2.2 Axiomatische Mathematik

Die deduktive Methode funktioniert folgendermaßen: Der Beweis einer Aussage (A1) wird auf eine offensichtlichere Aussage (A2) zurückgeführt. Dann wird nach einer noch unbedenklicheren Aussage (A3) gesucht, aus der (A2) folgt, usw.

Irgendwann kommt man bei Aussagen an, die jeder als wahr akzeptiert. Das sind die Spielregeln, in der Mathematik nennt man sie ***Axiome*** oder ***Postulate***.

Dabei müssen immer wieder Begriffe erklärt werden, das ist der Sinn der ***Definitionen***. Aber in den Definitionen muss man wieder irgendwelche Wörter benutzen, und die müssen wieder definiert werden usw. Also muss man akzeptieren, dass gewisse Begriffe nicht definiert werden können. Solche Begriffe nennt man ***undefinierte Begriffe*** oder ***primitive Terme***. „Punkt“ und „Gerade“ sind z.B. solche primitiven Terme für die Geometrie. Die Aufgabe der Axiome ist es unter anderem, die Eigenschaften der primitiven Terme festzulegen.

Ein sogenanntes „materielles“ oder „klassisches“ axiomatisches System sieht nun folgendermaßen aus:

1. Festlegung der Grundbegriffe (der *primitiven Terme*).

2. Angabe einer Liste grundlegender Aussagen (der *Axiome*) über die primitiven Terme. Die Axiome sollten möglichst einfach gehalten werden, und über ihre Wahrheit sollte allgemeine Einigkeit herrschen.

3. Alle anderen benötigten Begriffe werden mit Hilfe der primitiven Terme und der Axiome erklärt (*Definitionen*).

4. Alle weiteren Aussagen (*Theoreme*, *Propositionen* usw.) werden aus den Axiomen oder aus vorher bewiesenen Aussagen logisch hergeleitet.

Beispiel: Der neue Multi-Kombi-Bachelor, kurz „MuKoBa“ genannt.

In Wuppertal soll 2016 mal wieder ein neuer Bachelor-Studiengang eingeführt werden. Der Studiengang soll sich aus vielen verschiedenen Fächern zusammensetzen, jedes Fach muss aber von mindestens einem Studenten belegt werden. Außerdem hat man folgende Regeln aufgestellt:

Axiom I: Jeder Student belegt mindestens ein Fach.

Axiom II: Zwei verschiedene Studenten belegen immer genau ein gemeinsames Fach.

Axiom III: Zu jedem Fach gibt es genau ein anderes Fach, so dass kein Student diese beiden Fächer belegt. (Man kann von „Komplementärfächern“ sprechen).

Die primitiven Terme sind „Student“, „Fach“ und „belegt“.

Außerdem werden Zahlwörter, logische Begriffe und alle diejenigen Wörter, die nötig sind, um aus den primitiven Termen vernünftige deutsche Sätze zu bilden, als bekannt vorausgesetzt und in der üblichen Bedeutung benutzt.

Aufgrund der vorgelegten Axiome kann man Sätze beweisen:

Satz 1: Jeder Student belegt mindestens zwei Fächer.

Beweis:

(1): Gegeben sei ein beliebiger Student S im neuen Studiengang (Hypothese).

(2): Es gibt ein Fach F, das von S belegt wird (Axiom I).

(3): Es gibt genau ein Komplementärfach G zu F (Axiom III).

(4): Sei T ein Student, der G belegt hat. Dann ist $T \neq S$ (logische Folgerung).

(5): Es gibt genau ein Fach H, das S und T beide belegen (Axiom II)

(6): Da T das Fach H belegt, nicht aber das Fach F, ist $H \neq F$ (logische Folgerung).

(7): Zusammenfassung: Es wurde gezeigt, dass es zwei verschiedene Fächer (nämlich H und F) gibt, die beide von S belegt werden. ■

Satz 2: Jedes Fach wird von mindestens 2 Studenten belegt.

