1.4 Der Kreis

Definition

Der ***Kreis*** um $\mathbf{a}$ mit Radius r (im $\mathbb{R}^2$) ist die Menge

$$K_r(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = r\}.$$

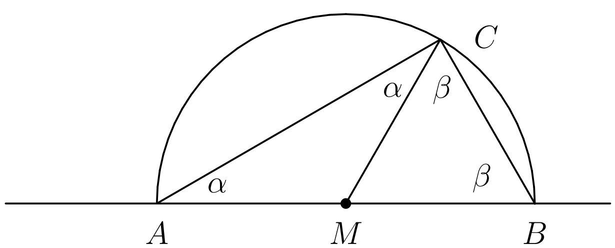
Ist $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, so gilt:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \in K_r(\mathbf{a}) \quad &\iff \quad (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 = r^2 \\
&\iff \quad \left(\frac{x_1-a_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{x_2-a_2}{r}\right)^2 = 1 \\
&\iff \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ mit } \frac{x_1-a_1}{r} = \cos t \text{ und } \frac{x_2-a_2}{r} = \sin t \\
&\iff \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ mit } x_1 = a_1 + r\cos t \text{ und } x_2 = a_2 + r\sin t,
\end{aligned}$$

also $K_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} = \mathbf{a} + (r\cos t, r\sin t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

Satz von Thales: *Sei C ein Punkt auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$. Dann ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig.*

Beweis: Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.



Weil A, B und C auf dem Kreis um M liegen, ist $d(A,M) = d(B,M) = d(M,C)$. Deshalb sind die Dreiecke CAM und BCM gleichschenklig, und nach dem Basiswinkelsatz hat der Winkel bei C im Dreieck ABC das Maß $\alpha + \beta$. Dann ist $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = \pi$, also $\alpha + \beta = \pi/2$. ∎

Es gilt auch die Umkehrung:

Satz: *Ist das Dreieck ABC bei C rechtwinklig, so liegen A, B und C auf einem Kreis um den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.*

Beweis: Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und N der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$. Dann ist MN parallel zu AC (siehe Übungsaufgabe). Insbesondere ist $\angle ANM = \angle CNM = 90°$. Da die beiden rechtwinkligen Dreiecke AMN und MCN in beiden Katheten übereinstimmen, gilt das auch für die Hypotenusen, es ist $d(A,M) = d(M,C)$.

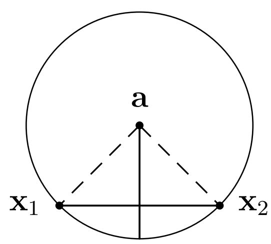
Damit ist klar, dass A, B und C auf dem Kreis um M mit Radius $r = d(M, C)$ liegen. ∎

Eine Gerade und ein Kreis brauchen sich nicht zu treffen. Trifft eine Gerade L aber den Kreis K mit Mittelpunkt $\mathbf{a}$ und Radius r, so gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Fall: L enthält einen Punkt $\mathbf{x}_0$ aus dem Inneren des Kreises. Dann ist $d(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) < r$, und die anderen Punkte der Gerade haben die Gestalt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{a}, \mathbf{x})^2 &= \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \;=\; \|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) + t\mathbf{v}\|^2 \\ &= \big((\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) + t\mathbf{v}\big) \bullet \big((\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) + t\mathbf{v}\big) \\ &= t^2\|\mathbf{v}\|^2 + 2t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} + \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\|^2. \end{aligned}$$

