1.5 Kongruenz und Ähnlichkeit

Definition
Sei $\mathbb{A}^n$ der affine Standardraum zum Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ heißt ***Isometrie***, falls $d(F(X), F(Y)) = d(X, Y)$ für alle $X, Y \in \mathbb{A}^n$ gilt.

Es ist offensichtlich, dass alle Isometrien injektiv sind: Ist $F(P) = F(Q)$, so ist $d(P, Q) = d(F(P), F(Q)) = 0$, also $P = Q$.

Ist O der Nullpunkt, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ und $\mathbf{w} = \overrightarrow{OQ}$, so ist $d(P, Q) = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$.

Jeder Abbildung $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ entspricht eine Abbildung $\widetilde{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (und umgekehrt) mit $F(X) = O + \widetilde{F}(\overrightarrow{OX})$, also $F(X) - O = \widetilde{F}(X - O)$. Ist F eine Isometrie, so ist auch $\widetilde{F}$ eine Isometrie, denn für $\mathbf{v} = \overrightarrow{OX}$ und $\mathbf{w} = \overrightarrow{OY}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{F}(\mathbf{w}) - \widetilde{F}(\mathbf{v})\| &= \|\overrightarrow{OF(Y)} - \overrightarrow{OF(X)}\| = d(F(X), F(Y)) \\ &= d(X, Y) = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Es reicht also, Isometrien im $\mathbb{R}^n$ zu untersuchen.

1.5.1 Beispiele

1.5.1.1. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist eine Isometrie.

1.5.1.2. Sind F_1, F_2 zwei Isometrien, so ist auch $F_2 \circ F_1$ eine Isometrie.

1.5.1.3. Ist $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, so ist die Translation $T : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$ eine Isometrie. Es ist nämlich

$$\|T(\mathbf{y}) - T(\mathbf{x})\| = \|(\mathbf{y} + \mathbf{v}) - (\mathbf{x} + \mathbf{v})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Ende der Beispiele

Ist $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige Isometrie und $\mathbf{v} = F(\mathbf{0})$, so ist auch $\widetilde{F}(\mathbf{x}) := F(\mathbf{x}) - \mathbf{v}$ eine Isometrie. Also setzt sich jede Isometrie aus einer Translation und einer speziellen Isometrie zusammen, die $\mathbf{0}$ auf $\mathbf{0}$ abbildet.

Satz: *$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Isometrie, wenn es eine orthogonale Matrix A und einen Vektor $\mathbf{v}$ gibt, so dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A^\top + \mathbf{v}.$$

Beweis: 1) Sei F eine Isometrie. Man kann voraussetzen, dass $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ist. Weil

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\big) = \frac{1}{2}\big(d(\mathbf{0}, \mathbf{x})^2 + d(\mathbf{0}, \mathbf{y})^2 - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2\big)$$

ist, ist das Skalarprodukt invariant unter F.

Ist $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ die Basis der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$, so ist $\{F(\mathbf{e}_1), \dots, F(\mathbf{e}_n)\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, denn es ist

$$\|F(\mathbf{e}_i)\|^2 = F(\mathbf{e}_i) \bullet F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_i = 1 \;\text{ und }\; F(\mathbf{e}_i) \bullet F(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \bullet \mathbf{e}_j = 0 \text{ für } i \neq j.$$

Es gibt reelle Zahlen a_{ji}, so dass $F(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}\mathbf{e}_j$ ist, für $i = 1, \dots, n$. Sei $A := (a_{ij})$ die aus diesen Zahlen gebildete Matrix. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\delta_{ik} &= F(\mathbf{e}_i) \bullet F(\mathbf{e}_k) = \Big(\sum_{j=1}^n a_{ji}\mathbf{e}_j\Big) \bullet \Big(\sum_{l=1}^n a_{lk}\mathbf{e}_l\Big) \\
&= \sum_{j,l} a_{ji}a_{lk}\,\delta_{jl} = \sum_{j=1}^n a_{ji}a_{jk} \\
&= \sum_{j=1}^n (A^\top)_{ij} \cdot (A)_{jk} = \big(A^\top \cdot A\big)_{ik},
\end{aligned}$$

also $A^\top \cdot A = E_n$ (= Einheitsmatrix). Damit ist A eine ***orthogonale Matrix***.[1]

Nun sei $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch $f_A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot A^\top$ definierte lineare Abbildung zur Matrix A. Es soll gezeigt werden, dass $F = f_A$ ist, dass also F insbesondere linear ist.

Ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i \;\text{ mit }\; x_i = \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_i,$$

und auf der anderen Seite gibt es auch eine Darstellung

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^* F(\mathbf{e}_i) \;\text{ mit irgendwelchen Koeffizienten } x_i^*.$$

Weil die $\mathbf{e}_i$ und die $F(\mathbf{e}_i)$ jeweils Orthogonalbasen bilden, folgt jetzt aber:

$$x_i^* = F(\mathbf{x}) \bullet F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{e}_i = x_i, \text{ also } F\Big(\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^n x_i F(\mathbf{e}_i).$$

Hieraus würde schon direkt folgen, dass F linear ist, wir schauen aber noch die Matrizen-Darstellung an. Es ist

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i F(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji}\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big)\mathbf{e}_j$$

[1] Am Ende des Kapitels finden Sie einen kurzen Anhang über Matrizen und den Zusammenhang mit linearen Abbildungen.

und andererseits $f_A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{e}_j$ mit

$$c_j = f_A(\mathbf{x}) \bullet \mathbf{e}_j = (\mathbf{x} \cdot A^\top)_j = \sum_{i=1}^{n} x_i (A^\top)_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}.$$

Damit ist $F = f_A$.

2) Die Umkehrung folgt sehr einfach. Es ist $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^\top$ und deshalb

$$(\mathbf{x} \cdot A^\top) \bullet (\mathbf{y} \cdot A^\top) = \mathbf{x} \cdot A^\top \cdot A \cdot \mathbf{y}^\top = \mathbf{x} \cdot E_n \cdot \mathbf{y}^\top = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}.$$

Also lässt f_A das Skalarprodukt (und damit auch die Abstände) invariant. ■

1.5.2 Beispiele

1.5.2.1. Sei $n = 2$. Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist die Matrix

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

orthogonal. Also ist jede Drehung (um den Nullpunkt) $R_\alpha(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot D_\alpha^\top$ eine Isometrie des $\mathbb{R}^2$.

1.5.2.2. Ist $n = 2$, so ist die Spiegelung

$$S(x_1, x_2) := (x_1, -x_2) = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^\top$$

(an der x-Achse) eine Isometrie.

Ende der Beispiele

Definition

Zwei Teilmengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^2$ heißen ***kongruent***, falls es eine Isometrie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(M_1) = M_2$ gibt.

Eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt ***zentrische Streckung***, falls es einen Punkt $\mathbf{m}$ und eine Zahl $k > 0$ gibt, so dass gilt:

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{m} + k(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \quad \text{(und damit insbesondere } g(\mathbf{m}) = \mathbf{m}).$$

Eine Abbildung $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt ***Ähnlichkeitsabbildung***, falls sie sich aus Isometrien und zentrischen Streckungen zusammensetzt. Zwei Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ heißen ***ähnlich***, falls sie durch eine Ähnlichkeitsabbildung ineinander überführt werden.

Satz: *Seien* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *zwei Punkte im* $\mathbb{R}^n$, *sowie* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine Isometrie. Dann bildet* F *die Gerade durch* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *auf die Gerade durch* $F(\mathbf{x})$ *und* $F(\mathbf{y})$ *ab. Liegt* $\mathbf{z}$ *zwischen* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$, *so liegt auch* $F(\mathbf{z})$ *zwischen* $F(\mathbf{x})$ *und* $F(\mathbf{y})$.

Beweis: Die Verbindungsgerade durch $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist die Menge $L = \{\mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) : t \in \mathbb{R}\}$. Ist $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot A^\top + \mathbf{v}$, so ist

$$F(\mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot A^\top + t(\mathbf{y} \cdot A^\top - \mathbf{x} \cdot A^\top) + \mathbf{v} = F(\mathbf{x}) + t(F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x})).$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