Beweis:

(1): Sei F ein beliebiges Fach.

(2): Es gibt einen Studenten S, der F belegt hat.

(3): Nach Satz 1 gibt es ein Fach $G \neq F$, das ebenfalls von S belegt wird.

(4): Es gibt genau ein Komplementärfach H zu G (Axiom III).

(5): S hat das Fach H nicht belegt, weil S schon G belegt hat (logische Folgerung).

(6): Annahme, F wird nur von S belegt (Hypothese für einen Widerspruchsbeweis).

(7): Niemand studiert F und H gleichzeitig, weil S das Fach F als einziger belegt hat, aber nicht das Fach H (logische Folgerung).

(8): Es gibt genau ein Komplementärfach I zu H (Axiom III).

(9): Es ist $I = G$, weil nach (4) schon G Komplementärfach zu H ist, und $I = F$, weil nach (7) auch F komplementär zu H ist (logische Folgerung).

(10): Dann ist $G = F$ (logische Folgerung, Eigenschaft der Gleichheit).

(11): Weil nach (3) $G \neq F$ ist, wurde ein Widerspruch erzielt, die Annahme war falsch.

(12): Zusammenfassung: F wird von mindestens zwei Studenten belegt. ■

Man kann außerdem zeigen:

Satz 3: Es gibt mindestens 6 Fächer.

Satz 4: Jedes Fach wird von genau 2 Studenten belegt. Insgesamt gibt es genau 4 Studenten und 6 Fächer.

Die Beweise seien dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. Das Rektorat hat daraufhin wohl beschlossen, doch auf den neuen Studiengang zu verzichten.

Ein Axiomensystem braucht nicht „materiell" zu sein. Es kann sinnvoll sein, ohne dass die primitiven Terme mit ihren axiomatisch festgelegten Eigenschaften irgendwelchen Dingen in der Wirklichkeit entsprechen. **David Hilbert**, der 1899 in seinen „Grundlagen der Geometrie" ein modernes Axiomensystem vorstellte, sagte einmal:

> *Man muss jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen" „Tische, Bänke, Bierseidel" sagen können.*

Ein modernes Axiomensystem sollte folgende Eigenschaften besitzen:

A) **Widerspruchsfreiheit**

Die Widerspruchsfreiheit beweist man am besten durch Konstruktion eines Modells.

Allerdings ist dies nicht möglich, ohne die Widerspruchsfreiheit eines etwas primitiveren Systems als gegeben hinzunehmen (Kurt Gödel).

B) **Unabhängigkeit**

Kein Axiom soll aus den anderen hergeleitet werden können. Um zu zeigen, dass Axiom A von einem System S von Axiomen unabhängig ist, muss man ein Modell konstruieren, in dem alle Axiome von S gelten, nicht aber A.

C) **Vollständigkeit**

Ein System ist vollständig, wenn man kein unabhängiges Axiom hinzufügen kann (das nur die schon bekannten Terme benutzt), ohne Widersprüche zu erzeugen. Die Vollständigkeit eines Systems ist i.a. sehr schwer nachzuweisen.

D) **Kategorizität**

Ein Axiomensystem heißt *kategorisch*, wenn es widerspruchsfrei ist, und wenn je zwei Modelle „isomorph" sind, also eineindeutig aufeinander abgebildet werden können.

Die Axiome der Gruppentheorie sind nicht kategorisch, denn es gibt endliche und unendliche Gruppen. Das MuKoBa-System ist kategorisch, wie man sieht, wenn man Satz 4 bewiesen hat. Das Axiomensystem der euklidischen Geometrie nach Hilbert ist kategorisch, das von Euklid aber nicht, wie wir im Laufe der Vorlesung nachweisen werden. Lässt man das Parallelen-Axiom weg, ist auch das Hilbert'sche System nicht mehr kategorisch. Das ist das eigenliche Thema dieser Vorlesung.

