
2 Synthetische Geometrie

2.1 Die „Elemente“ des Euklid

Anfänge der Mathematik finden sich in **Mesopotamien**, um 3000 v.Chr., auf Tontafeln überliefert. Bekannt war z.B. schon der „Satz des Pythagoras“ als Rechenvorschrift, sowie Formeln zur Flächen- und Volumenberechnung.

Bei den **Ägyptern** gab es eher Sammlungen von Daumenregeln, überliefert auf Papyrus. Die Erhaltung der Original-Dokumente ist sehr viel schlechter.

Die Geometrie kam wohl über Ägypten nach **Griechenland**, das Wort „Geometrie“ stammt aus dem Griechischen und bedeutet „Erdvermessung“. Originale der Werke der griechischen Mathematiker sind so gut wie nicht erhalten. Aus der Sekundärliteratur weiß man recht gut über die „fertige“ griechische Mathematik Bescheid, aber kaum etwas über die Entstehungsgeschichte. Viele Vorstellungen darüber beruhen auf reinen Legenden.

Thales von Milet (ca. 624 – 548 v. Chr.) war zunächst Kaufmann und politischer Ratgeber, weit gereist, hatte Kontakte zu ägyptischen Priestern und babylonischen Astronomen. Eine Sonnenfinsternis soll er vorhergesagt haben. Aristoteles berichtet, dass Thales gezeigt habe, wie man mit der Wissenschaft reich werden könne. Er habe auf Grund seiner astronomischen Kenntnisse eine gute Ölernte vorausgesehen und schon im Winter alle Ölpresen der Umgebung gemietet und daraufhin einen hohen Gewinn erzielt.

Thales führte erstmals abstrakte Überlegungen in die Mathematik und speziell in die Geometrie ein. Er suchte nach allgemeinen Gesetzmäßigkeiten in der Natur und erkannte als einer der ersten die Notwendigkeit logischer Beweise. Er entdeckte, dass gewisse geometrische Fakten aus anderen hergeleitet werden können. Schon früh zog er sich aus dem öffentlichen Leben zurück, widmete sich ganz dem Studium der Philosophie und der Wissenschaften und begründete die Ionische Schule für Mathematik und Philosophie. Die ersten Beweise der folgenden Sätze werden ihm zugeschrieben:

- Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind gleich.
- Zwei Winkel und die von ihnen eingeschlossene Seite bestimmen ein Dreieck.
- Ein Winkel, der einem Halbkreis einbeschrieben ist, ist ein Rechter.

Angeblich hat er den Göttern einen Ochsen geopfert, als er den zuletzt genannten Satz gefunden hatte.

Mit Thales und seinen Zeitgenossen beginnt die griechische Mathematik, sich von der ägyptischen und babylonischen Mathematik abzusetzen.

Nicht weit von Milet liegt die Insel Samos.

Pythagoras von Samos (ca. 570 – 495 v. Chr.) reiste in Kleinasien, Ägypten und Mesopotamien, ging um 529 nach Sizilien und schließlich nach Kroton in Süditalien. Er gründete dort einen Orden, in dem es vor allem um harmonische Lebensführung ging, die Gesellschaft der „Pythagoräer“. Die Vollmitglieder bildeten eine sehr enge Gemeinschaft, sie lebten unter strenger Disziplin, teilten alles miteinander und hielten ihr Wissen vor der Außenwelt geheim. Es gab 4 Studiengebiete: Arithmetik, Harmonielehre, Geometrie und Astronomie. Welche mathematischen Sätze tatsächlich von den Pythagoräern und welche gar von Pythagoras selbst gefunden wurden, ist kaum noch rekonstruierbar. Sie wussten aber z.B. von der Existenz der 5 regulären Polyeder. Angeblich wurde ein Schüler ertränkt, weil er diese Erkenntnis Außenstehenden verraten habe. Aber vielleicht wurde diese Geschichte nur verbreitet, weil die Pythagoräer in der Bevölkerung nicht sehr beliebt waren.

Zum ersten Mal wurden nun größere Mengen mathematischer Sätze in eine logische Reihenfolge gebracht. Die „deduktive Methode“ von Thales wurde weiterentwickelt.