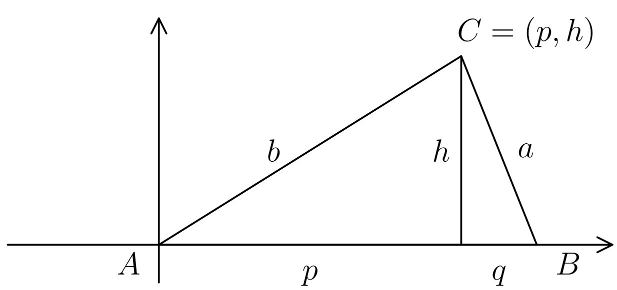
Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen ***kongruent***, wenn man ihre Ecken so mit A, B, C bzw. A', B', C' bezeichnen kann, dass es eine Isometrie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, die A auf A', B auf B' und C auf C' abbildet. Offensichtlich werden dann auch die entsprechenden Seiten aufeinander abgebildet, und weil F Abstände invariant lässt, ist $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$. Mit Hilfe der Cosinussätze folgt außerdem, dass auch die entsprechenden Winkel gleich sind. Umgekehrt sind zwei Dreiecke schon dann kongruent, wenn eine der folgenden Aussagen wahr ist:

1. **SSS**: Alle drei Seiten sind gleich.
2. **SWS**: Zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel sind gleich.
3. **SSW**: Zwei Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel sind gleich.
4. **WSW**: Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel sind gleich.

Beweis: 1) Es soll gezeigt werden: Ist $a = a'$, $b = b'$ und $c = c'$, so gibt es eine Isometrie, die A auf A', B auf B' und C auf C' abbildet.

Durch Translationen kann man zunächst erreichen, dass $A = A' = (0, 0)$ ist, und durch Drehungen um den Nullpunkt kann man erreichen, dass $B = B' = (c, 0)$ ist. O.B.d.A. liege nun C in der oberen Halbebene (von C' kann man das dann noch nicht sagen). Weil auch die sich entsprechenden Winkel gleich sind, sind entweder beide Dreiecke spitzwinklig oder beide stumpfwinklig. Es sei hier der spitzwinklige Fall angenommen, der andere wird analog behandelt.

Sei h die Höhe von C auf c, p und q die Hypotenusen-Abschnitte mit $p + q = c$. Dann ist $C = (p, h)$, und das Dreieck ABC sieht folgendermaßen aus:



Nun kann man p und h berechnen. Es ist nämlich $h^2 = b^2 - p^2$ und $a^2 = q^2 + h^2 = (c-p)^2 + h^2 = c^2 + p^2 - 2pc + h^2 = c^2 + b^2 - 2pc$, also

$$p = \frac{1}{2c}(c^2 + b^2 - a^2) \quad \text{und} \quad h = \pm\sqrt{b^2 - p^2}.$$

Weil es sich um positive Längen handelt, muss bei h das Plus-Zeichen gewählt werden.

Die gleiche Rechnung ergibt sich beim Dreieck $A'B'C'$. Entweder ist $C = C'$, oder die beiden Punkte liegen spiegelbildlich zur x-Achse. Wenn sich aber C und C' auf verschiedenen Seiten der x-Achse befinden, dann wendet man die Spiegelung an der x-Achse an, die C auf C' abbildet und A und B fest lässt.

2) Sind etwa a, b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben, so liefert der Cosinussatz mit der Formel

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

die fehlende dritte Seite c. Der Rest folgt mit (1).

3) Gegeben seien die Seiten c und a, sowie der Winkel α. Dann stellt der Cosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ eine quadratische Gleichung für die unbekannte Seite b dar:

$$b^2 + (-2c\cos\alpha)\cdot b + (c^2 - a^2) = 0.$$

Die Lösungsformel für die quadratische Formel liefert

$$b = \frac{1}{2}\big(2c\cos\alpha \pm \sqrt{4c^2\cos^2\alpha - 4(c^2 - a^2)}\big) = c\cos\alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha}\,.$$

Nach Voraussetzung ist $a > c$ (weil α der größeren Seite gegenüberliegen soll). Dann ist erst recht $a > c\sin\alpha$ und daher $a^2 - c^2\sin^2\alpha > 0$. Die Gleichung hat also zwei Lösungen. Allerdings sind nur positive Lösungen brauchbar. Die Lösung $b = c\cos\alpha - \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\alpha}$ wird nur dann ≥ 0, wenn $c^2\cos^2\alpha \geq a^2 - c^2\sin^2\alpha$ ist. Dafür müsste aber $c \geq a$ sein, und das war gerade ausgeschlossen. Das zeigt, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung gibt. Und aus den Seiten a, b und c gewinnt man wieder alle anderen Größen des Dreiecks.