Mögliche Schritte eines Beweises:

1. Nach Hypothese gilt ...,
2. Nach einem Axiom gilt ...,
3. Nach Definition gilt ...,
4. Nach einem vorangegangenen Schritt des Beweises gilt ...,
5. Nach einem früher bewiesenen Satz gilt ...,
6. Nach einer logischen Regel folgt ...,
7. Nach Annahme der verneinten Folgerung gilt ....

Beim letzten Schritt handelt es sich um die Einleitung eines Widerspruchsbeweises („reductio ad absurdum", kurz RAA). Um eine Implikation $A \implies B$ zu beweisen, zeigt man eine Implikation $A \wedge (\neg B) \implies C$, mit einer offensichtlich falschen Aussage C. Das ist nur möglich, wenn $A \wedge (\neg B)$ falsch ist. Da A als wahr vorausgesetzt wird, muss $\neg B$ falsch sein, also B wahr. Dies ist die stärkste Waffe, die dem Mathematiker zur Verfügung steht.

Beispiel von Euklid (7. Buch):

- Eine *Zahl* ist eine aus Einheiten zusammengesetzte Größe.

  (Die Eins galt bei den Griechen nicht als Zahl, aber man konnte eine Strecke als Einheit festlegen. Eine „Zahl" im obigen Sinne ist dann eine Strecke, die ganzzahliges Vielfaches der Einheitsstrecke ist).

- Eine *Primzahl* ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen lässt.

  (Eine Primzahl ist also eine Zahl, die außer der 1 keine echten Teiler besitzt).

  Proposition 20: *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*

(Wir sagen heute: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.* Aber die Griechen haben den Begriff „Unendlich" in der Mathematik nicht zugelassen, weder im Großen, noch im Kleinen. Also musste Euklid eine Formulierung finden, die den Gebrauch von „Unendlich" umgeht.)

Es seien Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ vorgelegt und der Größe nach sortiert, $q := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ und $x := q+1$. Ist x eine Primzahl, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist x keine Primzahl, so besitzt x wenigstens einen Primteiler y.

Annahme: y ist eine der vorgelegten Primzahlen. Dann teilt y die Zahl q und die Zahl x, also auch die Differenz $x - q = 1$. Aber das ist absurd! ∎

Der Inhalt der 13 Bücher der „Elemente“ umfasst folgende Themen:

I) Anfänge der ebenen Geometrie bis zum Lehrsatz des Pythagoras.

II) Polygone, geometrische Algebra (z.B. binomische Formel).

III) Kreislehre, aber ohne Inhalt und Umfang (erst von Archimedes gefunden).

IV) Reguläre Polygone.

V) Proportionenlehre nach Eudoxus (in Definition 4: „Axiom des Archimedes“).

VI) Ähnlichkeitslehre, Flächen, Anfänge der Theorie der Kegelschnitte (vollendet von Apollonius).

VII) Zahlentheorie (Primzahlen, ggT und kgV, „Euklidischer Algorithmus“ u.a.).

VIII) und

IX) Potenzen und Wurzeln, Primfaktorzerlegung, endliche geometrische Reihen.

X) Rechnen mit irrationalen Zahlen.

XI) Anfänge der Stereometrie.

XII) Rauminhalte, Exhaustions-Methode.

XIII) Die 5 regulären Polyeder, Kantenberechnungen, Beweis dafür, dass es keine weiteren gibt.

Die „Elemente“ haben kein Vorwort, keine Einführung, keine Motivation, keinen Kommentar und keine Erklärungen. Sie beginnen im 1. Buch mit 23 „Definitionen“, 5 „Postulaten“ und einigen „Axiomen“. Danach folgen unmittelbar die Sätze. In den weiteren Büchern gibt es noch allerlei Definitionen, aber keine Postulate oder Axiome mehr.

