1.3 Das Dreieck

In diesem Abschnitt findet alles in der affinen Standardebene $\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2$ statt.

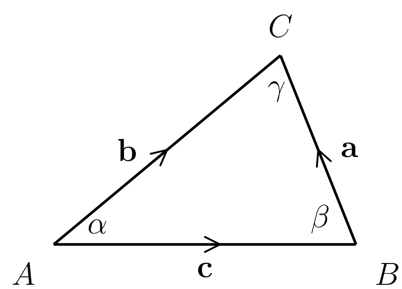
Drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen, bilden ein ***Dreieck*** ABC. Die Punkte A, B, C nennt man die ***Ecken*** des Dreiecks, die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die *Seiten* des Dreiecks.

Die Punkte A, B und C entsprechen den Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OC}$. Man kann aber auch die Seiten als Vektoren auffassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &:= \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}, \\ \mathbf{b} &:= \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ \text{und} \quad \mathbf{c} &:= \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}. \end{aligned}$$

Außerdem setzt man $a := \|\mathbf{a}\|$, $b := \|\mathbf{b}\|$ und $c := \|\mathbf{c}\|$, sowie $\alpha := \angle BAC$, $\beta := \angle ABC$ und $\gamma := \angle ACB$. Es ist $\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Die „Dreiecksungleichung“ besagt, dass in einem Dreieck die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite ist (also zum Beispiel $a + b > c$). Dass dabei das strikte „Größer“-Zeichen gilt, werden wir später sehen.



Wegen $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \bullet (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}$ erhält man die Formel

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \frac{1}{2}\Big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2\Big) \quad \text{(Polarisationsformel).}$$

Daraus folgt:

Cosinussatz: *Im Dreieck ist*

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \textit{und} \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Beweis: Es ist

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\|} = \frac{\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2}{2\|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{c}\|} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{a}\bullet(-\mathbf{c})}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{c}\|} = \frac{\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{c}\|^2-\|\mathbf{a}+\mathbf{c}\|^2}{2\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{c}\|} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Bei γ geht's analog. ■

Folgerung 1 (Basiswinkel-Satz): *Im Dreieck ist genau dann $a = b$, wenn $\alpha = \beta$ ist.*

Beweis: 1) Ist $a = b$, so ist

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{c}{2a} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \cos\beta,$$

also $\alpha = \beta$.

2) Ist $\cos\alpha = \cos\beta$, so ist

$$\begin{aligned}
0 &= \cos\alpha - \cos\beta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\
&= \frac{a(b^2+c^2-a^2)-b(a^2+c^2-b^2)}{2abc} = \frac{ab(b-a)-c^2(b-a)+(b^3-a^3)}{2abc} \\
&= \frac{(b-a)(ab-c^2+b^2+ab+a^2)}{2abc} = \frac{(b-a)\big((a+b)^2-c^2\big)}{2abc}.
\end{aligned}$$

Dann muss $a + b = c$ oder $a = b$ sein. Wäre $a + b = c$, so wäre

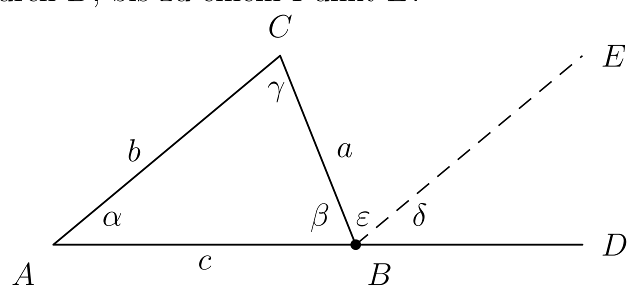
$$\cos\alpha = \frac{b^2+(a+b)^2-a^2}{2bc} = \frac{2b^2+2ab}{2bc} = \frac{a+b}{c} = 1,$$

also $\alpha = 0$. Das kann nicht sein, und es folgt, dass $a = b$ ist. ■

Nebenbei wurde im Beweis mit Hilfe des Cosinussatzes gezeigt, dass in einem Dreieck die Gleichung $a+b = c$ nicht gelten kann. Das ergibt die ***starke Dreiecksungleichung:*** In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten immer echt größer als die dritte Seite.

Folgerung 2 (Außenwinkelsatz): *Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.*

Beweis: Man verlängere AB über B hinaus zu einem Punkt D und ziehe die Parallele zu AC durch B, bis zu einem Punkt E.



Dann entstehen zwei neue Winkel $\delta = \angle DBE$ und $\varepsilon = \angle EBC$.

$\varepsilon + \delta$ ist der Außenwinkel bei B, also der Nebenwinkel zu β. Nach den Sätzen über Winkel an Parallelen ist $\varepsilon = \gamma$ (Z-Winkel) und $\delta = \alpha$ (F-Winkel). Also ist $\varepsilon + \delta = \alpha + \gamma$. Alle anderen Fälle behandelt man analog. ■

Folgerung 3 (Winkelsumme im Dreieck): *Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreiecks beträgt* $180°$.

Beweis: Man kann die gleiche Skizze wie oben benutzen. Nach dem Satz über Nebenwinkel ist $\beta + (\varepsilon + \delta) = \pi$. ■

Folgerung 3 ist ein zentraler Satz der euklidischen Geometrie. Ein beträchtlicher Teil der Vorlesung wird sich dem Problem widmen, was passiert, wenn dieses Ergebnis nicht zur Verfügung steht.