4) Gegeben seien die Winkel α und β, sowie die dazwischen liegende Seite c. Da $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ist, erhält man aus α und β den Winkel γ. Nun kommt man am besten mit dem „Sinussatz“ weiter, denn der besagt:

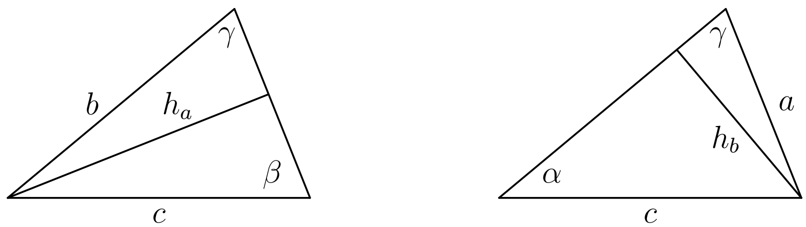
$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a}\,.$$

Sind also die Winkel und die eine Seite c bekannt, so kann man daraus a und b berechnen, und dann wieder (1) anwenden.

Nun bleibt noch der Beweis des Sinussatzes nachzutragen.

Zeichnet man im Dreieck die Höhen h_a von A auf a und h_b von B auf b ein, so gilt:

$$b \sin\gamma = h_a = c \sin\beta \quad \text{und} \quad a \sin\gamma = h_b = c \sin\alpha.$$

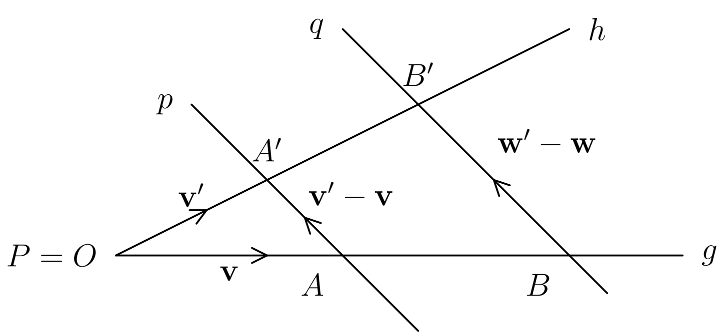


Daraus folgt offensichtlich der Sinussatz. ■

Die Strahlensätze: *Wenn zwei sich in einem Punkt P schneidende Geraden g und h von zwei parallelen Geraden p und q in Punkten A, A' bzw. B, B' getroffen werden, dann gilt:*

1. $d(P, A) : d(A, B) = d(P, A') : d(A', B')$,
2. $d(P, A) : d(P, B) = d(P, A') : d(P, B')$,
3. $d(A, A') : d(B, B') = d(P, A) : d(P, B)$.

Beweis:



Wir schreiben die Geraden vektoriell. Dabei sei $P = O$ der Nullpunkt, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{v}' = \overrightarrow{OA'}$ und $\mathbf{w}' = \overrightarrow{OB'}$. Dann gilt:

$$g = \{\mathbf{x} = t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{und} \quad h = \{\mathbf{x} = t\mathbf{v}' \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Es gibt Zahlen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\mathbf{w} = t_1\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}' = t_2\mathbf{v}'$ ist. Dann ist $\mathbf{w}' - \mathbf{w} = t_2\mathbf{v}' - t_1\mathbf{v}$, und es gibt einen Faktor s mit $\mathbf{w}' - \mathbf{w} = s(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$ (weil p und q parallel sind). Weil sich g und h schneiden, sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}'$ linear unabhängig. Aus der Gleichung $t_2\mathbf{v}' - t_1\mathbf{v} = \mathbf{w}' - \mathbf{w} = s\mathbf{v}' - s\mathbf{v}$ (also $(t_2 - s)\mathbf{v}' - (t_1 - s)\mathbf{v} = 0$) folgt dann, dass $t_2 - s = t_1 - s = 0$ ist, also $t_1 = t_2 = s$. Damit ist

$$d(O, B) : d(O, A) = t_1 : 1 = t_2 : 1 = d(O, B') : d(O, A') = s : 1 = d(B', B) : d(A', A)$$

und

$$d(O, A) : d(A, B) = 1 : (t_1 - 1) = 1 : (t_2 - 1) = d(O, A') : d(A', B').$$

Damit ist alles gezeigt. ■

> **Satz:** *Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind genau dann ähnlich, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:*
>
> 1. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ *und* $\gamma = \gamma'$.
> 2. $a : b = a' : b'$, $a : c = a' : c'$ *und* $b : c = b' : c'$.