Schauen wir uns einige der Definitionen an:

Definitionen

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat.

   Wahrscheinlich ist dies der Versuch, einen undefinierbaren Begriff einzuführen. Eventuell gibt es einen Zusammenhang mit der Grundlagen-Krise um die nicht kommensurablen Größen.

2. Eine **Linie** ist eine Länge ohne Breite.

   Für den Aufbau einer axiomatischen Theorie ist so ein Satz ziemlich wertlos.

3. Die Enden einer Linie sind Punkte.

   Es gibt bei Euklid keine unendlich weit ausgedehnten Linien.

4. Eine Linie ist **gerade**, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.

   Hier wird der primitive Term „Gerade“ eingeführt, der bei Euklid mit dem Begriff „Strecke“ zusammenfällt. Die Erklärung ist schwer zu interpretieren.

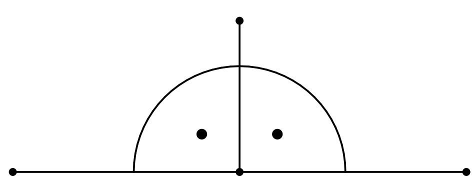
   Der Begriff „Ebene“ wird ähnlich eingeführt.

8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.

   Auf den ersten Blick wird hier der Begriff „Winkel“ als primitiver Term festgelegt, in Wirklichkeit haben wir hier die erste echte Definition. Es ist weder ein Winkel von 0° noch ein Winkel von 180° zugelassen. Nicht explizit ausgesprochen wird hier, dass von den beiden Winkeln, die zwischen den Strecken gebildet werden, stets der kleinere genommen werden soll.

   Es fällt auf, dass durch die Reihenfolge der Euklid'schen Definitionen eine Trennung zwischen der Einführung primitiver Terme und den echten Definitionen stattfindet.

10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**; und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot** auf) der, auf der sie steht.

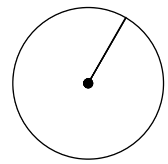
    Hier wird erklärt, wie man an einer beliebigen Stelle der Ebene einen rechten Winkel erzeugt.

11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist.

12. **Spitz** ist ein Winkel, wenn er kleiner als ein Rechter ist.

    Diese Definitionen werden erst dann sinnvoll, wenn geklärt ist, wie man Winkel miteinander vergleicht.

15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind.



Diese Definition enthält zahlreiche Annahmen, die nicht gesichert sind. Insbesondere wird benutzt, dass ein Kreis die Ebene in einen inneren und einen äußeren Bereich unterteilt, und dass Strecken vom Inneren zum Äußeren die Kreislinie treffen.

19. - 22. definiert verschiedene Figuren, insbesondere Dreiecke (auch gleichschenklige, gleichseitige, rechtwinklige, spitz- und stumpfwinklige Dreiecke), sowie Rechtecke, Quadrate und andere Vierecke.

Unter einem Dreieck versteht Euklid die Fläche des Dreiecks, zusammen mit den begrenzenden Strecken. Er argumentiert dann später in seinen Beweisen auch häufig mit der Fläche. Gemeint ist die Fläche mit all ihren unter Deck-Abbildungen invarianten Eigenschaften, insbesondere auch mit dem Flächeninhalt, ohne dass für letzteren eine saubere Erklärung gegeben wird.

23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten unbeschränkt verlängert, auf keiner einander treffen.

Diese Definition ist erstaunlich klar formuliert. In der deutschen Ausgabe von Clemens Thaer heißt es „ins Unendliche verlängert“ (ein Übersetzungsfehler).

Die grundlegenden Axiome bei Euklid sind seine berühmten

Postulate:

Gefordert soll sein:

I. Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;

II. Dass man eine berenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann;

III. Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.

