgeometrie leicht überlegen (die Propositionen 1 bis 11 dürfen dabei benutzt werden). Allerdings werden dabei wieder allerlei Annahmen bezüglich der Anordnung der Punkte in der Ebene gemacht.



P ist der gegebene Punkt, AB die gegebene Gerade. Man zeichnet einen Kreis um P, der AB in zwei Punkten E und F trifft. H sei der Mittelpunkt der Strecke

EF. Die Dreiecke EHP und HFP sind kongruent, weil sie in allen drei Seiten übereinstimmen (SSS). Also ist $\angle EHP = \angle FHP$, und da es sich um Nebenwinkel handelt, sind es rechte Winkel. Damit ist PH das gesuchte Lot. ■

Proposition 13. *Nebenwinkel ergeben zusammen zwei Rechte.*

Zum Beweis betrachtet man Nebenwinkel über einer Geraden AC mit gemeinsamem Scheitel in einem Punkt B zwischen A und C. Dann errichtet man in B die Senkrechte BE. Durch Vergleichen, Subtrahieren und Addieren von Winkeln erhält man die gewünschte Aussage.

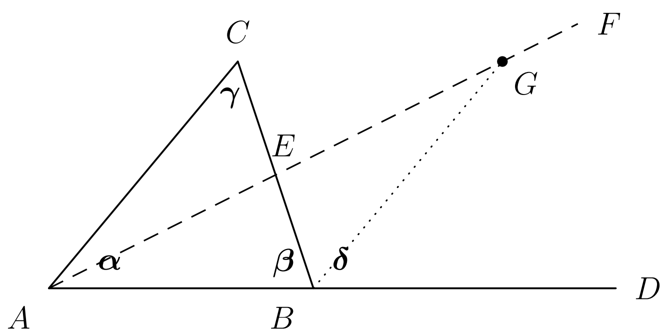
Proposition 14 ist die Umkehrung zu 13.

Proposition 15. *Scheitelwinkel sind gleich.*

Proposition 16. (Außenwinkelsatz)
An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel größer als jeder der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel.

Dieser Satz gilt als einer der Höhepunkte des ersten Bandes.

Beweis:
1. Gegeben sei das Dreieck ABC mit den Innenwinkeln α, β und γ.



2. Verlängere AB über B hinaus zu AD. Dadurch entsteht der Außenwinkel δ.
3. Halbiere BC und bezeichne den Mittelpunkt mit E.
4. Verlängere AE über E hinaus so weit zu AF, dass $EF > AE$ ist.
5. Schneide von EF eine Strecke $EG = AE$ ab und verbinde G mit B.
6. Es ist $\angle AEC = \angle BEG$ (Scheitelwinkel), also $AEC \,\widehat{=}\, BGE$ (SWS).
7. Also ist $\gamma = \angle EBG$, und da $\angle EBG < \delta$ ist, ist auch $\gamma < \delta$.
8. Analog zeigt man, dass α kleiner als der Scheitelwinkel von δ ist, und damit $\alpha < \delta$. ■

Der Beweis ist ein kleines Kabinettstück, denn er funktioniert erstaunlicherweise ohne Postulat V. Hier gibt es nur einen kleinen Kritikpunkt: Die Möglichkeit, AE über E hinaus so weit zu einer Strecke AF zu verlängern, dass $EF > AE$ ist, wird durch die Axiome Euklids nicht abgesichert. Tatsächlich würde dieses Argument bei Großkreisen auf der Einheitskugel nicht funktionieren. Manche Kommentatoren interpretieren allerdings das Kreisaxiom so, dass man hier bei E die Strecke $EF > AE$ (oder zumindest die Strecke $EG = AE$) antragen kann. In einem „reparierten“ Axiomensystem kann man den Außenwinkelsatz problemlos wie bei Euklid beweisen, und man braucht dazu tatsächlich kein Parallelenaxiom.

Auf die weiteren Sätze von Euklid soll hier zunächst nicht eingegangen werden. Erst mal müssen die Lücken im Axiomensystem geschlossen werden.