Beweis: a) Sind die sich entsprechenden Winkel gleich, so kann man eine Isometrie finden, die A' auf A, den Strahl $\overrightarrow{A'B'}$ auf den Strahl $\overrightarrow{AB}$ und den Strahl $\overrightarrow{A'C'}$ auf den Strahl $\overrightarrow{AC}$ abbildet. Weil $\beta' = \beta$ ist, wird dabei die Gerade $B'C'$ auf eine Parallele zu BC abgebildet. Wenn nun $c = c'k$ ist, dann ist nach dem Strahlensatz auch $b = b'k$ und $a = a'k$. Damit ist $a/b = a'/b'$, $a/c = a'/c'$ und $b/c = b'/c'$, und außerdem gehen die Dreiecke (bis auf die zuvor angewandte Isometrie) durch eine zentrische Streckung auseinander hervor. Also sind sie ähnlich.

b) Die zweite Bedingung bedeutet, dass es ein $k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a/a' = b/b' = c/c' = k$ ist, also $a = a'k$, $b = b'k$ und $c = c'k$. Aus dem Cosinussatz folgt dann, dass die entsprechenden Winkel gleich sind. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{1}{2bc}(b^2+c^2-a^2) = \frac{1}{2(b'k)(c'k)}\big((b'k)^2+(c'k)^2-(a'k)^2\big)\\ &= \frac{1}{2b'c'}\big((b')^2+(c')^2-(a')^2\big) = \cos\alpha'.\end{aligned}$$

Auf jedem Fall sind auch diesmal die Dreiecke ähnlich.

c) Wenn die Dreiecke durch eine zentrische Streckung auseinander hervorgehen, dann gibt es ein k, so dass $a = a'k$, $b = b'k$ und $c = c'k$ ist. Daraus folgt die Bedingung (2) und – wie in (b) gezeigt – auch Bedingung (1). Da sich eine Ähnlichkeitsabbildung aus Isometrien und zentrischen Streckungen zusammensetzt, folgt: Sind ABC und $A'B'C'$ ähnlich, so sind (a) und (b) erfüllt. ■

Anhang:

Ist $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{12} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$ eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten, so ist $A^\top = (a_{ji})$ die an der Diagonalen gespiegelte Matrix.

Manchmal schreibt man auch $(A)_{ij}$ statt a_{ij}. Das Produkt einer (n,m)-Matrix A mit einer (m,r)-Matrix B ist die (n,r)-Matrix $A \cdot B$ mit

$$(A \cdot B)_{ik} := \sum_{j=1}^{m} (A)_{ij} \cdot (B)_{jk}, \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } k = 1, \ldots, r.$$

Es ist $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.

Ist $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Zeilenvektor, so ist $\mathbf{x}^\top$ der gleiche Vektor, aber als Spalte geschrieben.

Schreibt man die Vektoren des $\mathbb{R}^n$ als **Spalten**, so gibt es zu jeder linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine (n,m)-Matrix $A = (a_{ij})$, so dass $F(\mathbf{x}^\top) = A \cdot \mathbf{x}^\top$ ist:

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix}.$$

Das Bild des i-ten Einheitsvektors $(\mathbf{e}_i)^\top = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top$ ist die i-te Spalte von A.

Schreibt man die Vektoren als **Zeilen**, so ist $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^\top)^\top = (A \cdot \mathbf{x}^\top)^\top = \mathbf{x} \cdot A^\top$.

Das euklidische Skalarprodukt kann man auch mit Hilfe des Matrizenprodukts beschreiben, es ist $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^\top = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Gilt $F(\mathbf{x}) \bullet F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ (wobei F eine lineare Abbildung mit $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot A^\top$ ist), so ist

$$\delta_{ij} = \mathbf{e_i} \bullet \mathbf{e}_j = F(\mathbf{e}_i) \bullet F(\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i \cdot A^\top) \cdot (\mathbf{e}_j \cdot A^\top)^\top = \mathbf{e}_i \cdot (A^\top \cdot A) \cdot \mathbf{e}_j^\top = (A^\top \cdot A)_{ij},$$

also $A^\top \cdot A = E_n$ die Einheitsmatrix. Man nennt A dann ***orthogonal***, insbesondere ist $\det(A) = \pm 1$.