Dieser quadratische Ausdruck wird für $t \to \pm\infty$ beliebig groß. Also liegen auf L in beiden Richtungen (von $\mathbf{x}_0$ aus gesehen) Punkte, die sich außerhalb des Kreises befinden. Das bedeutet, dass es zwei verschiedene Punkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ in $K \cap L$ gibt (in denen der Abstand von $\mathbf{a}$ den Wert r annimmt). Man nennt L eine ***Sekante***. Die Strecke zwischen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ nennt man eine ***Sehne***. Das Dreieck mit den Ecken $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{a}$ ist gleichschenklig. Deshalb sind die Winkel bei $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gleich (und deshalb automatisch spitz). Den Winkel bei $\mathbf{a}$ nennt man ***Zentrums- oder Zentriwinkel***. Fällt man das Lot von $\mathbf{a}$ auf die Sehne, so gibt es einen Schnittpunkt zwischen $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ (denn sonst ergäbe sich ein Dreieck mit einem rechten und einem stumpfen Winkel, was nicht sein kann). Also entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse gleich dem Radius des Kreises ist. Außerdem besitzen diese Dreiecke eine gemeinsame Kathete. Deshalb wird der Zentrumswinkel vom Lot halbiert.

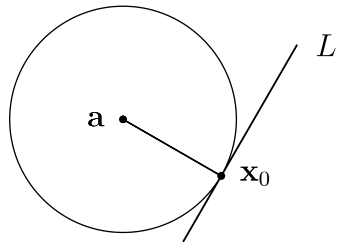


2. Fall: Trifft L zwar den Kreis K, aber keinen inneren Punkt von K, so können sich K und L nur in einem einzigen Punkt $\mathbf{x}_0$ treffen. Die Gerade berührt den Kreis in $\mathbf{x}_0$ und heißt die ***Tangente*** an den Kreis in $\mathbf{x}_0$.

Sei $L := \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \;:\; t \in \mathbb{R}\}$. Für $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ mit $t \neq 0$ gilt dann: $\mathbf{x}$ liegt außerhalb des Kreises, und deshalb ist

$$\begin{aligned} r^2 \;<\; \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 &= \|\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} - \mathbf{a}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\|^2 + t^2\|\mathbf{v}\|^2 + 2t(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} \\ &= r^2 + t \cdot \big(t\|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{v}\big), \end{aligned}$$

also $t\|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} > 0$ für $t > 0$ und < 0 für $t < 0$. Der Fall $t = 0$ liefert dann die Gleichung $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} = 0$. Der Radiusvektor $\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}$ steht auf der Tangenten senkrecht.

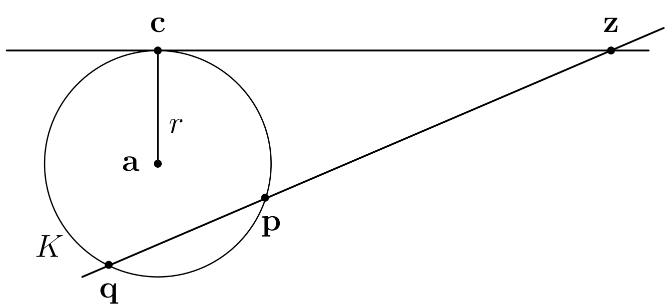


Gelegentlich erweist sich auch das folgende Ergebnis als nützlich:

Sehnen-Tangenten-Satz: *Sei K der Kreis um $\mathbf{a}$ mit Radius r, $\mathbf{z}$ ein Punkt außerhalb von K, L eine Sekante von K durch $\mathbf{z}$, die K in $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ schneidet, sowie T eine Tangente an K durch $\mathbf{z}$, die K in $\mathbf{c}$ berührt. Dann ist*

$$\|\mathbf{c}-\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{q}-\mathbf{z}\| \cdot \|\mathbf{p}-\mathbf{z}\|.$$

Beweis: Sei $N(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 - r^2$. Dann ist $K = \{\mathbf{x} : N(\mathbf{x}) = 0\}$.