Aber die Pythagoräer entdeckten auch erstmals, dass Logik und Intuition nicht unbedingt übereinstimmen müssen:

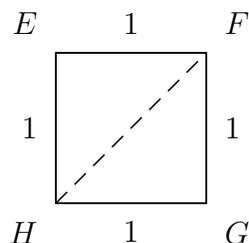
Zwei Strecken \overline{AB} und \overline{CD} wurden **kommensurabel** genannt, wenn es eine Vergleichsgröße δ und (positive ganze) Zahlen m und n gibt, so dass

$$\overline{AB} = n \cdot \delta \quad \text{und} \quad \overline{CD} = m \cdot \delta$$

ist. Dabei werden Strecken als „Größen“ betrachtet, die man addieren, subtrahieren und vergleichen kann, und δ soll eine Größe vom gleichen Typ sein. Für die frühen Pythagoräer war es intuitiv klar, dass jedes Paar von Strecken kommensurabel ist. Es musste einfach so sein, weil nach ihrer Philosophie alles mit ganzen Zahlen gemessen werden konnte. Aber dann musste für die Streckenverhältnisse folgendes gelten:

$$\overline{AB} : \overline{CD} = (n \cdot \delta) : (m \cdot \delta) = n : m.$$

Je zwei geometrische Längen mussten zueinander in einem rationalen Verhältnis stehen. Das führte aber zu Problemen. Man betrachte etwa folgendes Quadrat, dessen Seitenlänge gleich einer Maß-Einheit sein soll, die hier der Einfachheit halber mit 1 bezeichnet werden soll:



Nach Pythagoras ist $\overline{FH}^2 = \overline{FG}^2 + \overline{HG}^2 = 1 + 1 = 2$ (wobei auf der rechten Seite Größen vom Typ Fläche stehen). Andererseits muss das Verhältnis $\overline{FH} : \overline{FG}$ nach

dem Prinzip von der allgegenwärtigen Harmonie rational sein. Es muss also zwei Zahlen p und q geben, so dass $\overline{FH} : 1 = p : q$ ist, also $p = q \cdot \overline{FH}$, und man kann natürlich p und q so wählen, dass sie keinen gemeinsamen Teiler $\neq 1$ mehr besitzen.

Aus $\overline{FH}^2 = 2$ folgt nun: $p^2 = 2q^2$, d.h. p^2 ist **gerade**. Das geht nur, wenn auch p gerade ist, also $p = 2r$, mit einer geeigneten Zahl r . Doch dann ist

$$2q^2 = p^2 = 4r^2, \quad \text{also } q^2 = 2r^2.$$

Das bedeutet, dass q^2 und damit auch q gerade ist, und das kann nicht sein, denn p und q sollten ja keinen gemeinsamen Teiler haben.

Die Pythagoräer müssen von diesem Widerspruch stark konsterniert gewesen sein. Sie empfanden ihn als „logischen Skandal“. Wie sollten sie sich entscheiden?

Logik oder Intuition ?

Sie entschieden sich für die Logik und die Existenz irrationaler Zahlen (die übrigens in anderen Kulturkreisen auch schon früher entdeckt worden war)! Das Problem, mit irrationalen Zahlen zu rechnen, war damit natürlich noch nicht gelöst. Das blieb später dem Mathematiker **Eudoxus von Cnidus** (ca. 400 – 347 v.Chr.) vorbehalten, der mit seiner „Proportionenlehre“ ein geeignetes Instrument erfand. Zunächst allerdings führte die Krise der irrationalen Zahlen zu einer Ablösung der Zahl als Mittelpunkt des Universums, und es begann eine 2000 Jahre lange Vorherrschaft der Geometrie.

Wir werden später sehen, dass die Intuition nicht vollständig aus der Mathematik verbannt wurde. Z.B. wurden intuitiv als wahr erkannte Axiome als Grundannahmen mathematischer Theorien akzeptiert, und natürlich wurde die Intuition benutzt, um Beweisideen zu entwickeln. Die Strenge der Beweise stützte sich aber allein auf die Logik. Insbesondere bekam man später alle Phänomene, die mit dem Unendlichen zu tun haben, nur mit dem logischen Prinzip des Widerspruchsbeweises in den Griff.

Hippokrates von Chios (nicht der Mediziner!) lebte um 430 v.Chr. Er befasste sich mit dem Problem der Quadratur des Kreises und entdeckte als einer der ersten, dass die Kreisfläche proportional zum Quadrat des Durchmessers ist. Er schrieb eines der ersten mathematischen Lehrbücher mit dem Titel „Elemente“, und er benutzte auch als einer der ersten Buchstaben zur Bezeichnung geometrischer Objekte.