IV. Dass alle rechten Winkel einander gleich sind;

V. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, sich dann die zwei geraden Linien bei beliebiger Verlängerung auf der Seite treffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

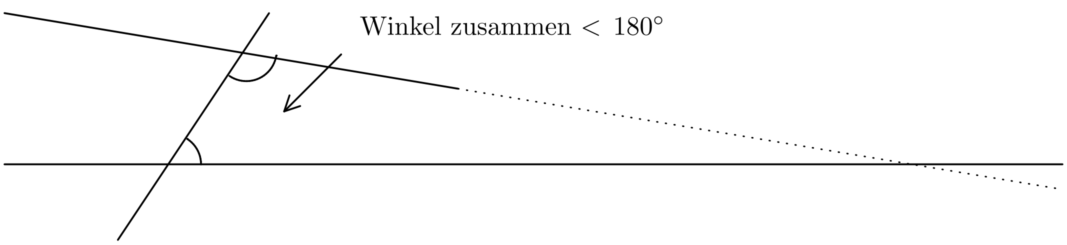
Postulat I führt die Möglichkeit ein, mit einem unmarkierten Lineal die Strecke zwischen zwei Punkten zu zeichnen. Die Definition der geraden Linie und der konstruktive Aspekt des ersten Postulats legen die Vermutung nahe, dass die **eindeutige** Existenz der Verbindungsstrecke gemeint war.

Da Strecken begrenzte Figuren sind, wird in Postulat II die Verlängerbarkeit einer Strecke über einen Endpunkt hinaus gefordert.

Postulat III führt den Zirkel ein. Zum Zeichnen eines Kreises muss ein Punkt P und eine bei P angelegte Strecke PQ als Radius gegeben sein. Der Zirkel kann nicht benutzt werden, um Strecken zu übertragen.

Postulat IV überrascht, weil hier einmal ausdrücklich die Eindeutigkeit gefordert wird. Der rechte Winkel kann somit als Eichmaß für Winkel genutzt werden. Aber warum ist das Postulat notwendig? Für den Streckenvergleich gibt man sich willkürlich eine Einheitsstrecke vor, die man dann an gewünschter Stelle anträgt. Das Übertragen von Winkeln beweist Euklid in Proposition 23. Er braucht aber schon vorher rechte Winkel, etwa in Proposition 11 (Errichten einer Senkrechten). Wie man solche Winkel erzeugt, sagt die Definition. Dass man immer das gleiche Ergebnis erhält, sagt Postulat IV, Proposition wird dafür nicht gebraucht.

Die Aufstellung von Postulat V gilt als große Leistung Euklids. Anschaulich stellt sich die Situation folgendermaßen dar:



Es fällt auf, dass die Formulierung viel komplizierter als bei den anderen Axiomen ist, und der Sachverhalt ist auch nicht unmittelbar einleuchtend, denn der geforderte Schnittpunkt kann so weit entfernt sein, dass man ihn nicht beobachten kann. Insofern entspricht Postulat V nicht den Vorstellungen, die man im Altertum von Axiomen hatte.

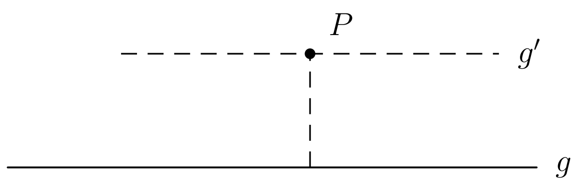
Von Anfang an gab es daher Zweifel, ob es sich wirklich um ein Axiom handelte, oder ob nicht vielmehr Euklid es nur nicht geschafft habe, die Aussage zu beweisen. Für diese Theorie sprach unter anderem, dass Euklid selbst gezögert hat, das Postulat anzuwenden. Er benutzt es zum ersten Mal in Proposition 29 und beweist vorher etliche Sätze mit großer Mühe, die mit Hilfe von Postulat V fast trivial wären. Ein weiteres Indiz für die Beweisbarkeit scheint die Tatsache zu sein, dass die Umkehrung ein Satz ist:

> PROPOSITION 17: *In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei Rechte.*

Das kann man auch so formulieren:

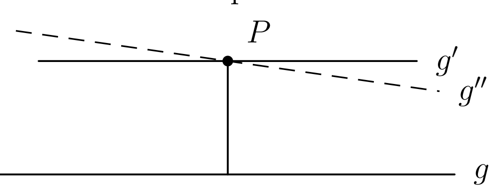
> *Wenn zwei sich schneidende Geraden von einer dritten getroffen werden, so bildet die schneidende mit den beiden anderen auf einer Seite innere Winkel, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.*

Warum wird Postulat V das „Parallelenpostulat“ genannt? Die Existenz einer Parallelen zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt wird in Proposition 31 bewiesen, aber ohne Postulat V.



Man fälle das Lot von P auf g und errichte dann auf diesem Lot in P die Senkrechte g'. An g und g' entstehen Wechselwinkel, die gleich und jeweils Rechte sind. Wären g und g' nicht parallel, so würden sie sich schneiden und so ein Dreieck mit zwei rechten Winkel entstehen. Das kann nicht sein, wie Euklid in Proposition 17 zeigt, mit Hilfe seines berühmten Außenwinkelsatzes (Proposition 16), auf den wir noch genauer eingehen werden.

Die Eindeutigkeit der Parallelen kann man nur mit Hilfe des Parallelenpostulats beweisen. Gäbe es eine weitere Parallele g'' zu g durch P., so müssten sich g'' und g treffen. Mit Hilfe des Parallelenpostulats konstruiert man einen Widerspruch.



In Proposition 32 wird u.a. gezeigt, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechten entspricht. Das geht nur mit der Information, dass Wechselwinkel an Parallelen gleich sind. Und das wiederum wird in Proposition 29 bewiesen. Die Annahme, dass diese Aussage falsch ist, führt nämlich zu einem Widerspruch zum Parallelenaxiom. Und nun ist der Weg frei für eine Behandlung der Geometrie in der Weise, wie man es von der Schule her kennt.

Eine Sammlung von logischen Regeln und besonders offensichtlichen Annahmen bilden die sogenannten

Axiome:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.

4. Was einander deckt, ist einander gleich.
5. Das Ganze ist größer als der Teil.
6. Zwei Strecken umfassen keine Fläche.

Die ersten drei Aussagen kann man leicht in Formeln schreiben:

$$\begin{aligned} a = c \quad &\wedge \quad b = c \quad \Longrightarrow \quad a = b \\ a = b \quad &\wedge \quad c = d \quad \Longrightarrow \quad a + c = b + d \\ a = b \quad &\wedge \quad c = d \quad \Longrightarrow \quad a - c = b - d. \end{aligned}$$

Dabei sind mit a, b, c, d stets „Größen" gleicher Art gemeint, wie etwa Strecken, Flächen oder Körper. Natürlich fehlen viele Relationen ähnlicher Art, die dann später benutzt werden. Es ist möglich, dass es im Original tatsächlich mehr waren.

Gleichheit bedeutet bei Euklid Deckungsgleichheit. Damit tritt ein neuer besonders problematischer undefinierter Begriff auf, mit dem Euklid dann auch erhebliche Schwierigkeiten hatte. Er versuchte, ihn zu vermeiden, wo es ging. Beim Beweis der „Kongruenzsätze" war das aber nicht möglich.

Aussage 5 beschreibt, wie Größen verglichen werden müssen. Man versucht, sie zur Deckung zu bringen, und wenn es sich dann zeigt, dass die eine Größe in der anderen enthalten ist, dann gilt sie als die kleinere. Alles wird über geometrische Konstruktionen abgewickelt.

Die 6. Aussage gehört nicht in allen Quellen zu den Axiomen, aber sie wird später in einem Beweis benötigt. Außerdem liefert sie die Eindeutigkeit der Streckenverbindung.