Sei $L = \{\mathbf{z} + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$, mit einem Richtungsvektor $\mathbf{u}$ mit $\|\mathbf{u}\| = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in K \cap L \quad &\iff \quad \mathbf{x} = \mathbf{z} + t\mathbf{u} \text{ und } N(\mathbf{x}) = 0 \\
&\iff \quad \mathbf{x} = \mathbf{z} + t\mathbf{u} \text{ und } \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 - r^2 = 0 \\
&\iff \quad \mathbf{x} = \mathbf{z} + t\mathbf{u} \text{ und } \big(t\mathbf{u} + (\mathbf{z}-\mathbf{a})\big) \cdot \big(t\mathbf{u} + (\mathbf{z}-\mathbf{a})\big) - r^2 = 0 \\
&\iff \quad \mathbf{x} = \mathbf{z} + t\mathbf{u} \text{ und } t^2 + 2t\mathbf{u} \bullet (\mathbf{z}-\mathbf{a}) + N(\mathbf{z}) = 0.
\end{aligned}$$

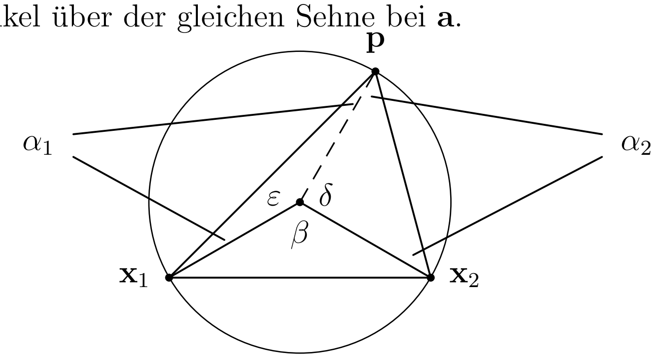
Ist $\mathbf{p} = \mathbf{z} + t_0\mathbf{u}$ und $\mathbf{q} = \mathbf{z} + s_0\mathbf{u}$, so sind t_0, s_0 die beiden Wurzeln der Gleichung $t^2 + 2t\mathbf{u} \bullet (\mathbf{z}-\mathbf{a}) + N(\mathbf{z}) = 0$. Nach den Formeln von Vieta ist dann $s_0 t_0 = N(\mathbf{z})$, also $\|\mathbf{p}-\mathbf{z}\| \cdot \|\mathbf{q}-\mathbf{z}\| = |t_0| \cdot |s_0| = \big|N(\mathbf{z})\big| = N(\mathbf{z})$. Dabei wird benutzt, dass $N(\mathbf{z}) > 0$ ist, weil $\mathbf{z}$ außerhalb des Kreises liegt.

Andererseits ergibt der Satz des Pythagoras: $\|\mathbf{z}-\mathbf{a}\|^2 = r^2 + \|\mathbf{c}-\mathbf{z}\|^2$, also auch $\|\mathbf{c}-\mathbf{z}\|^2 = N(\mathbf{z})$. ■

Ist $\overline{\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2}$ eine Sehne des Kreises um $\mathbf{a}$ mit Radius r und $\mathbf{p}$ ein Punkt auf dem Kreis, dann nennt man den Winkel bei $\mathbf{p}$ im Dreieck mit den Ecken $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{p}$ einen ***Peripheriewinkel***.

Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel: *Ist α der Peripheriewinkel und β der Zentrumswinkel über einer Sehne, so ist $\beta = 2\alpha$.*

Beweis: Sei $\mathbf{a}$ der Mittelpunkt des Kreises, die Sehne sei durch die Endpunkte $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ begrenzt. Weiter sei α der Peripheriewinkel über der Sehne bei $\mathbf{p}$ und β der Zentrumswinkel über der gleichen Sehne bei $\mathbf{a}$.



Die Dreiecke mit den Ecken $\mathbf{p}, \mathbf{x}_1, \mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{x}_2, \mathbf{p}, \mathbf{a}$ sind beide gleichschenklig, mit Basiswinkeln α_1 bzw. α_2, wobei $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ ist. Die anderen Winkel seien wie in der Skizze bezeichnet.

Dann ist $\beta = 2\pi - (\varepsilon + \delta) = 2\pi - \big((\pi - 2\alpha_1) + (\pi - 2\alpha_2)\big) = 2\alpha$. ∎