Man nennt ein Dreieck ***spitzwinklig***, wenn alle drei Winkel spitz sind, bzw. ***rechtwinklig*** oder ***stumpfwinklig***, wenn einer der drei Winkel ein Rechter oder stumpf ist.

Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten (den „Schenkeln") nennt man ***gleichschenklig***, ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten nennt man ***gleichseitig***. Bei einem gleichseitigen Dreieck sind auch alle Winkel gleich und betragen jeweils $60°$.

Zwei Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind.

Satz: *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, so gibt es eine Gerade h durch P, die auf g senkrecht steht.*

Beweis: Vektoriell sieht die Situation folgendermaßen aus:

Es ist eine Gerade $L = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ und ein Punkt $\mathbf{y}$ gegeben. Ist $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, so setze man $\mathbf{w} := (-v_2, v_1)$. Dann ist $\mathbf{v} \bullet \mathbf{w} = 0$, also $\mathbf{w}$ orthogonal zu $\mathbf{v}$. Dann ist $L' := \{\mathbf{x} = \mathbf{y} + t\mathbf{w} \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade durch $\mathbf{y}$, die auf L senkrecht steht. ■

Auf diesem Wege gewinnt man zu g und $P \in g$ die Senkrechte zu g in P, aber auch im Falle $P \notin g$ das Lot von P auf g.

In einem Dreieck bezeichnet man die Senkrechte zu einer Seite durch die gegenüberliegende Ecke als ***Höhe***.

Satz des Pythagoras: *Im Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ und den gegenüberliegenden Seiten a, b, c gilt: Ist γ ein rechter Winkel, so ist $a^2 + b^2 = c^2$.*

Beweis: Nach dem Cosinussatz ist $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Im Falle $\gamma = \pi/2$ ist aber $\cos\gamma = 0$. ■

Einen alternativen Beweis erhält man, wenn man die Seitenvektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ mit der Beziehung $\mathbf{c}+\mathbf{a}=\mathbf{b}$ benutzt. Dass γ ein rechter Winkel ist, bedeutet, dass $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=0$ ist. Daraus folgt:

$$c^2 = \|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - 2\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = b^2 + a^2.$$

Diese fast läppisch anmutenden algebraischen Beweise werden der Bedeutung des Satzes von Pythagoras nicht gerecht. Und es fehlt auch das Bild von den Quadraten über den Katheten und der Hypotenuse. Diesbezüglich muss ich Sie auf später vertrösten.

Hier soll zunächst die Umkehrung bewiesen werden.

Umkehrung des Satzes von Pythagoras: *Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c und $a^2 + b^2 = c^2$. Dann ist γ ein rechter Winkel.*

Beweis: Wieder hilft der Cosinussatz. Wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist, dann folgt:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 0.$$

Also ist $\gamma = \pi/2$. ∎

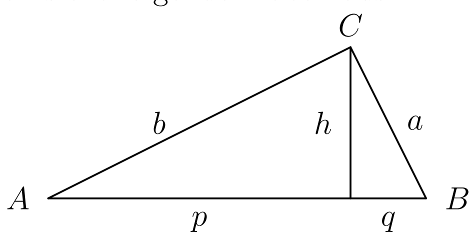
Satz: *Im rechtwinkligen Dreieck ist $\cos\alpha = b/c$.*

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Cosinussatz und der Formel $a^2 + b^2 = c^2$. Es ist $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{2b^2}{2bc} = \dfrac{b}{c}$. ∎

Kathetensatz: *In einem rechtwinkligen Dreieck teile die Höhe von C auf die Hypotenuse letztere in zwei Hypotenusen-Abschnitte der Längen p und q. Dann ist*

$$b^2 = pc \quad \textit{und} \quad a^2 = qc.$$

Beweis: Die Situation sieht folgendermaßen aus:



Aus den Gleichungen $p^2 + h^2 = b^2$, $q^2 + h^2 = a^2$, $a^2 = c^2 - b^2$ und $p + q = c$ folgt:

$$\begin{aligned} 2a^2 &= (q^2+h^2)+(c^2-b^2) = c^2+q^2-p^2 \\ &= (p^2+2pq+q^2)+q^2-p^2 = 2q^2+2pq = 2qc, \end{aligned}$$

also $a^2 = qc$. Die Gleichung $b^2 = pc$ beweist man analog. ∎

Höhensatz: *In einem rechtwinkligen Dreieck sei h die Höhe von C auf die Hypotenuse c, p und q seien die entstehenden Hypotenusen-Abschnitte. Dann ist*

$$h^2 = p \cdot q, \qquad \textit{also} \qquad h = \sqrt{pq}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - p^2 = (c^2 - a^2) - p^2 = \big((p+q)^2 - p^2\big) - a^2 \\ &= q^2 + 2pq - a^2 = 2pq - (a^2 - q^2) = 2pq - h^2, \end{aligned}$$

und daraus folgt die Behauptung. ■

Die Formel $h = \sqrt{pq}$ wird gerne benutzt, um die Quadratwurzel aus einer gegebenen Größe zu konstruieren.

Pythagoras, Kathetensatz und Höhensatz fasst man gerne unter der Bezeichnung „Satzgruppe des Pythagoras“ zusammen. Jeder der drei Sätze lässt sich aus jedem der anderen herleiten.