Während die pythagoräische Schule an Bedeutung verlor, entwickelte sich in Athen ein neues Zentrum griechischer Wissenschaft. Die berühmte **Akademie** des **Platon** (ca. 429 – 348 v.Chr.) zog viele Mathematiker und Philosophen an. Da **Kreis** und **Gerade** als elementarste und zugleich vollkommenste geometrische Formen

betrachtet wurden, ließ man nur noch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu. Viele Ergebnisse der Athener entstanden beim vergeblichen Bemühen, die drei klassischen Probleme zu lösen:

- Quadratur des Kreises
- Dreiteilung des Winkels
- Würfelverdopplung (sog. „Delisches Problem“)

Alle diese drei Probleme sind mit Zirkel und Lineal unlösbar, aber der Beweis dafür konnte erst in der Moderne erbracht werden.

Einer der bedeutendsten Schüler Platons war **Aristoteles** (ca. 384 - 322 v.Chr.). Er trat schon in jungen Jahren in die Akademie ein, wo er blieb, bis er als Lehrer des jungen Alexander von Makedonien eingestellt wurde. Später kehrte er nach Athen zurück und gründete sein eigenes Institut, das Lykeion. Aristoteles ist Begründer der formalen Logik, sein Einfluss auf die Wissenschaft im späten Mittelalter war enorm.

Den Elementen des Hippokrates folgten noch viele „Elemente“, und die Serie gipfelte schließlich in den berühmten „Elementen“ des **Euklid**.

Nach dem Tode Alexanders des Großen (323 v.Chr.) wurde einer seiner führenden Generale, Ptolemäus, Gouverneur von Ägypten, und später König. Er vollendete den Aufbau der neuen Hauptstadt Alexandria, die sich sehr schnell zu einem Haupthandelszentrum entwickelte und für fast 1000 Jahre ein Mittelpunkt hellenistischer Kultur blieb. Unter den Ptolemäern lebten zeitweise 1 Million Menschen in Alexandria.

Um 300 v.Chr. wurde eine Universität gebaut, das sogenannte „Museion“. Die führenden Gelehrten der Zeit wurden eingeladen. Sie hatten Gelegenheit zu forschen, bekamen Zugang zu den besten Bibliotheken und konnten mit anderen Kollegen diskutieren. Für ihren Lebensunterhalt war gesorgt, sie wurden gut bezahlt und ihre einzige Verpflichtung bestand darin, regelmäßig Vorlesungen zu halten.

Einer der ersten Wissenschaftler in Alexandria muss Euklid gewesen sein. Über seine Person ist so gut wie nichts bekannt, aber er war es, der die „Elemente“ zusammenstellte, das einflussreichste Lehrbuch in der Geschichte der Zivilisation. Die „Elemente“ enthalten die wichtigsten mathematischen Fakten, die zu jener Zeit bekannt waren, organisiert in 13 Bänden. Die ersten 6 Bücher blieben 2000 Jahre lang die übliche Einführung in die Geometrie. Sie sind in über 1700 Ausgaben erschienen, bis ins 19. Jahrhundert stellten sie nach der Bibel das verbreitetste Buch der Erde dar.

Dabei stammt sicherlich viel von dem Material aus früheren Quellen. Die große Leistung des Autors bestand in der hervorragenden logischen Anordnung der Sätze

und der Entwicklung der Beweise. Euklid vereinigte eine Sammlung isolierter Entdeckungen zu einem einzigen gewaltigen deduktiven System, das auf wenigen Postulaten, Axiomen und Definitionen beruht.

Man muss sich aber klar machen, was es bedeutet, wenn man von den „Elementen“ des Euklid spricht: Schon ihre Entstehung ist unklar! Vielleicht handelte es sich nur um Mitschriften seiner Schüler. Da das Werk sehr rasch zur Standard-Einführung in die Geometrie wurde, mussten viele Kopien angefertigt werden. Jede solche handgemachte Abschrift kann sich schon wieder von der Vorlage unterscheiden haben. Änderungen im Text häuften sich wahrscheinlich im gleichen Maße, in dem Kopien und Kopien von Kopien über den Mittelmeerraum verteilt wurden, und das Jahrhunderte lang.

Fast alle bekannten Versionen stammten von einer redigierten Ausgabe von **Theon von Alexandria** (um 370 *nach* Chr.) ab. Das war schon fast 700 Jahre nach Euklid. Im Jahre 641 wurde Alexandria von den Muslimen eingenommen und die Bibliothek endgültig zerstört (nachdem die Christen zuvor schon ihren Teil dazu beigetragen hatten). Ungefähr 400 Jahre nach Theon wurde eine Kopie (oder die Kopie einer Kopie . . .) ins Arabische übersetzt. Damals war Bagdad eines der größten Zentren der Wissenschaften, und dort wurde erstmals die Algebra stärker vorangetrieben.

Über Sizilien und Spanien kam das arabische Wissen wieder nach Europa. Um 1120 wurde eine Kopie der arabischen Version von dem englischen Philosophen und Mönch **Adelard of Bath** ins Lateinische übersetzt. Er hatte auf seinen Reisen mathematische Lektionen in Cordoba gehört und dort die arabische Ausgabe der „Elemente“ erhalten.

150 Jahre später gab der italienische Wissenschaftler **Johannes Campanus** eine neue Übersetzung heraus, die andere arabische Quellen benutzte und etwas klarer und vollständiger war. Diese Version war schließlich auch Grundlage für die erste 1482 in Venedig erschienene gedruckte Auflage. Wegen der Schwierigkeit, die Figuren zu setzen, hatte die erste Drucklegung so lange auf sich warten lassen.

1808 entdeckte der französische Gelehrte **François Peyrard** in der vatikanischen Bibliothek eine vollständige Handschrift, die auf ältere und bessere Unterlagen als die von Theon zurückging, und in der die theonische Fassung erwähnt wurde. Der dänische Philologe **Johan Ludvig Heiberg** benutzte nun die vorhandenen Versionen, um eine möglichst originalgetreue griechische Version von Euklids „Elementen“ zu rekonstruieren. Sie wurde zwischen 1883 und 1888 veröffentlicht und bildete die Basis für alle späteren Übersetzungen, z.B. die von **Sir Thomas Little Heath** ins Englische (1908).

Bereits 1562 erschien die erste deutsche Übersetzung, die erste brauchbare erstellte **Johann Friedrich Lorenz** (1738 – 1807) zwischen 1773 und 1781 in Halle. Heute benutzen wir hauptsächlich die deutsche Übersetzung von **Clemens Thaer** (1883 – 1974). Der arbeitete zunächst an der Universität und später im Schuldienst, bis

er 1939 wegen seiner ablehnenden Haltung gegenüber dem Nazi-Regime entlassen wurde. Nach dem Krieg wirkte er wieder als anerkannter Lehrer. Seine Euklid-Übersetzung, die sich stark an die Vorbilder von Heiberg und Heath hielt, entstand zwischen 1931 und 1940.

Kurz sollte noch darauf eingegangen werden, wie sich die griechische Mathematik nach Euklid weiterentwickelte:

Eratosthenes (ca. 276 – 194 v.Chr.) war einer der gelehrtesten Männer der Antike. Er ist bekannt wegen seiner relativ genauen Ermittlung des Erdumfanges, aber auch wegen vieler Beiträge zur Mathematik (z.B. die Siebmethode zur Bestimmung von Primzahlen).

Noch bekannter ist **Archimedes** (ca. 285 – 212 v.Chr.), der größte Mathematiker der Antike, zu vergleichen mit Gauß und Newton. Neben vielem anderen entwickelte er gewisse Vorstufen zur Integralrechnung.

Schließlich ist noch **Apollonius von Perge** (ca. 260 – 200 v.Chr.) zu nennen, mit seinen umfangreichen Untersuchungen über Kegelschnitte.

Um 200 v.Chr. war die Mathematik auf einer Stufe angekommen, von der aus mit den alten Hilfsmitteln (also ohne Infinitesimalrechnung) ein Höhersteigen kaum mehr möglich war.

Zeittafel:

Zwischen 1900 und 1000 v.Chr. wanderten die Stämme der Dorer und Ionier in das Gebiet des heutigen Griechenlands ein. Um ca. 800 v.Chr. entstanden Homers Dichtungen „Ilias“ und „Odyssee“. Als der Platz knapp wurde, begannen die Griechen, im Rahmen der „großen Kolonisation“ Siedlungen in Kleinasien, Nordafrika, Süditalien und Südfrankreich zu gründen.

Mathematik	Zeit	Politisches Geschehen
Thales	ca. 600 v.Chr.	Solons Gesetzgebung
Pythagoras	ca. 500 v.Chr.	Gründung der römischen Republik
Platon	ca. 400 v.Chr.	Perikles
Aristoteles	ca. 350 v.Chr.	Alexander der Große erobert ein Weltreich
Euklid	ca. 300 v.Chr.	Ptolemaios regiert in Alexandria
Archimedes	ca. 250 v.Chr.	Rom führt den 1. punischen Krieg
Theon von Alexandria	ca. 370 n.Chr.	Christliche Kaiser in Konstantinopel